المعلِّم في الرياضيات

أحمد عطوان

أشرف عليه

د. مصطفى العضوري

د. سليمان بني هاني

قسم الهندسة / الجامعة الهاشمية



الطبعة الأولى
2010 م - 1431 هـ

رقم الايداع لدى دائرة المكتبة الوطنية
(2010/1/234)

محمد أحمد عطوان

اسم الكتاب : المعلّم في الرياضيات " أساسيات الرياضيات للعلوم الهندسية "

تأليف : أحمد عطوان

الواصفات : الرياضيات / الهندسة التفاضلية .

تم اعداد بيانات الفهرسة والتصنيف الأولية من قبل دائرة المكتبة الوطنية

عمان _ الأردن

هاتف : 00962-79-7083895

الاخراج والصف الضوئي : أحمد عطوان

جميع الحقوق محفوظة : لا يسمح بإعادة اصدار هذا الكتاب أو أي جزء منه أو نقله بأي شكل من الأشكال دون إذن خطي مسبق من المؤلف .

المعلم في الرياضيات

اعداد : احمد عطوان _ اشراف : د. مصطفى العفوري , د. سليمان بني هاني

جاء الكتاب في ثلاث وحدات هي :

1 التكامل .

2 القطوع المخروطية .

3 الهندسة الفضائية .

تحتوي على مسائل محلولة وشاملة لطلبة المرحلة الثانوية والسنة التحضيرية الجامعية .

التكــــــامل

الاقتران البدائي

تعلمت سابقا أنه إذا علم اقتران ما , وتوفرت فيه شروط الاشتقاق فإننا نستطيع أن نحصل منه على اقتران اخر يسمى المشتقة الأولى للاقتران ق ورمزنا له بالرمز $ق'$.

وفي حالات أخرى يحدث العكس ,أي يكون لدينا $ق'(س)$ ونرغب في معرفة الاقتران الأصلي ق(س) ، كأن يكون لدينا ميل المماس عند أي نقطة على منحنى ما ونود معرفة معادلة هذا المنحنى .

وكما سمينا الحصول على مشتقة الاقتران بعملية التفاضل أو الاشتقاق فإن العملية العكسية وهي عملية الحصول على الاقتران من مشتقته تسمى بعملية إيجاد (أصل مشتقة الاقتران) ، وهذا ما يعرف بالتكامل .

تعريف

إذا كان ق اقترانا متصلا على مجاله ، فإن م (س) اقتران بدائي لـ ق (س) إذا كان :

$م'(س) = ق (س)$ لكل س في مجال ق .

مثال الاقتران $\frac{1}{3}س^3$ اقتران بدائي للاقتران $س^2$ على الفترة $(-\infty ، \infty)$ لأن $\frac{د}{دس}(\frac{1}{3}س^3) = س^2$ لجميع قيم س .

مثال الاقتران $\frac{2}{3}ن^{\frac{3}{2}}$ اقتران بدائي للاقتران $ن^{\frac{1}{2}}$ على الفترة $(0 ، \infty)$ لأن $\frac{د}{دن}(\frac{2}{3}ن^{\frac{3}{2}}) = ن^{\frac{1}{2}}$ لكل ن عدد موجب .

كما نعلم إذا كان $ق(س) = س^4$، فإن $ق'(س) = 4 س^3$ وحسب التعريف السابق يكون $س^4$ اقترانا بدائيا للاقتران $4 س^3$.

إلا إننا نلاحظ أن الاقترانات $س^4$، $س^4 + 7$ ، $س^4 - 5$ ، $س^4 +$ جـ (حيث جـ ثابت) جميعها لها نفس المشتقة $4 س^3$.

وهذا معناه أن أصل مشتقة $4 س^3$ ليس اقترانا واحدا فقط . إنما هو مجموعة من الاقترانات تختلف فيما بينها بثابت .

نظرية

إذا كان م(س) اقترانا بدائيا للاقتران ق(س) على الفترة ف، فإن أي اقتران بدائي اخر للاقتران ق(س) على الفترة ف يكون على الصورة م(س) + جـ (حيث جـ ثابت) .

تُدعى عملية إيجاد الاقتران البدائي للاقتران ق(س) بعملية التكامل غير المحدود للاقتران ق (س) .

و الرمز ∫ ق(س) . د س = م (س) + جـ يمثل أعم أصول المشتقة . حيث نسمي ∫ ق (س) . د س التكامل غير المحدود لـ ق(س) بالنسبة لـ س، كما نسمي ق(س) بالمُكامَل ، جـ ثابت التكامل .

ومما تقدم نفهم أن :

م (س) = ∫ ق (س) . د س ⟺ مَ (س) = ق (س)

أمثلة متنوعة

١ إذا كان م (س) = $\frac{1}{4}$ س^{4} - $\frac{1}{3}$ س^{3} + ١ اقترانا بدائيا للاقتران ق (س) ، س ∋ [-٣، ٦] فجد قَ (١) .

الحل

ق (س) = مَ (س) = ($\frac{1}{4}$) ٤ س^{3} - ($\frac{1}{3}$) ٣ س^{2} = س^{3} – س^{2}

قَ (س) = مً (س) = ٣ س^{2} - ٢ س ⟵ قَ (١) = ٣ (١)^{2} - ٢ (١) = ١

---

٢ إذا كان ق : [٠ ، ٨] ⟵ ح ، م (س) اقترانا بدائيا للاقتران ق (س) حيث ق(س) = ٦ س^{2} - ٥ س + ٩ فجد مً (٤) .

الحل

م (س) = ∫ ق (س) . د س

مَ (س) = ق (س) ⟵ مَ (س) = ق(س) = ٦ س^{2} - ٥ س + ٩

مً (س) = قَ (س) = ١٢ س - ٥

مً (٤) = ١٢ (٤) - ٥ = ٤٣

ملاحظة

إذا كان كل من م$_{1}$(س) ، م$_{2}$(س) اقترانا بدائيا للاقتران المتصل ق, فإن م$_{2}$(س) - م$_{1}$(س) = ثابت

٣ إذا كان م$_{1}$(س)، م$_{2}$(س) اقترانين بدائيين للاقتران المتصل ق وكان م$_{1}$(س) = س^{2} - ٤ س + ٦ م$_{2}$ (٣) = ٤، فجد م$_{2}$(س) .

الحل

م$_{2}$(س) - م$_{1}$(س) = جـ (حيث جـ ثابت)

م$_{2}$(س) = م$_{1}$(س) + جـ = س^{2} - ٤ س + ٦ + جـ

لكن م$_{2}$(٣) = ٤ ⟵ (٣)^{2} - ٤ (٣) + ٦ + جـ = ٤ ⟵ جـ = ١

م$_{2}$(س) = س^{2} - ٤ س + ٧

٤ إذا كان $\int$ ق (س) . د س = س − $\frac{س^٣}{٣}$ − جتا س + جـ ، فجد قَ ($\frac{\pi}{٢}$) .

(الحل) $\frac{د}{د س}$ ($\int$ ق (س) . د س) = $\frac{د}{د س}$ (س − $\frac{س^٣}{٣}$ − جتا س + جـ)

← ق (س) = ١ − س^٢ + جا س

← قَ (س) = − ٢ س + جتا س ← قَ ($\frac{\pi}{٢}$) = − ٢ ($\frac{\pi}{٢}$) + جتا ($\frac{\pi}{٢}$) = − π

---

٥ إذا كان $\int$ ق (س) . د س = جا^{٢}س - جتا (٢س) + ١ ، فجد قً (π) .

جا (٢س) = ٢ جا س جتا س

(الحل) باشتقاق طرفي المساواة ← ق (س) = ٢ جا س جتا س +٢ جا (٢س) = ٣ جا(٢س)

قَ(س) = ٦ جتا (٢س)

قً(س) = -١٢ جا(٢س) ← قً (π) = -١٢جا (٢π) = ٠

---

٦ إذا كان ص = $\int$ $\sqrt[٥]{٣ س^٢ + ٨ س + ٤}$. د س فجد ، $\frac{د ص}{د س}\Big|_{س = ٢}$

(الحل) $\frac{د ص}{د س}$ = $\sqrt[٥]{٣ س^٢ + ٨ س + ٤}$ ← $\frac{د ص}{د س}\Big|_{س = ٢}$ = $\sqrt[٥]{٣ (٢)^٢ + ٨(٢) + ٤}$ = $\sqrt[٥]{٣٢}$ = ٢

---

٧ إذا كان $\int$ قَ (س) . د س = ظا س+جتا س − $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، ق ($\frac{\pi}{٤}$) = ١ ، فما قيمة ق ($\frac{\pi}{٣}$)

(الحل) بما أن $\int$ قَ (س) . د س = ظا س + جتا س − $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

إذن ق (س) = ظا س + جتا س − $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ + جـ

لكن ق ($\frac{\pi}{٤}$) = ١ ← ظا ($\frac{\pi}{٤}$) + جتا ($\frac{\pi}{٤}$) − $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ + جـ = ١

← ١ + $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ − $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ + جـ = ١ ← جـ = ٠

إذن ق (س) = ظا س + جتا س − $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

ق ($\frac{\pi}{٣}$) = ظا ($\frac{\pi}{٣}$) + جتا ($\frac{\pi}{٣}$) − $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ = $\sqrt{٣}$ + $\frac{١}{٢}$ − $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

---

٨ إذا كان $\int$ قَ (س) . د س = جتا^{٢}س − أ جا س + ١ وكان قَ ($\frac{\pi}{٤}$) = ٠ ، فجد قيمة أ .

(الحل) باشتقاق الطرفين :

قَ (س) = ٢ جتا س (−جا س) − أ جتا س = −جا (٢س) − أ جتا س

لكن قَ ($\frac{\pi}{٤}$) = ٠ ← −جا (٢ ($\frac{\pi}{٤}$)) − أ جتا ($\frac{\pi}{٤}$) = ٠

← −جا ($\frac{\pi}{٢}$) − أ جتا ($\frac{\pi}{٤}$) = ٠ ← أ = − $\sqrt{٢}$

(فوق جا ($\frac{\pi}{٢}$): ١ ، وفوق جتا ($\frac{\pi}{٤}$): $\frac{١}{\sqrt{٢}}$)

قواعد التكامل غير المحدود

١

ق (س)	$\int$ ق (س) . د س	ق (س)	$\int$ ق (س) . د س
أ (ثابت)	أ س + جـ	جا س	- جتا س + جـ
		جتا س	جا س + جـ
س$^{\text{ن}}$	$\frac{\text{س}^{\text{ن}+١}}{\text{ن}+١}$ + جـ ، ن $\neq$ - ١	قا^{٢} س	ظا س + جـ
		قتا^{٢} س	- ظتا س + جـ
(أ س + ب)$^{\text{ن}}$	$\frac{(\text{أ س + ب})^{\text{ن}+١}}{\text{أ}(\text{ن}+١)}$ + جـ ، ن $\neq$ - ١	قا س ظا س	قا س + جـ
		قتا س ظتا س	- قتا س + جـ

تكامل بعض الاقترانات المثلثية (نتائج) .

$\int$ جا (أ س + ب) . د س = $\frac{-١}{\text{أ}}$ جتا (أ س + ب) + جـ   حيث جـ ثابت.

$\int$ جتا (أ س + ب) .د س = $\frac{١}{\text{أ}}$ جا (أ س + ب) + جـ

$\int$ قا^{٢}(أ س + ب) . د س = $\frac{١}{\text{أ}}$ ظا (أ س + ب) + جـ

$\int$ قتا^{٢}(أ س + ب) . د س = $\frac{-١}{\text{أ}}$ ظتا (أ س + ب) + جـ

$\int$ قا (أ س + ب) ظا (أ س + ب) . د س = $\frac{١}{\text{أ}}$ قا (أ س + ب) + جـ

$\int$ قتا (أ س + ب) ظتا (أ س + ب) . د س = $\frac{-١}{\text{أ}}$ قتا (أ س + ب) + جـ

مثال $\int \sqrt{٧}$. د س = $\sqrt{٧}$ س + جـ

مثال $\int$(ب^{٣} + ب^{٢} + ب). د س (حيث ب ثابت) = (ب^{٣} + ب^{٢} + ب) س + جـ

مثال $\int \sqrt[٥]{\text{ص}^{٢}}$. د ص = $\int$ ص$^{\frac{٢}{٥}}$. د ص = $\frac{\text{ص}^{\frac{٢}{٥}+١}}{\frac{٢}{٥}+١}$ + جـ = $\frac{٥}{٧}$ ص$^{\frac{٧}{٥}}$ + جـ = $\frac{٥}{٧}\sqrt[٥]{\text{ص}^{٧}}$ + جـ

مثال $\int \frac{\text{د س}}{\text{س}^{٣}\sqrt[٣]{\text{س}}}$ = $\int$ س$^{-٣}$. س$^{\frac{-١}{٣}}$. د س = $\int$ س$^{\frac{-١٠}{٣}}$. د س = $\frac{\text{س}^{\frac{-١٠}{٣}+١}}{\frac{-١٠}{٣}+١}$ + جـ

= $\frac{-٣}{٧}$ س$^{\frac{-٧}{٣}}$ + جـ = $\frac{-٣}{٧\sqrt[٣]{\text{س}^{٧}}}$ + جـ

مثال $\int (٢ - ٥ س)^{٦} . د س = \frac{(٢ - ٥ س)^{٧}}{- ٥ (٧)} + جـ = \frac{- ١}{٣٥} (٢ - ٥ س)^{٧} + جـ$

مثال $\int \frac{١}{\sqrt{٤ س + ١}} . د س = \int (٤ س + ١)^{\frac{-١}{٢}} . د س = \frac{(٤ س + ١)^{\frac{-١}{٢} + ١}}{٤ (\frac{-١}{٢} + ١)} + جـ = \frac{(٤ س + ١)^{\frac{١}{٢}}}{٤ (\frac{١}{٢})} + جـ$

$= \frac{١}{٢} \sqrt{٤ س + ١} + جـ$

مثال $\int جا (\frac{٣ س}{٢}) . د س = \frac{- جتا (\frac{٣ س}{٢})}{\frac{٣}{٢}} + جـ = \frac{- ٢}{٣} جتا (\frac{٣ س}{٢}) + جـ$

مثال $\int \frac{جا (٥ س + ١)}{جتا^{٢} (٥ س + ١)} . د س = \int \frac{جا (٥ س + ١)}{جتا (٥ س + ١) جتا (٥ س + ١)} . د س$

$= \int ظا (٥ س + ١) قا (٥ س + ١) . د س = \frac{١}{٥} قا (٥ س + ١) + جـ$

قواعد التكامل غير المحدود ٢

$\int أ ق (س) . د س = أ \int ق (س) . د س$ (أ ثابت)

$\int (ق_{١}(س) \pm ق_{٢}(س) \pm ق_{٣}(س) \pm .... \pm ق_{ن}(س)) . د س$
$= \int ق_{١}(س) . د س \pm \int ق_{٢}(س) . د س \pm \int ق_{٣}(س) . د س \pm .... \pm \int ق_{ن}(س) . د س$

مثال $\int \pi جا س . د س = \pi \int جا س . د س = \pi (- جتا س) + جـ = - \pi جتا س + جـ$

مثال $\int (س + \frac{١}{س^{٢}} - جا (٣ س)) . د س = \int س . د س + \int \frac{١}{س^{٢}} . د س - \int جا (٣ س) . د س$

$= \int س . د س + \int س^{-٢} . د س - \int جا (٣ س) . د س$

$= \frac{س^{٢}}{٢} + \frac{س^{-١}}{- ١} - \frac{- جتا (٣ س)}{٣} + جـ$

$= \frac{س^{٢}}{٢} - \frac{١}{س} + \frac{جتا (٣ س)}{٣} + جـ$

مثال $\int (\frac{٣}{س^{٤}} - \frac{٥}{س^{٢}}) . د س = \int \frac{٣}{س^{٤}} . د س - \int \frac{٥}{س^{٢}} . د س = \int ٣ س^{-٤} . د س - \int ٥ س^{-٢} . د س$

$= ٣ \int س^{-٤} . د س - ٥ \int س^{-٢} . د س = \frac{٣ س^{-٣}}{-٣} - \frac{٥ س^{-١}}{-١} + جـ$

$= \frac{-١}{س^{٣}} + \frac{٥}{س} + جـ$

تذكر

الأسس والجذور

إذا كان س عددا حقيقيا و ن عددا صحيحا موجبا فإن : $\frac{١}{س^{ن}} = س^{-ن}$ ، $س^{صفر} = ١$

إذا كان م ، ن عددين صحيحين و س، ص عددين حقيقيين ، فإن :

١) $س^{م} س^{ن} = س^{م + ن}$

٢) $\frac{س^{م}}{س^{ن}} = س^{م-ن}$ ، س ≠ صفرا

٣) $(س^{م})^{ن} = س^{م ن}$

٤) $(س ص)^{ن} = س^{ن} ص^{ن}$

إذا كان م، ن عددين صحيحين موجبين و س، ص عددين حقيقيين موجبين، فإن :

١) $\sqrt[ن]{س^{ن}} = س$

٢) $\sqrt[ن]{س ص} = \sqrt[ن]{س} \sqrt[ن]{ص}$

٣) $\sqrt[ن]{\frac{س}{ص}} = \frac{\sqrt[ن]{س}}{\sqrt[ن]{ص}}$ ، ص ≠ صفرا

٤) $\sqrt[م]{\sqrt[ن]{س}} = \sqrt[م ن]{س}$

إذا كان م ، ن عددين صحيحين، حيث ن > صفر، س عدد حقيقي موجب ، فإن :

١) $س^{\frac{م}{ن}} = \sqrt[ن]{س^{م}}$

٢) $س^{\frac{م}{ن}} = (\sqrt[ن]{س})^{م}$

إذا كان م، ن عددين نسبيين و س، ص عددين صحيحين موجبين ، فإن :

١) $س^{م} س^{ن} = س^{م + ن}$

٢) $\frac{س^{م}}{س^{ن}} = س^{م-ن}$ ، س ≠ صفرا

٣) $(س^{م})^{ن} = س^{م ن}$

٤) $(س ص)^{ن} = س^{ن} ص^{ن}$

تذكر

متطابقات التحليل الأساسية

إذا كان س، ص عددين حقيقيين، فإن :

١) $(س + ص)^{٢} = س^{٢} + ٢ س ص + ص^{٢}$

٢) $(س - ص)^{٢} = س^{٢} - ٢ س ص + ص^{٢}$

٣) $(س + ص)^{٣} = س^{٣} + ٣ س^{٢} ص + ٣ س ص^{٢} + ص^{٣}$

٤) $(س - ص)^{٣} = س^{٣} - ٣ س^{٢} ص + ٣ س ص^{٢} - ص^{٣}$

٥) $س^{٢} - ص^{٢} = (س - ص)(س + ص)$

٦) $س^{٣} + ص^{٣} = (س + ص)(س^{٢} - س ص + ص^{٢})$

٧) $س^{٣} - ص^{٣} = (س - ص)(س^{٢} + س ص + ص^{٢})$

٨) $س^{ن} - ص^{ن} = (س - ص)(س^{ن-١} + س^{ن-٢} ص + \ldots + س ص^{ن-٢} + ص^{ن-١})$ حيث ن عدد صحيح موجب

أمثلة متنوعة

١ جد $\int (٤س^{٢} + ١)(س - ٧)\ .\ د س$

الحل $\int (٤س^{٢} + ١)(س - ٧)\ .\ د س = \int (٤س^{٣} - ٢٨س^{٢} + س - ٧)\ .\ د س$

$= س^{٤} - \frac{٢٨}{٣}س^{٣} + \frac{١}{٢}س^{٢} - ٧س + جـ$

---

٢ جد $\int (س^{٢} - ٣)^{٢}\ .\ د س$

الحل $\int (س^{٢} - ٣)^{٢}\ .\ د س = \int (س^{٤} - ٦س^{٢} + ٩)\ .\ د س = \frac{١}{٥}س^{٥} - ٢س^{٣} + ٩س + جـ$

---

٣ جد $\int (٩س^{٢} - ٦س + ١)^{٧}\ .\ د س$

$\int (٩س^{٢} - ٦س + ١)^{٧}\ .\ د س = \int ((٣س - ١)(٣س - ١))^{٧}\ .\ د س = \int ((٣س - ١)^{٢})^{٧}\ .\ د س$

$= \int (٣س - ١)^{١٤}\ .\ د س = \frac{(٣س - ١)^{١٥}}{٤٥} + جـ$

---

٤ جد $\int (س^{٢} + ١)^{٣}\ .\ د س$

الحل $\int (س^{٢} + ١)^{٣}\ .\ د س = \int (س^{٦} + ٣س^{٤} + ٣س^{٢} + ١)\ .\ د س = \frac{١}{٧}س^{٧} + \frac{٣}{٥}س^{٥} + س^{٣} + س + جـ$

---

٥ جد $\int س(٢ - ٣س)^{٣}\ .\ د س$

الحل $\int س(٢ - ٣س)^{٣}\ .\ د س = \int س(٨ - ٣٦س + ٥٤س^{٢} - ٢٧س^{٣})\ .\ د س$

$= \int (٨س - ٣٦س^{٢} + ٥٤س^{٣} - ٢٧س^{٤})\ .\ د س = ٤س^{٢} - ١٢س^{٣} + \frac{٢٧}{٢}س^{٤} - \frac{٢٧}{٥}س^{٥} + جـ$

---

٦ جد $\int (س - ٢)(س^{٢} + ٢س + ٤)\ .\ د س$

الحل $\int (س - ٢)(س^{٢} + ٢س + ٤)\ .\ د س = \int (س^{٣} - ٨)\ .\ د س = \frac{١}{٤}س^{٤} - ٨س + جـ$

---

٧ جد $\int (ن - ١)(ن - ٢)(ن - ٣)\ .\ د ن$

الحل $\int (ن - ١)(ن - ٢)(ن - ٣)\ .\ د ن = \int (ن^{٢} - ٣ن + ٢)(ن - ٣)\ .\ د ن$

$= \int (ن^{٣} - ٦ن^{٢} + ١١ن - ٦)\ .\ د ن = \frac{١}{٤}ن^{٤} - ٢ن^{٣} + \frac{١١}{٢}ن^{٢} - ٦ن + جـ$

---

٨ جد $\int س^{٢}(٢س + \frac{٣}{س})^{٢}\ .\ د س$

الحل

$\int س^{٢}(٢س + \frac{٣}{س})^{٢}\ .\ د س = \int س^{٢}(٤س^{٢} + ١٢ + \frac{٩}{س^{٢}})\ .\ د س = \int (٤س^{٤} + ١٢س^{٢} + ٩)\ .\ د س$

$= \frac{٤}{٥}س^{٥} + ٤س^{٣} + ٩س + جـ$

٩ جد $\int (1-\text{ن})(1+\text{ن})(1+\text{ن}^2)\,.\,\text{د ن}$

الحل

$\int (1-\text{ن})(1+\text{ن})(1+\text{ن}^2)\,.\,\text{د ن} = \int (1-\text{ن}^2)(1+\text{ن}^2)\,.\,\text{د ن} = \int (1-\text{ن}^4)\,\text{د ن} = \text{ن} - \frac{1}{5}\text{ن}^5 + \text{جـ}$

---

١٠ جد $\int (\text{س}^2+\text{س}-2)(\text{س}^2-\text{س}+2)\,.\,\text{د س}$

الحل

$\int (\text{س}^2+\text{س}-2)(\text{س}^2-\text{س}+2)\,.\,\text{د س} = \int (\text{س}^2+(\text{س}-2))(\text{س}^2-(\text{س}-2))\,.\,\text{د س}$

$= \int (\text{س}^4-(\text{س}-2)^2)\,\text{د س} = \frac{1}{5}\text{س}^5 - \frac{(\text{س}-2)^3}{3} + \text{جـ}$

---

١١ جد $\int \frac{(\text{س}+2)^2}{\text{س}^4}\,.\,\text{د س}$

الحل

$\int \frac{(\text{س}+2)^2}{\text{س}^4}\,.\,\text{د س} = \int \frac{\text{س}^2+4\text{س}+4}{\text{س}^4}\,.\,\text{د س} = \int \left(\frac{\text{س}^2}{\text{س}^4} + \frac{4\text{س}}{\text{س}^4} + \frac{4}{\text{س}^4}\right).\,\text{د س}$

$= \int (\text{س}^{-2}+4\text{س}^{-3}+4\text{س}^{-4})\,.\,\text{د س} = \frac{-1}{\text{س}} + \frac{-2}{\text{س}^2} + \frac{-4}{3\text{س}^3} + \text{جـ}$

---

١٢ جد $\int \frac{\text{س}^3+1}{\text{س}+1}\,.\,\text{د س}$

الحل

$\int \frac{\text{س}^3+1}{\text{س}+1}\,.\,\text{د س} = \int \frac{(\text{س}+1)(\text{س}^2-\text{س}+1)}{\text{س}+1}\,.\,\text{د س} = \int (\text{س}^2-\text{س}+1)\,.\,\text{د س}$

$= \frac{1}{3}\text{س}^3 - \frac{1}{2}\text{س}^2 + \text{س} + \text{جـ}$

---

١٣ جد $\int \frac{\text{س}-4}{\sqrt{\text{س}}+2}\,.\,\text{د س}$

الحل

$\int \frac{\text{س}-4}{\sqrt{\text{س}}+2}\,.\,\text{د س} = \int \frac{(\sqrt{\text{س}}+2)(\sqrt{\text{س}}-2)}{\sqrt{\text{س}}+2}\,.\,\text{د س} = \int (\sqrt{\text{س}}-2)\,.\,\text{د س}$

$= \int (\text{س}^{\frac{1}{2}}-2)\,\text{د س} = \frac{2}{3}\text{س}^{\frac{3}{2}} - 2\text{س} + \text{جـ} = \frac{2}{3}\sqrt{\text{س}^3} - 2\text{س} + \text{جـ}$

---

١٤ جد $\int \left(\text{س}\sqrt{\text{س}} + 2\sqrt{\text{س}} - \frac{1}{2\sqrt{\text{س}}}\right)\sqrt{\text{س}}\,.\,\text{د س}$

الحل

$\int \left(\text{س}\sqrt{\text{س}} + 2\sqrt{\text{س}} - \frac{1}{2\sqrt{\text{س}}}\right)\sqrt{\text{س}}\,.\,\text{د س} = \int \left(\text{س}^2+2\text{س}-\frac{1}{2}\right).\,\text{د س}$

$= \frac{1}{3}\text{س}^3 + \text{س}^2 - \frac{1}{2}\text{س} + \text{جـ}$

---

١٥ جد $\int (\sqrt{\text{س}}+2)(\sqrt{\text{س}}-3)\,.\,\text{د س}$

الحل

$\int (\sqrt{\text{س}}+2)(\sqrt{\text{س}}-3)\,.\,\text{د س} = \int (\text{س}-\sqrt{\text{س}}-6)\,.\,\text{د س} = \int (\text{س}-\text{س}^{\frac{1}{2}}-6)\,.\,\text{د س}$

$= \frac{1}{2}\text{س}^2 - \frac{2}{3}\text{س}^{\frac{3}{2}} - 6\text{س} + \text{جـ} = \frac{1}{2}\text{س}^2 - \frac{2}{3}\sqrt{\text{س}^3} - 6\text{س} + \text{جـ}$

١٦ جد $\int (س + \frac{١}{س})(\sqrt{س} - \frac{١}{\sqrt{س}})(\sqrt{س} + \frac{١}{\sqrt{س}})$. د س

الحل

$\int (س + \frac{١}{س})(\sqrt{س} - \frac{١}{\sqrt{س}})(\sqrt{س} + \frac{١}{\sqrt{س}})$. د س $= \int (س + \frac{١}{س})(س - \frac{١}{س})$. د س

$= \int (س^٢ - \frac{١}{س^٢})$. د س $= \int (س^٢ - س^{-٢})$. د س $= \frac{١}{٣} س^٣ + \frac{١}{س} +$ جـ

---

١٧ جد $\int \frac{(٤ س^٢ - ٤ س + ١)}{\sqrt[٣]{٢ س - ١}}$. د س

الحل

$\int \frac{(٤ س^٢ - ٤ س + ١)}{\sqrt[٣]{٢ س - ١}}$. د س $= \int \frac{(٢ س - ١)(٢ س - ١)}{(٢ س - ١)^{\frac{١}{٣}}} = \int (٢ س - ١)^{\frac{٥}{٣}}$. د س

$= \frac{٣}{١٦} (٢ س - ١)^{\frac{٨}{٣}} +$ جـ $= \frac{٣}{١٦} \sqrt[٣]{(٢ س - ١)^٨} +$ جـ

---

١٨ جد $\int (س \sqrt{س} - ٨)(\sqrt{س} - ٢)^{-١}$. د س

الحل

$\int (س \sqrt{س} - ٨)(\sqrt{س} - ٢)^{-١}$. د س $= \int \frac{س^{\frac{٣}{٢}} - ٨}{س^{\frac{١}{٢}} - ٢}$. د س $= \int \frac{(س^{\frac{١}{٢}})^٣ - ٨}{س^{\frac{١}{٢}} - ٢}$. د س

$= \int \frac{(س^{\frac{١}{٢}} - ٢)(س + ٢ س^{\frac{١}{٢}} + ٤)}{س^{\frac{١}{٢}} - ٢}$. د س $= \int (س + ٢ س^{\frac{١}{٢}} + ٤)$. د س

$= \frac{١}{٢} س^٢ + \frac{٤}{٣} س^{\frac{٣}{٢}} + ٤ س +$ جـ $= \frac{١}{٢} س^٢ + \frac{٤}{٣} \sqrt{س^٣} + ٤ س +$ جـ

---

١٩ جد $\int س \sqrt[٣]{\frac{١}{س^٣} - \frac{١}{س^٢}}$. د س

الحل

$\int س \sqrt[٣]{\frac{١}{س^٣} - \frac{١}{س^٢}}$. د س $= \int \sqrt[٣]{س^٣ (\frac{١}{س^٣} - \frac{١}{س^٢})}$. د س $= \int \sqrt[٣]{١ - س}$. د س

$= \int (١ - س)^{\frac{١}{٣}}$. د س $= \frac{-٣ (١ - س)^{\frac{٤}{٣}}}{٤} +$ جـ $= \frac{-٣ \sqrt[٣]{(١ - س)^٤}}{٤} +$ جـ

---

٢٠ جد $\int س^٨ (\frac{١}{س} + \frac{٢}{س^٢})^٤$. د س

الحل

$\int س^٨ (\frac{١}{س} + \frac{٢}{س^٢})^٤$. د س $= \int (س^٢)^٤ (\frac{١}{س} + \frac{٢}{س^٢})^٤$. د س $= \int (س^٢ (\frac{١}{س} + \frac{٢}{س^٢}))^٤$. د س

$= \int (س + ٢)^٤$. د س $= \frac{١}{٥} (س + ٢)^٥ +$ جـ

٢١ جد $\int \frac{\text{د س}}{\sqrt[٥]{٢\text{س} + ٩}}$

الحل

$$\int \frac{\text{د س}}{\sqrt[٥]{٢\text{س} + ٩}} = \int (٢\text{س} + ٩)^{\frac{-١}{٥}} \,.\, \text{د س} = \frac{٥}{٨} (٢\text{س} + ٩)^{\frac{٤}{٥}} + \text{جـ} = \frac{٥}{٨} \sqrt[٥]{(٢\text{س} + ٩)^{٤}} + \text{جـ}$$

---

٢٢ جد $\int \frac{٤\text{س}^{٣} - ٩\text{س}^{٢}}{٢\sqrt{\text{س}} - ٣} \,.\, \text{د س}$

الحل

$$\int \frac{٤\text{س}^{٣} - ٩\text{س}^{٢}}{٢\sqrt{\text{س}} - ٣} \,.\, \text{د س} = \int \frac{\text{س}^{٢}(٤\text{س} - ٩)}{٢\sqrt{\text{س}} - ٣} \,.\, \text{د س} = \int \frac{\text{س}^{٢}(٢\sqrt{\text{س}} + ٣)(٢\sqrt{\text{س}} - ٣)}{٢\sqrt{\text{س}} - ٣} \,.\, \text{د س}$$

$$= \int \text{س}^{٢}(٢\sqrt{\text{س}} + ٣) \,.\, \text{د س} = \int (٢\text{س}^{\frac{٥}{٢}} + ٣\text{س}^{٢}) \,.\, \text{د س} = \frac{٤}{٧}\text{س}^{\frac{٧}{٢}} + \text{س}^{٣} + \text{جـ}$$

$$= \frac{٤}{٧}\sqrt{\text{س}^{٧}} + \text{س}^{٣} + \text{جـ}$$

---

٢٣ جد $\int \frac{\text{س}^{٢} + ٦\text{س} + ٥}{(\text{س} + ١)^{٥}} \,.\, \text{د س}$

الحل

$$\int \frac{\text{س}^{٢} + ٦\text{س} + ٥}{(\text{س} + ١)^{٥}} \,.\, \text{د س} = \int \frac{(\text{س} + ١)(\text{س} + ٥)}{(\text{س} + ١)^{٥}} \,.\, \text{د س} = \int (\text{س} + ٥)(\text{س} + ١)^{-٤} \,.\, \text{د س}$$

$$= \int ((\text{س} + ١) + ٤)(\text{س} + ١)^{-٤} \,.\, \text{د س} = \int \left((\text{س} + ١)^{-٣} + ٤(\text{س} + ١)^{-٤}\right) \,.\, \text{د س}$$

$$= \frac{(\text{س} + ١)^{-٢}}{-٢} + \frac{٤(\text{س} + ١)^{-٣}}{-٣} + \text{جـ} = \frac{-١}{٢(\text{س} + ١)^{٢}} + \frac{-٤}{٣(\text{س} + ١)^{٣}} + \text{جـ}$$

---

٢٤ جد $\int \frac{(١ - \text{س})^{٢}}{\text{س}\sqrt{\text{س}}} \,.\, \text{د س}$

الحل

$$\int \frac{(١ - \text{س})^{٢}}{\text{س}\sqrt{\text{س}}} \,.\, \text{د س} = \int \frac{(١ - ٢\text{س} + \text{س}^{٢})}{\text{س}^{\frac{٣}{٢}}} \,.\, \text{د س} = \int (١ - ٢\text{س} + \text{س}^{٢})\, \text{س}^{\frac{-٣}{٢}} \,.\, \text{د س}$$

$$= \int \left(\text{س}^{\frac{-٣}{٢}} - ٢\text{س}^{\frac{-١}{٢}} + \text{س}^{\frac{١}{٢}}\right) \text{د س} = -٢\text{س}^{\frac{-١}{٢}} - ٤\text{س}^{\frac{١}{٢}} + \frac{٢}{٣}\text{س}^{\frac{٣}{٢}} + \text{جـ} = \frac{-٢}{\sqrt{\text{س}}} - ٤\sqrt{\text{س}} + \frac{٢}{٣}\sqrt{\text{س}^{٣}} + \text{جـ}$$

---

٢٥ جد $\int \text{س} \sqrt{\frac{٢}{\text{س}^{٢}} - \frac{٣}{\text{س}}} \,.\, \text{د س}$ ، س > صفر

الحل

$$\int \text{س} \sqrt{\frac{٢}{\text{س}^{٢}} - \frac{٣}{\text{س}}} \,.\, \text{د س} = \int \sqrt{\text{س}^{٢}\left(\frac{٢}{\text{س}^{٢}} - \frac{٣}{\text{س}}\right)} \,.\, \text{د س} = \int \sqrt{٢ - ٣\text{س}} \,.\, \text{د س}$$

$$= \int (٢ - ٣\text{س})^{\frac{١}{٢}} \,.\, \text{د س} = \frac{-٢}{٩}(٢ - ٣\text{س})^{\frac{٣}{٢}} + \text{جـ} = \frac{-٢}{٩}\sqrt{(٢ - ٣\text{س})^{٣}} + \text{جـ}$$

٢٦ جد $\int \frac{٤ س}{\sqrt{س+١} + \sqrt{٥ س+١}} . د س$

الحل

$\int \frac{٤ س}{\sqrt{س+١} + \sqrt{٥ س+١}} . د س = \int \frac{٤ س}{\sqrt{س+١} + \sqrt{٥ س+١}} . \frac{\sqrt{س+١} - \sqrt{٥ س+١}}{\sqrt{س+١} - \sqrt{٥ س+١}} . د س$

$= \int \frac{٤ س (\sqrt{س+١} - \sqrt{٥ س+١})}{(س+١) - (٥ س+١)} . د س = \int \frac{٤ س (\sqrt{س+١} - \sqrt{٥ س+١})}{-٤ س} . د س$

$= \int ((٥ س+١)^{\frac{١}{٢}} - (س+١)^{\frac{١}{٢}}) . د س$

$= \frac{٢}{١٥} (٥ س+١)^{\frac{٣}{٢}} - \frac{٢}{٣} (س+١)^{\frac{٣}{٢}} + جـ = \frac{٢}{١٥} \sqrt{(٥ س+١)^٣} - \frac{٢}{٣} \sqrt{(س+١)^٣} + جـ$

---

٢٧ جد $\int \frac{-٣}{٩ س^٢ - ٣ س + \frac{١}{٤}} . د س$

الحل

$\int \frac{-٣}{٩ س^٢ - ٣ س + \frac{١}{٤}} . د س = \int \frac{-٣}{(٣ س - \frac{١}{٢})^٢} . د س = \int -٣ (٣ س - \frac{١}{٢})^{-٢} . د س$

$= \frac{-٣ (٣ س - \frac{١}{٢})^{-١}}{-٣} + جـ = \frac{١}{٣ س - \frac{١}{٢}} + جـ$

---

٢٨ جد $\int س \sqrt{\pi س} . د س$

الحل

$\int س \sqrt{\pi س} . د س = \int س \sqrt{\pi} \sqrt{س} . د س = \sqrt{\pi} \int س^{\frac{٣}{٢}} . د س$

$= \frac{٢ \sqrt{\pi}}{٥} س^{\frac{٥}{٢}} + جـ = \frac{٢ \sqrt{\pi}}{٥} \sqrt{س^٥} + جـ$

تذكر

$ظا س = \frac{جا س}{جتا س}$	$ظتا س = \frac{جتا س}{جا س} = \frac{١}{ظا س}$	$قا س = \frac{١}{جتا س}$	$قتا س = \frac{١}{جا س}$

- $جا^٢ س + جتا^٢ س = ١$
- $١ + ظا^٢ س = قا^٢ س$
- $١ + ظتا^٢ س = قتا^٢ س$
- $جا (٢ س) = ٢ جا س جتا س$
- $جتا ٢ س = جتا^٢ س - جا^٢ س$
  $= ٢ جتا^٢ س - ١$
  $= ١ - ٢ جا^٢ س$
- $ظا ٢ س = \frac{٢ ظا س}{١ - ظا^٢ س}$
- $جا - س = - جا س$
- $جتا - س = جتا س$
- $ظا - س = - ظا س$

جتا^{٢}س = $\frac{١}{٢}$ (١ + جتا (٢س))

جا^{٢}س = $\frac{١}{٢}$ (١ - جتا(٢س))

---

٢٩ جد ∫ جا^{٢}س . د س

الحل: ∫ جا^{٢}س . د س = ∫ $\frac{١}{٢}$ (١ - جتا (٢س)) د س = $\frac{١}{٢}$ (س - $\frac{١}{٢}$ جا(٢س)) + جـ

---

٣٠ جد ∫ جتا^{٢}(٥س) د س

الحل: ∫ جتا^{٢} (٥س) د س = ∫ $\frac{١}{٢}$ (١ + جتا (١٠س)) . د س = $\frac{١}{٢}$ (س + $\frac{١}{١٠}$ جا (١٠س)) + جـ

---

٣١ جد ∫ ظا^{٢}س . د س

الحل: ∫ ظا^{٢}س . د س = ∫ (قا^{٢}س − ١) . د س = ظا س − س + جـ

---

٣٢ جد ∫ ظتا^{٢}(٧س) . د س

الحل: ∫ ظتا^{٢} (٧س) . د س = ∫ (قتا^{٢} (٧س) − ١) . د س = $\frac{-١}{٧}$ ظتا(٧س) − س + جـ

---

٣٣ جد ∫ $\frac{\text{د س}}{\text{١ - جا س}}$

الحل: ∫ $\frac{\text{د س}}{\text{١ - جا س}}$ = ∫ $\frac{١}{\text{١ - جا س}}$. $\frac{\text{١ + جا س}}{\text{١ + جا س}}$. د س = ∫ $\frac{\text{١ + جا س}}{\text{١ − جا}^{٢}\text{س}}$. د س

= ∫ $\frac{\text{١ + جا س}}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}$. د س = ∫ ($\frac{١}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}$ + $\frac{\text{جا س}}{\text{جتا س جتا س}}$) . د س = ∫ (قا^{٢}س + ظا س قا س) د س

= ظا س + قا س + جـ

---

٣٤ جد ∫ جا^{٢}(٣ س + ١) . د س

الحل: ∫ جا^{٢}(٣ س + ١) . د س = ∫ $\frac{١}{٢}$ (١ - جتا(٢(٣س + ١))) . د س

= ∫ $\frac{١}{٢}$ (١ - جتا (٦س + ٢)) . د س = $\frac{١}{٢}$ (س - $\frac{١}{٦}$ جا (٦س + ٢)) + جـ

---

٣٥ جد ∫ $\frac{\text{١ + جا}^{٢}\text{س}}{\text{١ − جا}^{٢}\text{س}}$. د س

الحل: ∫ $\frac{\text{١ + جا}^{٢}\text{س}}{\text{١ − جا}^{٢}\text{س}}$. د س = ∫ $\frac{\text{١ + جا}^{٢}\text{س}}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}$. د س = ∫ (قا^{٢}س + ظا^{٢}س) . د س

= ∫ (قا^{٢}س + قا^{٢}س − ١) . د س = ∫ (٢ قا^{٢}س − ١) . د س = ٢ ظا س − س + جـ

---

٣٦ جد ∫ قا س (ظا س + جتا س) . د س

الحل: ∫ قا س (ظا س + جتا س) . د س = ∫ (قا س ظا س + ~~قا س جتا س~~ ١) . د س = قا س + س + جـ

٣٧ جد $\int$ (قا س + جتا س)^{2} . د س

الحل

$\int$ (قا س + جتا س)^{2} . د س = $\int$ (قا^{2}س + ٢ قا س جتا س + جتا^{2}س) . د س

= $\int$ (قا^{2}س + ٢ + $\frac{1}{2}$ + $\frac{1}{2}$ جتا(٢س)) . د س = $\int$ (قا^{2}س + $\frac{5}{2}$ + $\frac{1}{2}$ جتا(٢س)) . د س

= ظا س + $\frac{5}{2}$ س + $\frac{1}{4}$ جا(٢س) + جـ

---

٣٨ جد $\int$ (جتا^{2}س − جا^{2} (٢س)) . د س

الحل

$\int$ (جتا^{2}س − جا^{2} (٢س)) . د س = $\int$ ($\frac{1}{2}$ + $\frac{1}{2}$ جتا (٢س) − ($\frac{1}{2}$ − $\frac{1}{2}$ جتا (٤س))) . د س

= $\int$ ($\frac{1}{2}$ جتا(٢س) + $\frac{1}{2}$ جتا (٤س)) . د س = $\frac{1}{4}$ جا (٢س) + $\frac{1}{8}$ جا (٤س) + جـ

---

٣٩ جد $\int$ (جا(٣س) جتا س - جتا (٣س) جا س) . د س

تذكر

جا (س ± ص) = جا س جتا ص ± جتا س جا ص

الحل

$\int$ (جا(٣س) جتا س - جتا (٣س) جا س) . د س

= $\int$ جا (٣س - س) . د س = $\int$ جا(٢س) . د س = $\frac{-1}{2}$ جتا(٢س) + جـ

---

٤٠ جد $\int$ (قا^{2}س + ظا^{2} (٢س)) . د س

الحل

$\int$ (قا^{2}س + ظا^{2} (٢س)) . د س = $\int$ (قا^{2}س + قا^{2} (٢س) − ١) . د س = ظا س + $\frac{1}{2}$ ظا(٢س) − س + جـ

---

٤١ جد $\int \frac{\text{قا س}}{\text{جتا س}}$. د س

الحل

$\int \frac{\text{قا س}}{\text{جتا س}}$. د س = $\int$ قا^{2}س . د س = ظا س + جـ

---

٤٢ جد $\int \frac{\text{جا(٢س)}}{\text{جتا س}}$. د س

الحل

$\int \frac{\text{جا (٢س)}}{\text{جتا س}}$. د س = $\int \frac{\text{٢ جا س جتا س}}{\text{جتا س}}$. د س = $\int$ ٢ جا س . د س = - ٢ جتا س + جـ

---

٤٣ جد $\int \frac{\text{د س}}{\text{١ + جتا (٢س)}}$

الحل

$\int \frac{\text{د س}}{\text{١ + جتا (٢س)}}$ = $\int \frac{\text{د س}}{\text{١ + ٢ جتا}^{2}\text{س - ١}}$ = $\frac{1}{2}$ $\int$ قا^{2}س . د س = $\frac{1}{2}$ ظا س + جـ

---

٤٤ جد $\int$ (جتا^{4}س - جا^{4}س) . د س

الحل

$\int$ (جتا^{4}س - جا^{4}س) . د س = $\int$ (جتا^{2}س - جا^{2}س) (جتا^{2}س + جا^{2}س) . د س

= $\int$ (جتا^{2}س - جا^{2}س) . د س = $\int$ جتا (٢س) . د س = $\frac{1}{2}$ جا (٢س) + جـ

٤٥ جد ∫ قا^٢ س جا^٢ س . د س

الحل
∫ قا^٢ س جا^٢ س . د س = ∫ (١ / جتا^٢ س) . جا^٢ س . د س = ∫ ظا^٢ س . د س = ∫ (قا^٢ س _ ١) . د س
= ظا س - س + جـ

---

٤٦ جد ∫ (قا س + ظا س)^٢ . د س

الحل
∫ (قا س + ظا س)^٢ . د س = ∫ (قا^٢ س + ٢ قا س ظا س + ظا^٢ س) . د س
= ∫ (قا^٢ س + ٢ قا س ظا س + قا^٢ س _ ١) . د س = ∫ (٢ قا^٢ س + ٢ قا س ظا س _ ١) . د س
= ٢ ظا س + ٢ قا س - س + جـ

---

٤٧ جد ∫ (ظا س + ظتا س)^٢ . د س

الحل
∫ (ظا س + ظتا س)^٢ . د س = ∫ (ظا^٢ س + ٢ ~~ظا س ظتا س~~ (١) + ظتا^٢ س) . د س
= ∫ (قا^٢ س + قتا^٢ س) . د س = ظا س _ ظتا س + جـ

---

٤٨ جد ∫ (١ _ جا($\frac{٣س}{٢}$))^٢ . د س

الحل
∫ (١ _ جا($\frac{٣س}{٢}$))^٢ . د س = ∫ (١ - ٢ جا($\frac{٣س}{٢}$) + جا^٢ ($\frac{٣س}{٢}$)) . د س
= ∫ (١ - ٢ جا ($\frac{٣س}{٢}$) + $\frac{١}{٢}$ (١ - جتا(٣س))) . د س = ∫ ($\frac{٣}{٢}$ _ ٢ جا ($\frac{٣س}{٢}$) _ $\frac{١}{٢}$ جتا (٣س)) . د س
= $\frac{٣}{٢}$ س + $\frac{٤}{٣}$ جتا ($\frac{٣س}{٢}$) _ $\frac{١}{٦}$ جا (٣س) + جـ

---

٤٩ جد ∫ (١ + جتا س)^٢ . د س

الحل
∫ (١ + جتا س)^٢ . د س = ∫ (١ + ٢ جتا س + جتا^٢ س) . د س
= ∫ (١ + ٢ جتا س + $\frac{١}{٢}$ (١ + جتا (٢س))) . د س = ∫ ($\frac{٣}{٢}$ + ٢ جتا س + $\frac{١}{٢}$ جتا (٢س)) . د س
= $\frac{٣}{٢}$ س + ٢ جا س + $\frac{١}{٤}$ جا (٢س) + جـ

---

٥٠ جد ∫ ٤ جا^٤ س . د س

الحل
∫ ٤ جا^٤ س . د س = ∫ (٢ جا^٢ س)^٢ . د س = ∫ (١ - جتا (٢ س))^٢ . د س
= ∫ (١ - ٢ جتا(٢س) + جتا^٢ (٢س)) . د س = ∫ (١ - ٢ جتا(٢س) + $\frac{١}{٢}$ (١ + جتا (٤س))) . د س
= ∫ ($\frac{٣}{٢}$ _ ٢ جتا(٢س) + $\frac{١}{٢}$ جتا (٤س)) . د س = $\frac{٣}{٢}$ س _ جا (٢س) + $\frac{١}{٨}$ جا (٤س) + جـ

---

٥١ جد ∫ ((١ - ظا س)^٢ + ٢ ظا س) . د س

الحل
∫ ((١ - ظا س)^٢ + ٢ ظا س) . د س = ∫ (١ - ٢ ظا س + ظا^٢ س + ٢ ظا س) . د س
= ∫ (١ + ظا^٢ س) . د س = ∫ قا^٢ س . د س = ظا س + جـ

٥٢ جد $\int \frac{\text{جا}^{3}\text{س} + \text{جتا}^{3}\text{س}}{\text{جا س} + \text{جتا س}} \text{ . د س}$

الحل

$\int \frac{\text{جا}^{3}\text{س} + \text{جتا}^{3}\text{س}}{\text{جا س} + \text{جتا س}} \text{ . د س} = \int \frac{(\text{جا س} + \text{جتا س})(\text{جا}^{2}\text{س} - \text{جا س جتا س} + \text{جتا}^{2}\text{س})}{\text{جا س} + \text{جتا س}} \text{ . د س}$

($\text{جا}^{2}\text{س} + \text{جتا}^{2}\text{س} = ١$)

$= \int (١ - \text{جا س جتا س}) \text{ . د س} = \int (١ - \frac{١}{٢}\text{جا}(٢\text{س}))\text{ . د س} = \text{س} + \frac{١}{٤}\text{جتا}(٢\text{س}) + \text{جـ}$

---

٥٣ جد $\int \frac{١ - \text{جتا}^{3}\text{س}}{\text{جا}^{2}(٢\text{س})} \text{ . د س}$

الحل

$\int \frac{١ - \text{جتا}^{3}\text{س}}{\text{جا}^{2}(٢\text{س})} \text{ . د س} = \int \frac{\text{د س}}{\text{جا}^{2}(٢\text{س})} - \int \frac{\text{جتا}^{3}\text{س}}{\text{جا}^{2}(٢\text{س})} \text{ . د س}$

$= \int \text{قتا}^{2}(٢\text{س})\text{ . د س} - \int \frac{\text{جتا}^{3}\text{س}}{٤\,\text{جا}^{2}\text{س جتا}^{2}\text{س}} \text{ . د س} = \frac{-١}{٢}\text{ظتا}(٢\text{س}) - \int \frac{\text{جتا س}}{٤\,\text{جا}^{2}\text{س}} \text{ . د س}$

$= \frac{-١}{٢}\text{ظتا}(٢\text{س}) - \frac{١}{٤}\int \text{ظتا س قتا س . د س} = \frac{-١}{٢}\text{ظتا}(٢\text{س}) + \frac{١}{٤}\text{قتا س} + \text{جـ}$

---

٥٤ جد $\int \frac{\text{د س}}{\text{جا}^{2}\text{س} - \text{جا}^{4}\text{س}}$

$\text{جا}(٢\text{س}) = ٢\,\text{جا س جتا س}$
$\text{جا}^{2}(٢\text{س}) = ٤\,\text{جا}^{2}\text{س جتا}^{2}\text{س}$

الحل

$\int \frac{\text{د س}}{\text{جا}^{2}\text{س} - \text{جا}^{4}\text{س}} = \int \frac{\text{د س}}{\text{جا}^{2}\text{س}(١ - \text{جا}^{2}\text{س})} = \int \frac{\text{د س}}{\text{جا}^{2}\text{س جتا}^{2}\text{س}} = \int \frac{٤}{\text{جا}^{2}(٢\text{س})} \text{ . د س}$

$= \int ٤\,\text{قتا}^{2}(٢\text{س})\text{ . د س} = -٢\,\text{ظتا}(٢\text{س}) + \text{جـ}$

---

٥٥ جد $\int \frac{٥ - \text{جا}^{2}\text{س}}{\text{ظا}^{2}\text{س}} \text{ . د س}$

الحل

$\int \frac{٥ - \text{جا}^{2}\text{س}}{\text{ظا}^{2}\text{س}} \text{ . د س} = \int (\frac{٥}{\text{ظا}^{2}\text{س}} - \frac{\text{جا}^{2}\text{س}}{\text{ظا}^{2}\text{س}})\text{ . د س} = \int (٥\,\text{ظتا}^{2}\text{س} - \text{جتا}^{2}\text{س})\text{ . د س}$

$= \int (٥(\text{قتا}^{2}\text{س} - ١) - \frac{١}{٢}(١ + \text{جتا}(٢\text{س})))\text{ . د س} = \int (٥\,\text{قتا}^{2}\text{س} - \frac{١١}{٢} - \frac{١}{٢}\text{جتا}(٢\text{س}))\text{ . د س}$

$= -٥\,\text{ظتا س} - \frac{١١}{٢}\text{س} - \frac{١}{٤}\text{جا}(٢\text{س}) + \text{جـ}$

---

٥٦ جد $\int (\text{جتا}(١٢\text{س})\,\text{جتا}(١٠\text{س}) + \text{جا}(١٢\text{س})\,\text{جا}(١٠\text{س}))\text{ . د س}$

الحل

$\text{جتا}(\text{س} \pm \text{ص}) = \text{جتا س جتا ص} \mp \text{جا س جا ص}$

$\int (\text{جتا}(١٢\text{س})\,\text{جتا}(١٠\text{س}) + \text{جا}(١٢\text{س})\,\text{جا}(١٠\text{س}))\text{ . د س}$

$= \int \text{جتا}(١٢\text{س} - ١٠\text{س})\text{ . د س} = \int \text{جتا}(٢\text{س})\text{ . د س} = \frac{١}{٢}\text{جا}(٢\text{س}) + \text{جـ}$

---

٥٧ جد $\int (\text{جتا}(\frac{٣}{٤}\text{س})\,\text{جتا}(\frac{١}{٤}\text{س}) - \text{جا}(\frac{٣}{٤}\text{س})\,\text{جا}(\frac{١}{٤}\text{س}))\text{ . د س}$

الحل

$= \int \text{جتا}(\frac{٣}{٤}\text{س} + \frac{١}{٤}\text{س})\text{ . د س} = \int \text{جتا س . د س} = \text{جا س} + \text{جـ}$

٥٨ جد $\int \frac{\text{جتا}(٢\text{س})}{\text{جتا س} + \text{جا س}} \, . \, \text{د س}$

الحل

$\int \frac{\text{جتا}(٢\text{س})}{\text{جتا س} + \text{جا س}} \, . \, \text{د س} = \int \frac{\text{جتا}^٢\text{س} - \text{جا}^٢\text{س}}{\text{جتا س} + \text{جا س}} \, . \, \text{د س}$

$= \int \frac{(\text{جتا س} - \text{جا س})(\text{جتا س} + \text{جا س})}{\text{جتا س} + \text{جا س}} \, . \, \text{د س} = \int (\text{جتا س} - \text{جا س}) \, . \, \text{د س}$

$= \text{جا س} + \text{جتا س} + \text{جـ}$

---

٥٩ جد $\int ٨ \, \text{جا}^٢(\frac{\text{س}}{٢}) \, \text{جتا}^٢(\frac{\text{س}}{٢}) \, . \, \text{د س}$

> $\text{جا}(٢\text{س}) = ٢ \, \text{جا س جتا س}$
>
> $\text{جا س} = \text{جا}(٢ \, . \, \frac{\text{س}}{٢}) = ٢ \, \text{جا}(\frac{\text{س}}{٢}) \, \text{جتا}(\frac{\text{س}}{٢})$

الحل

$\int ٨ \, \text{جا}^٢(\frac{\text{س}}{٢}) \, \text{جتا}^٢(\frac{\text{س}}{٢}) \, . \, \text{د س} = ٢ \int (٢ \, \text{جا}(\frac{\text{س}}{٢}) \, \text{جتا}(\frac{\text{س}}{٢}))^٢ \, . \, \text{د س} = \int ٢ \, \text{جا}^٢\text{س} \, . \, \text{د س}$

$= \int ٢ \, (\frac{١}{٢}) (١ - \text{جتا}(٢\text{س})) \, . \, \text{د س} = \int (١ - \text{جتا}(٢\text{س})) \, . \, \text{د س} = \text{س} - \frac{١}{٢} \, \text{جا}(٢\text{س}) + \text{جـ}$

---

٦٠ جد $\int \text{جا}(٣\text{س}) \, \text{قتا س} \, . \, \text{د س}$

الحل

$\int \text{جا}(٣\text{س}) \, \text{قتا س} \, . \, \text{د س} = \int \frac{\text{جا}(٣\text{س})}{\text{جا س}} \, . \, \text{د س} = \int \frac{\text{جا}(٢\text{س} + \text{س})}{\text{جا س}} \, . \, \text{د س}$

$= \int \frac{\text{جا}(٢\text{س}) \, \text{جتا س} + \text{جتا}(٢\text{س}) \, \text{جا س}}{\text{جا س}} \, . \, \text{د س} = \int \frac{٢ \, \text{جا س جتا س جتا س} + \text{جتا}(٢\text{س}) \, \text{جا س}}{\text{جا س}} \, . \, \text{د س}$

$= \int \frac{\text{جا س} \, (٢ \, \text{جتا}^٢\text{س} + \text{جتا}(٢\text{س}))}{\text{جا س}} \, . \, \text{د س} = \int (٢ \, \text{جتا}^٢\text{س} + \text{جتا}(٢\text{س})) \, . \, \text{د س}$

$= \int (٢ \, . \, \frac{١}{٢} (١ + \text{جتا}(٢\text{س})) + \text{جتا}(٢\text{س})) \, . \, \text{د س} = \int (١ + ٢ \, \text{جتا}(٢\text{س})) \, \text{د س} = \text{س} + \text{جا}(٢\text{س}) + \text{جـ}$

---

٦١ جد $\int \frac{\text{جتا}(٣\text{س})}{\text{جتا س}} \, . \, \text{د س}$

الحل

$\int \frac{\text{جتا}(٣\text{س})}{\text{جتا س}} \, . \, \text{د س} = \int \frac{\text{جتا}(\text{س} + ٢\text{س})}{\text{جتا س}} \, . \, \text{د س} = \int \frac{\text{جتا س جتا}(٢\text{س}) - \text{جا س جا}(٢\text{س})}{\text{جتا س}} \, . \, \text{د س}$

$= \int \frac{\text{جتا س جتا}(٢\text{س}) - \text{جا س} \, . \, (٢ \, \text{جا س جتا س})}{\text{جتا س}} \, . \, \text{د س} = \int \frac{\text{جتا س} \, (\text{جتا}(٢\text{س}) - ٢ \, \text{جا}^٢\text{س})}{\text{جتا س}} \, . \, \text{د س}$

$= \int (\text{جتا}(٢\text{س}) - ٢ \, \text{جا}^٢\text{س}) \, . \, \text{د س} = \int (\text{جتا}(٢\text{س}) - ٢ \, (\frac{١}{٢})(١ - \text{جتا}(٢\text{س}))) \, . \, \text{د س}$

$= \int (٢ \, \text{جتا}(٢\text{س}) - ١) \, . \, \text{د س}$

$= \text{جا}(٢\text{س}) - \text{س} + \text{جـ}$

تذكر

جا (أ س) . جتا (ب س) = $\frac{1}{2}$ (جا ((أ + ب) س) + جا ((أ - ب) س))

جا (أ س) . جا (ب س) = $\frac{1}{2}$ (جتا ((أ - ب) س) - جتا ((أ + ب) س))

جتا (أ س) . جتا (ب س) = $\frac{1}{2}$ (جتا ((أ - ب) س) + جتا ((أ + ب) س))

* تستخدم المتطابقات أعلاه في إيجاد التكاملات كما في الأمثلة الاتية :

٦٢ جد $\int$ جا (٢س) جتا (٣ س) . د س

جا (- س)= - جا س

الحل $\int$ جا (٢س) جتا (٣ س) . د س = $\frac{1}{2}$ $\int$ (جا ((٢ + ٣) س) + جا((٢ - ٣) س)) . د س

= $\frac{1}{2}$ $\int$ (جا (٥س) - جا س) . د س = $\frac{1}{2}$ ($\frac{-1}{5}$ جتا (٥س) + جتا س) + جـ

---

٦٣ جد $\int$ جا (π س) . جتا (٢π س) . دس

الحل = $\frac{1}{2}$ $\int$ (جا ((π + ٢π) س) + جا ((π - ٢π) س)) . د س

= $\frac{1}{2}$ $\int$ (جا (٣π س) + جا (- π س)) . دس = $\frac{-1}{6\pi}$ جتا (٣π س) + $\frac{1}{2\pi}$ جتا (π س) + جـ

---

٦٤ جد $\int$ جتا $\frac{س}{3}$ جتا $\frac{س}{2}$. د س

جتا - س = جتا س

الحل $\int$ جتا $\frac{س}{3}$ جتا $\frac{س}{2}$. د س = $\frac{1}{2}$ $\int$ (جتا ($\frac{س}{3}$ - $\frac{س}{2}$) + جتا ($\frac{س}{3}$ + $\frac{س}{2}$)) . د س

= $\frac{1}{2}$ $\int$ (جتا $\frac{-س}{6}$ + جتا $\frac{5س}{6}$) . د س = $\frac{1}{2}$ (٦ جا $\frac{س}{6}$ + $\frac{6}{5}$ جا $\frac{5س}{6}$) + جـ

---

٦٥ جد $\int$ جا $\frac{5س}{2}$ جا $\frac{س}{2}$. د س

الحل $\int$ جا $\frac{5س}{2}$ جا $\frac{س}{2}$. د س = $\frac{1}{2}$ $\int$ (جتا ($\frac{5}{2}$ - $\frac{1}{2}$) س - جتا ($\frac{5}{2}$ + $\frac{1}{2}$) س) . د س

= $\frac{1}{2}$ $\int$ (جتا ٢س - جتا ٣س). د س = $\frac{1}{4}$ جا ٢س - $\frac{1}{6}$ جا ٣س + جـ

---

٦٦ إذا كان أ ، ب عددين صحيحين موجبين فأثبت أن :

$\int$ جا أ س . جا ب س . د س = { $\frac{جا (أ - ب) س}{٢ (أ - ب)}$ - $\frac{جا (أ + ب) س}{٢ (أ + ب)}$ + جـ عندما أ ≠ ب ؛ $\frac{س}{2}$ - $\frac{جا ٢أ س}{٤ أ}$ + جـ عندما أ = ب }

الحل

١) افرض أ ≠ ب

$\int$ جا أ س . جا ب . دس = $\frac{1}{2}$ $\int$ (جتا (أ - ب) س - جتا (أ + ب) س) . د س

= $\frac{جا (أ - ب) س}{٢ (أ - ب)}$ - $\frac{جا (أ + ب) س}{٢ (أ + ب)}$ + جـ

٢) افرض أ = ب

$\int$ جا أ س . جا ب س . د س = $\int$ جا^2 أ س . د س = $\frac{1}{2}$ $\int$ (١ - جتا ٢ أ س) . د س

= $\frac{1}{2}$ (س - $\frac{1}{2أ}$ جا ٢ أ س) + جـ = $\frac{س}{2}$ - $\frac{جا ٢أ س}{٤ أ}$ + جـ

جتا س جتا ٢س = $\frac{١}{٢}$ (جتا ٣س + جتا س)

٦٧ جد $\int$ جتا س . جتا ٢س . جتا ٣س . د س

الحل $\int$ جتا س . جتا ٢س . جتا ٣س . د س = $\frac{١}{٢}$ $\int$ (جتا ٣س + جتا س) جتا ٣س . د س

= $\frac{١}{٢}$ $\int$ جتا^٢ ٣س . د س + $\frac{١}{٢}$ $\int$ جتا س جتا ٣س . د س

= $\frac{١}{٤}$ $\int$ (١ + جتا ٦س) . د س + $\frac{١}{٤}$ $\int$ (جتا ٤س + جتا ٢س) . د س

= $\frac{١}{٤}$ س + $\frac{١}{٢٤}$ جا ٦س + $\frac{١}{١٦}$ جا ٤س + $\frac{١}{٨}$ حا ٢س + جـ

قاعدة ١: $\int$ قً (س) . د س = قَ (س) + جـ

قاعدة ٢: $\int$ قَ (س) . د س = ق (س) + جـ

تعلم أنه إذا كانت ص = ق (س) هي معادلة منحنى قابل للاشتقاق، فإن ميل المماس له عند أي نقطة (س، ص) تقع عليه = $\frac{د ص}{د س}$ = قَ(س) . وعلى ذلك تكون معادلة المنحنى هي: ق (س) = $\int$ قَ(س) . د س

---

٦٨ جد قاعدة الاقتران ق الذي يمر بنقطة الأصل وميل المماس عند أي نقطة عليه يساوي (جا س - جتا س)^٢.

الحل قَ(س) = (حا س - جتا س)^٢ ⟵ ق (س) = $\int$ (حا س - جتا س)^٢ . د س

ق (س) = $\int$ (حا^{٢}س - ٢ جا س جتا س + جتا^{٢}س) . د س = $\int$ (١ - جا ٢س). د س

ق (س) = س + $\frac{١}{٢}$ جتا ٢س + جـ

* ق (س) يمر بنقطة الأصل ⟵ ٠ = ٠ + $\frac{١}{٢}$ جتا ٠ + جـ ⟵ جـ = $\frac{-١}{٢}$

∴ ق (س) = س + $\frac{١}{٢}$ جتا ٢س − $\frac{١}{٢}$

---

٦٩ جد قاعدة الاقتران ق الذي يمر منحناه بالنقطة (١، -١) وحاصل ضرب ميل المماس له عند أي نقطة عليه (س ،ص) في مربع الإحداثي السيني لهذه النقطة يساوي ٢

الحل س^٢ . قَ (س) = ٢ ⟵ قَ (س) = $\frac{٢}{س^٢}$ ⟵ ق (س) = $\int$ $\frac{٢}{س^٢}$. د س = $\int$ ٢ س$^{-٢}$. د س

⟵ ق (س) = $\frac{-٢}{س}$ + جـ

المنحنى يمر بالنقطة (١، - ١) ⟵ - ١ = $\frac{-٢}{١}$ + جـ ⟵ جـ = ١

∴ ق (س) = $\frac{-٢}{س}$ + ١

---

٧٠ جد قاعدة الاقتران ق الذي يمر منحناه بالنقطة (٢، ٥) وميل العمودي عليه عند أي نقطة (س ،ص) تقع عليه يساوي $\frac{-١}{٣}$ س^٢.

الحل ميل العمودي = $\frac{-١}{٣}$ س^٢ ⟵ ميل المماس = قَ (س) = $\frac{٣}{س^٢}$

ق (س) = $\int$ $\frac{٣}{س^٢}$. د س = $\int$ ٣ س$^{-٢}$. د س = $\frac{-٣}{س}$ + جـ

المنحنى يمر بالنقطة (٢، ٥) ⟵ ٥ = $\frac{-٣}{٢}$ + جـ ⟵ جـ = $\frac{١٣}{٢}$

∴ ق (س) = $\frac{-٣}{س}$ + $\frac{١٣}{٢}$

٧١ إذا كان ميل المماس لمنحنى ق عند أي نقطة (س، ص) تقع عليه يساوي أ (٢س - ١) (حيث أ ثابت) فجد معادلة هذا المنحنى علما بأنه يمر بالنقطتين (٢، -٢)، (٣، ٢) .

الحل

ق (س) = $\int$ قَ (س) . د س ⟵ ق (س) = $\int$ أ (٢ س - ١) . د س = أ (س^{٢} - س) + جـ

* المنحنى يمر بالنقطة (٢، -٢) ⟵ -٢ = أ (٢^{٢} - ٢) + جـ ⟵ -٢ = ٢ أ + جـ . . . ①

* المنحنى يمر بالنقطة (٣، ٢) ⟵ ٢ = أ (٣^{٢} - ٣) + جـ ⟵ ٢ = ٦ أ + جـ . . . ②

وبحل النظام المكون من ①، ② : أ = ١، جـ = -٤ ∴ ق (س) = س^{٢} - س - ٤

---

٧٢ إذا كان ميل المماس لمنحنى ق عند النقطة (٠، ١) يساوي ٢، وإذا كان ق (٠) = ١ . فجد معادلة هذا المنحنى علما بأن قً (س) = س + جتا س .

الحل

قَ (س) = $\int$ قً (س) . د س = $\int$ (س + جتا س). د س = $\frac{س^{٢}}{٢}$ + جا س + جـ$_{١}$

لكن قَ (٠) = ٢ ⟵ ٢ = $\frac{(٠)^{٢}}{٢}$ + جا ٠ (صفر) + جـ$_{١}$ ⟵ جـ$_{١}$ = ٢ ∴ قَ (س) = $\frac{س^{٢}}{٢}$ + جا س + ٢

ق (س) = $\int$ قَ (س) . د س = $\int$ ($\frac{س^{٢}}{٢}$ + جا س + ٢). د س = $\frac{س^{٣}}{٦}$ - جتا س + ٢ س + جـ$_{٢}$

لكن ق(٠) = ١ ⟵ ١ = $\frac{(٠)^{٣}}{٦}$ - جتا ٠ (١) + ٢ (٠) + جـ$_{٢}$ ⟵ جـ$_{٢}$ = ٢

∴ ق (س) = $\frac{س^{٣}}{٦}$ - جتا س + ٢س + ٢

التكامل المحدود

تعريف

التكامل المحدود للاقتران قَ في الفترة [أ، ب] هو : $\int_{أ}^{ب}$ قَ (س) . د س = ق (ب) ـ ق (أ)

يسمى أ : الحد السفلي للتكامل المحدود ، ب : الحد العلوي للتكامل المحدود

ويرمز للمقدار (ق (ب) - ق (أ)) بالرمز ق (س) $]_{أ}^{ب}$

وإذا أمكن إيجاد قيمة $\int_{أ}^{ب}$ قَ (س) . د س فإننا نقول : إن قَ قابل للتكامل على [أ، ب]

مثال إذا كان ق كثير حدود من الدرجة الثالثة وكان ق (١) = - ٢، ق (٣) = - ١٤ فجد $\int_{١}^{٣}$ قَ (س) . د س

الحل $\int_{١}^{٣}$ قَ (س) . د س = ق (س) $]_{١}^{٣}$ = ق (٣) - ق (١) = - ١٤ - ⁻٢ = - ١٢

مثال جد $\int_{-\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٤}}$ قا س ظا س . د س

الحل $\int_{-\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٤}}$ قا س ظا س . د س = قا س $]_{-\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٤}}$ = قا ($\frac{\pi}{٤}$) - قا ($-\frac{\pi}{٤}$) = $\sqrt{٢}$ ـ $\sqrt{٢}$ = صفرا

مثال جد $\int_{\cdot}^{\sqrt{3}} \frac{د}{د س} (\sqrt{1 + س^2}) \, . د س$

الحل $\int_{\cdot}^{\sqrt{3}} \frac{د}{د س} (\sqrt{1 + س^2}) . د س = \left[\sqrt{1 + س^2} \right]_{\cdot}^{\sqrt{3}} = (\sqrt{1 + (\sqrt{3})^2}) - (\sqrt{1 + (\cdot)^2}) = 1$

مثال جد $\frac{د}{د س} \int_{\cdot}^{\frac{\pi}{2}} جا^3 س . د س$

الحل $\frac{د}{د س} \int_{\cdot}^{\frac{\pi}{2}} جا^3 س . د س$ = صفرا

$\int_{\cdot}^{\frac{\pi}{2}} جا^3 س . د س$ = ثابت

خصائص التكامل المحدود

تعريف إذا كان أ عددا حقيقيا في مجال الاقتران ق فإن : $\int_{أ}^{أ} ق (س) . د س$ = صفرا

مثال $\int_{3}^{3} س^7 . د س$ = صفرا ، $\int_{1}^{1} \frac{د س}{1 + س^2}$ = صفرا ، $\int_{5}^{5} 11^{100} . د س$ = صفرا

تعريف إذا كان الاقتران ق قابلا للتكامل على الفترة [أ ، ب] فإن :

$\int_{أ}^{ب} ق (س) . د س = - \int_{ب}^{أ} ق (س) . د س$

مثال إذا علمت أن $\int_{\cdot}^{1} \sqrt{1 - س^2} . د س = \frac{\pi}{4}$ ، فجد $\int_{1}^{\cdot} \sqrt{1 - س^2} . د س$

الحل $\int_{1}^{\cdot} \sqrt{1 - س^2} . د س = - \int_{\cdot}^{1} \sqrt{1 - س^2} . د س = \frac{-\pi}{4}$

خاصية 1 إذا كان جـ عددا حقيقيا ثابتا فإن : $\int_{أ}^{ب}$ جـ . د س = جـ (ب - أ)

مثال $\int_{-5}^{1} \sqrt{2} . د س = \sqrt{2} (1 - ^{-}5) = 6 \sqrt{2}$

مثال $\int_{\cdot}^{\pi}$ جتا ص . د س (حيث ص زاوية ثابتة) = جتا ص (π - ٠) = π جتا ص

مثال إذا كان $\int_{\cdot}^{أ^2}$ أ . د س = أ + 6، فجد قيمة أ (حيث أ عدد حقيقي)

الحل $\int_{\cdot}^{أ^2}$ أ . د س = أ + 6 ⟵ أ ($أ^2$ - ٠) = أ + 6 ⟵ $أ^3$ - أ - 6 = ٠

بالتخمين 2 حل للمعادلة $أ^3$ - أ - 6 = ٠ ⟵ (أ - 2) من عوامل $أ^3$ - أ - 6

وباستخدام القسمة التركيبية (أ - 2) ($أ^2$ + 2 أ + 3) = ٠

عبارة تربيعية مميزها سالب (لا تحلل)

∴ أ = 2

جذر المقسوم عليه

معاملات المقسوم

2	1	٠	-1	-6
		2	4	6
	1	2	3	٠

مثال إذا كان $\int_{1+جا أ}^{1-جا أ} 2 \, . دس = \sqrt{12}$ ، فما أصغر قيمة موجبة للعدد أ ؟

الحل $\int_{1+جا أ}^{1-جا أ} 2 \, . دس = \sqrt{12} \longrightarrow 2\,((1 - جا أ) - (1 + جا أ)) = \sqrt{12} \longrightarrow -4 \, جا أ = \sqrt{12}$

$\longrightarrow جا أ = \frac{\sqrt{12}}{-4} = \frac{2\sqrt{3}}{-4} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \longrightarrow أ = \frac{5\pi}{3} + 2\pi ن$ ، $أ = \frac{4\pi}{3} + 2\pi ن$ (ن عدد صحيح)

∴ أصغر قيمة موجبة للعدد أ $= \frac{4\pi}{3}$

خاصية ٢

إذا كان ق قابلا للتكامل على الفترة [أ، ب]، جـ عدد حقيقي فإن :

$\int_{أ}^{ب} جـ . ق(س) . دس = جـ \int_{أ}^{ب} ق(س) . دس$

خاصية ٣

إذا كانت $ق_1$، $ق_2$، $ق_3$، . . . ، $ق_ن$ قابلة للتكامل على الفترة [أ، ب] فإن :

$\int_{أ}^{ب} \left(ق_1(س) \pm ق_2(س) \pm ق_3(س) \pm \dots \pm ق_ن(س) \right) . دس$

$= \int_{أ}^{ب} ق_1(س) . دس \pm \int_{أ}^{ب} ق_2(س) . دس \pm \int_{أ}^{ب} ق_3(س) . دس \pm \dots \pm \int_{أ}^{ب} ق_ن(س) . دس$

مثال إذا علمت أن $\int_{0}^{3} س . دس = \frac{9}{2}$ ، $\int_{0}^{3} س^2 . دس = 9$ ، فجد قيمة $\int_{0}^{3} (2س^2 - س) . دس$

الحل $\int_{0}^{3} (2س^2 - س) . دس = \int_{0}^{3} 2س^2 . دس - \int_{0}^{3} س . دس = 2 \int_{0}^{3} س^2 . دس - \int_{0}^{3} س . دس$

$= 2\,(9) - \frac{9}{2} = \frac{27}{2}$

خاصية ٤

إذا كان ق قابلا للتكامل على الفترة [أ، ب] فإنه لأي جـ ∈ (أ، ب) يكون :

$\int_{أ}^{ب} ق(س) . دس = \int_{أ}^{جـ} ق(س) . دس + \int_{جـ}^{ب} ق(س) . دس$ وتبقى الخاصية صحيحة حتى لو كانت جـ خارج الفترة .

ملاحظة : تستخدم الخاصية ٤ في إيجاد تكامل الاقتران المتشعب واقتران القيمة المطلقة و اقتران أكبر عدد صحيح .

مثال إذا كان $\int_{1}^{-2} ق(س) . دس = -2$ ، $\int_{3}^{1} ق(س) . دس = 6$ ، فجد $\int_{3}^{-2} ق(س) . دس$

الحل $\int_{3}^{-2} ق(س) . دس = \int_{3}^{1} ق(س) . دس + \int_{1}^{-2} ق(س) . دس = 6 + (-2) = 4$

مثال ليكن $ق(س) = \begin{cases} جا س ، & \pi \le س < \frac{3\pi}{2} \\ جتا س ، & \frac{3\pi}{2} \le س \le 2\pi \end{cases}$ ، جد $\int_{\pi}^{2\pi} ق(س) . دس$

الحل $\int_{\pi}^{2\pi} ق(س) . دس = \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} جا س . دس + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} جتا س . دس = -جتا س \Big]_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} + جا س \Big]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}$

$= -جتا\left(\frac{3\pi}{2}\right) - -جتا(\pi) + جا(2\pi) - جا\left(\frac{3\pi}{2}\right)$

$= -(0) + (-1) + (0) - (-1) = 0$

مثال جد $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} |\frac{1}{2} - جتا س|$. د س

$\frac{1}{2} - جتا س$ ، جتا س $- \frac{1}{2}$ ؛ إشارة: $- - -$ من 0 إلى $\frac{\pi}{3}$ ، $+ + + + +$ من $\frac{\pi}{3}$ إلى $\frac{\pi}{2}$

الحل

$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} |\frac{1}{2} - جتا س|$. د س $= \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} (جتا س - \frac{1}{2})$. د س $+ \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (\frac{1}{2} - جتا س)$ د س

$= (جا س - \frac{1}{2} س) \Big]_{0}^{\frac{\pi}{3}} + (\frac{1}{2} س - جا س) \Big]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$

$= (جا (\frac{\pi}{3}) - \frac{1}{2} (\frac{\pi}{3})) - (جا ٠ - \frac{1}{2} (٠)) + (\frac{1}{2} (\frac{\pi}{2}) - جا \frac{\pi}{2}) - (\frac{1}{2} (\frac{\pi}{3}) - جا \frac{\pi}{3})$

$= \sqrt{3} - \frac{\pi}{12} - 1$

مثال جد $\int_{-1}^{2} \sqrt{2 + |س|}$. د س

$|س| =$ { $-س$ من -1 إلى 0 ، $س$ من 0 إلى 2 }

الحل

$\int_{0}^{2} \sqrt{2 + |س|}$. د س $= \int_{0}^{2} \sqrt{2 + س}$. د س $= \int_{0}^{2} (2 + س)^{\frac{1}{2}}$. د س

$= \frac{2}{3} (2 + س)^{\frac{3}{2}} \Big|_{0}^{2} = \frac{2}{3} \sqrt{(2 + س)^3} \Big|_{0}^{2}$

$= \frac{2}{3} \left(\sqrt{(2+2)^3} - \sqrt{(2+0)^3} \right)$

$= \frac{2}{3} \left(8 - \sqrt{8} \right)$

مثال جد $\int_{1}^{5} [3 - \frac{1}{2} س]$. د س

$[3 - \frac{1}{2} س] =$ (خط أعداد: 2 ، 1 ، صفر فوق الفترات؛ ٠ ، 2 ، 4 ، 6 ، 1 ، 5)

الحل

$\int_{1}^{5} [3 - \frac{1}{2} س]$. د س $= \int_{1}^{2} 2$. د س $+ \int_{2}^{4} 1$. د س $+ \int_{4}^{5}$ صفر . د س

$= 2 (2 - 1) + 1 (4 - 2) +$ صفر $(5 - 4) = 4$

قاعدة التعويض (الإستبدال) لإجراء التكامل

* تستخدم هذه القاعدة لإجراء التكامل لاقتران مركب كما في الأمثلة الاتية :

مع ملاحظة أن : $\int_{أ}^{ب} ق(س)$. د س $= \int_{أ}^{ب} ق(ص)$. د ص $= \int_{أ}^{ب} ق(ع)$. د ع $= \ldots\ldots$.

مثال إذا كان $\int_{1}^{4} ق(س)$. د س $= 5$ ، فجد $\int_{0}^{1} ق(3 س + 1)$. د س

الحل

افرض ص $= 3$ س $+ 1$ ← $\frac{د ص}{د س} = 3$ ← د س $= \frac{د ص}{3}$

غير حدود التكامل لتصبح بدلالة ص : س $= 1$ ← ص $= 3 (1) + 1 = 4$ ، س $= ٠$ ← ص $= 3 (٠) + 1 = 1$

$\int_{0}^{1} ق(3 س + 1)$. د س $= \int_{1}^{4} ق(ص) . \frac{1}{3}$ د ص $= \frac{1}{3} \int_{1}^{4} ق(ص)$. د ص $= \frac{1}{3} (5) = \frac{5}{3}$

مثال إذا كان $\int_{0}^{4}$ ق (س) . د س = ١ ، فجد $\int_{-2}^{0}$ س . ق ($س^2$) . د س

الحل

(ص = $س^2$ ← $\frac{د ص}{د س}$ = ٢ س ← د س = $\frac{د ص}{٢ س}$

س = -٢ ← ص = $(-٢)^2$ = ٤ ، س = ٠ ← ص = $(٠)^2$ = ٠)

$\int_{-2}^{0}$ س . ق ($س^2$) . د س = $\int_{4}^{0}$ س . ق (ص) . $\frac{د ص}{٢ س}$ = $\frac{١}{٢}$ $\int_{4}^{0}$ ق (ص) . د ص = $\frac{١}{٢}$ (- ١) = $\frac{-١}{٢}$

الحركة في خط مستقيم

* عند دراسة المسائل المتعلقة بحركة الأجسام في خط مستقيم فإنه من الضروري تحديد :

١) محور الحركة . ٢) نقطة مرجع ثابتة .

٣) الاتجاهات الموجبة والسالبة .(الأمثلة المعروضه في هذا الكتاب تم فرض الاتجاهات الموجبة لليمين وللأعلى)

* تعلم أنه إذا تحرك جسم في خط مستقيم وكان اقتران الموضع له ف (ن) فإن :
سرعته اللحظية ع(ن) = ف َ(ن) ، وتسارعه اللحظي ت(ن) = ع َ(ن)

وعليه فإن : ف (ن) = $\int$ ع (ن) . د ن ، ع (ن) = $\int$ ت (ن) . د ن

* وتكون إزاحة الجسم في الفترة الزمنية [$ن_1$ ، $ن_2$] = $\int_{ن_1}^{ن_2}$ ع (ن) . د ن = $\int_{ن_1}^{ن_2}$ ف َ (ن) . د ن = ف ($ن_2$) - ف ($ن_1$)

والمسافة الكلية التي يقطعها الجسم في الفترة الزمنية [$ن_1$ ، $ن_2$] = $\int_{ن_1}^{ن_2}$ | ع (ن) | . د ن

مثال يتحرك جسيم على محور السينات وتعطى سرعته عند أي لحظة ن بالعلاقة :
ع (ن) = ٦ $ن^2$ - ٦ وحدة / ثانية . فإذا كان موضع الجسيم الابتدائي وحدتين إلى يسار الصفر
جد : ١) موضع الجسيم عندما ن = (٣) ثوان .
٢) جد إزاحة الجسيم في الفترة الزمنية [٠ ، ٣] .
٣) جد المسافة الكلية التي يقطعها الجسيم في الفترة الزمنية [٠ ، ٣] .

الحل



(١) ف (ن) = $\int$ ع (ن) . د ن = $\int$ (٦ $ن^2$ - ٦) . د ن = ٢ $ن^3$ - ٦ ن + جـ

لكن ف (٠) = - ٢ ← - ٢ = ٠ + جـ ← جـ = - ٢

∴ ف (ن) = ٢ $ن^3$ - ٦ ن - ٢ ← ف (٣) = ٢ $(٣)^3$ - ٦ (٣) - ٢ = ٣٤

عندما ن = ٣ ثوان يكون الجسيم على بعد ٣٤ وحدة إلى يمين الصفر .

(٢) إزاحة الجسيم في [٠ ، ٣] = ف (٣) - ف (٠) = ٣٤ - - ٢ = ٣٦ وحدة

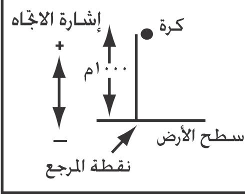
(٣) المسافة الكلية التي يقطعها الجسيم في [٠ ، ٣]

= $\int_{0}^{3}$ | ع (ن) | . د ن = $\int_{0}^{3}$ | ٦ $ن^2$ - ٦ | . د ن = $\int_{0}^{1}$ (٦ - ٦ $ن^2$) . د ن + $\int_{1}^{3}$ (٦ $ن^2$ - ٦) . د ن

= (٦ ن - ٢ $ن^3$) $\Big|_{0}^{1}$ + (٢ $ن^3$ - ٦ ن) $\Big|_{1}^{3}$

= (٦ (١) - ٢ $(١)^3$) - (٦ (٠) - ٢ $(٠)^3$) + (٢ $(٣)^3$ - ٦ (٣)) - (٢ $(١)^3$ - ٦ (١)) = ٤٤ وحدة

مثال أسقطت كرة من السكون من ارتفاع ١٠٠٠ م عن سطح الأرض وبتسارع مقداره $^{-}$١٠ م / ث^{٢}، جد سرعة الكرة وهي على ارتفاع ٦٨٠ مترا من سطح الأرض.



في هذا المثال الأرض تمثل سطح الإسناد واتجاه الحركة الموجب للأعلى

الحل **المعطيات** : ع (٠) = ٠ م / ث، ف (٠) = ١٠٠٠ م ، ت(ن) = $^{-}$١٠ م / ث^{٢}

ع (ن) = $\int$ ت (ن) . د ن = $\int$ -١٠ . د ن = - ١٠ ن + جـ$_{١}$

لكن ع(٠) = ٠ ⟵ - ١٠ (٠) + جـ$_{١}$ = ٠ ⟵ جـ$_{١}$ = ٠

∴ ع (ن) = - ١٠ ن م / ث

ف (ن) = $\int$ ع (ن) . د ن = $\int$ - ١٠ ن . د ن = - ٥ ن^{٢} + جـ$_{٢}$

لكن ف (٠) = ١٠٠٠ ⟵ - ٥ (٠)^{٢} + جـ$_{٢}$ = ١٠٠٠ ⟵ جـ$_{٢}$ = ١٠٠٠

∴ ف (ن) = - ٥ ن^{٢} + ١٠٠٠

* ف (ن) = - ٥ ن^{٢} + ١٠٠٠ = ٦٨٠ ⟵ ن^{٢} = ٦٤ ⟵ ن = ٨ ، ن = - ٨ ✗ (مرفوض. لا يوجد زمن سالب)

ع (٨) = - ١٠ (٨) = $^{-}$٨٠ م / ث (سرعة الكرة ٨٠ م / ث باتجاه الأسفل)

خاصية ٥

إذا كان الاقتران ق قابلا للتكامل على الفترة [أ ، ب] ويحقق ق(س) ≥ ٠ لكل س ∈ [أ ، ب] فإن : $\int_{أ}^{ب}$ ق (س) . د س ≥ صفرا

خاصية ٦

إذا كان الاقتران ق قابلا للتكامل على الفترة [أ ، ب] ويحقق ق(س) ≤ ٠ لكل س ∈ [أ ، ب] فإن : $\int_{أ}^{ب}$ ق (س) . د س ≤ صفرا

مثال دون حساب التكامل ما إشارة $\int_{-٢}^{٢} \frac{\text{س}^{٣} - ٩}{|\text{س}| + ١}$. د س ؟

الحل افرض ق (س) = $\frac{\text{س}^{٣} - ٩}{|\text{س}| + ١}$

ابحث إشارة البسط : س^{٣} - ٩ = ٠ ⟵ س = $\sqrt[٣]{٩}$

- - - - | + + + + (عند $\sqrt[٣]{٩}$)

∴ س^{٣} - ٩ < ٠ ، لكل س ∈ [-٢ ، ٢]، إشارة البسط سالبة

ابحث إشارة المقام : |س| + ١ > ٠ ، لكل س ∈ [-٢ ، ٢]، إشارة المقام موجبة

⟵ ق (س) < ٠

بما أن ق (س) < ٠ لكل س ∈ [-٢ ، ٢] ∴ $\int_{-٢}^{٢}$ ق (س) . د س < ٠ وهذا يعني أن إشارة التكامل سالبة

سؤال أي من التكاملات الاتية له إشارة موجبة ؟

١) $\int_{٢}^{٣} \frac{\sqrt{\text{س}}}{١ - \text{س}}$. د س

٢) $\int_{٠}^{٤} \frac{\text{س}^{٢}}{٣ - \text{جتا س}}$. د س

٣) $\int_{-٣}^{-١} \frac{\text{س}^{٤}}{\sqrt{٣} - \text{س}}$. د س

٤) $\int_{\pi}^{٢\pi}$ جا س . د س

٥) $\int_{٠}^{١} \frac{-١٧}{\text{س}^{٢} + ١}$. د س

٦) $\int_{-٢}^{٥}$ |٣س - ٧| . د س

الجواب : ٢ ، ٣ ، ٦

خاصية ٧

افرض ق اقترانا متصلا على الفترة [أ ، ب] ، فإن ق على الفترة [أ ، ب] له قيمة صغرى مطلقة ل وقيمة عظمى مطلقة ك، وتتحقق المتباينة :

$$\int_{أ}^{ب} ل \cdot د س \leqslant \int_{أ}^{ب} ق(س) \cdot د س \leqslant \int_{أ}^{ب} ك \cdot د س$$

مثال إذا كان ق متصلا على [-٢، ٤] وكانت القيمة الصغرى المطلقة للاقتران ق هي -١ والقيمة العظمى المطلقة للاقتران ق هي ٥ فجد م ،ن بحيث : $م \leqslant \int_{-٢}^{٤} ق(س) \cdot د س \leqslant ن$

الحل $-١ \leqslant ق(س) \leqslant ٥$ ، لكل $س \in [-٢، ٤]$

$$\int_{-٢}^{٤} -١ \cdot د س \leqslant \int_{-٢}^{٤} ق(س) \cdot د س \leqslant \int_{-٢}^{٤} ٥ \cdot د س \longleftarrow -١(٤ - -٢) \leqslant \int_{-٢}^{٤} ق(س) \cdot د س \leqslant ٥(٤ - -٢)$$

$$\longleftarrow -٦ \leqslant \int_{-٢}^{٤} ق(س) \cdot د س \leqslant ٣٠ \longleftarrow م = -٦ ، ن = ٣٠$$

تذكر

خصائص المتباينات

إذا كانت أ، ب ،جـ أعدادا حقيقية فإن :

١) إذا كانت أ > ب و ب > جـ فإن : أ > جـ
٢) إذا كانت أ > ب فإن أ + جـ > ب + جـ

٣) إذا كانت أ > ب و جـ > ٠، فإن أ جـ > ب جـ
إذا كانت أ > ب و جـ < ٠، فإن أ جـ < ب جـ

٤) إذا كان ٠< أ < ب أو أ < ب < ٠ فإن : $\frac{١}{ب} < \frac{١}{أ}$

مثال بين أن : $\frac{١}{٦} \leqslant \int_{٠}^{٢} \frac{د س}{١٠ + س} \leqslant \frac{١}{٥}$

الحل $٠ \leqslant س \leqslant ٢ \longleftarrow ١٠ \leqslant ١٠ + س \leqslant ١٢ \longleftarrow \frac{١}{١٠} \geqslant \frac{١}{١٠ + س} \geqslant \frac{١}{١٢}$

$$\longleftarrow \int_{٠}^{٢} \frac{١}{١٠} \cdot د س \geqslant \int_{٠}^{٢} \frac{د س}{١٠ + س} \geqslant \int_{٠}^{٢} \frac{١}{١٢} \cdot د س \longleftarrow \frac{١}{١٠}(٢ - ٠) \geqslant \int_{٠}^{٢} \frac{د س}{١٠ + س} \geqslant \frac{١}{١٢}(٢ - ٠)$$

$$\longleftarrow \frac{١}{١٠}(٢ - ٠) \geqslant \int_{٠}^{٢} \frac{د س}{١٠ + س} \geqslant \frac{١}{١٢}(٢ - ٠) \longleftarrow \frac{١}{٦} \leqslant \int_{٠}^{٢} \frac{د س}{١٠ + س} \leqslant \frac{١}{٥}$$

تذكر الصورة القياسية لمعادلة الدائرة التي مركزها (د، هـ) وطول نصف قطرها يساوي (ر) هي :
$(س - د)^٢ + (ص - هـ)^٢ = ر^٢$

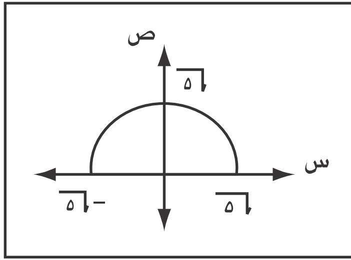
وعندما يكون المركز (٠، ٠) تصبح معادلة الدائرة $س^٢ + ص^٢ = ر^٢ \longleftarrow ص^٢ = ر^٢ - س^٢$

$\longleftarrow ص = \sqrt{ر^٢ - س^٢}$ ، $ص = -\sqrt{ر^٢ - س^٢}$

النصف العلوي لدائرة مركزها (٠، ٠) ونصف قطرها يساوي ر

النصف السفلي لدائرة مركزها (٠، ٠) ونصف قطرها يساوي ر

مثال بين أن : صفر $\leq \int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} \sqrt{5 - س^2}\ .\ د س \leq 10$



الحل افرض ق (س) = $\sqrt{5 - س^2}$ ، س ∈ $[-\sqrt{5} ، \sqrt{5}]$

التمثيل البياني لمنحنى ق هو النصف العلوي لدائرة مركزها (٠ ، ٠) ونصف قطرها $\sqrt{5}$ انظر الشكل المجاور

لاحظ أن ٠ $\leq$ ق (س) $\leq \sqrt{5}$ ، لكل س ∈ $[-\sqrt{5} ، \sqrt{5}]$

$\Leftarrow \int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} 0\ .\ د س \leq \int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} ق (س)\ .\ د س \leq \int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} \sqrt{5}\ .\ د س$

$\Leftarrow 0 (\sqrt{5} - -\sqrt{5}) \leq \int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} ق (س)\ .\ د س \leq \sqrt{5} (\sqrt{5} - -\sqrt{5}) \Leftarrow$ صفر $\leq \int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} ق (س)\ .\ د س \leq 10$

خاصية ٨

إذا كان ق، هـ اقترانين قابلين للتكامل على [أ ، ب] ، وكان ق (س) $\leq$ هـ (س) لجميع قيم س ∈ [أ ، ب] فإن : $\int_{أ}^{ب} ق (س)\ .\ د س \leq \int_{أ}^{ب} هـ (س)\ .\ د س$

مثال دون إجراء عملية التكامل بين أي التكاملين الاتيين أكبر .

$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} جا^2 س\ .\ د س$ ، $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} جا^{10} س\ .\ د س$

الحل ٠ $\leq$ جا س $\leq$ ١ ، لكل س ∈ $[0 ، \frac{\pi}{2}]$

إذا كانت ٠ < جـ < ١، أ، ب ∈ ط فإن : جـ^أ > جـ^ب ⟺ ب > أ
حيث ط : مجموعة الأعداد الطبيعية .

جا^{10}س $\leq$ جا^{2}س، لكل س ∈ $[0 ، \frac{\pi}{2}]$

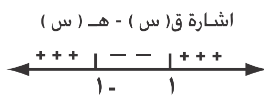
$\therefore \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} جا^{10} س\ .\ د س \leq \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} جا^2 س\ .\ د س$

مثال دون إجراء التكامل أثبت أن : $\int_{1}^{2} (3 س^2 + 4)\ .\ د س \leq \int_{1}^{2} (2 س^2 + 5)\ .\ د س$

الحل افرض ق (س) = ٣س^2 + ٤ ، س ∈ [١ ، ٢] ، هـ (س) = ٢س^2 + ٥ ، س ∈ [١ ، ٢]

ق (س) - هـ (س) = ٣ س^2 + ٤ - (٢ س^2 + ٥) = س^2 - ١

* ابحث اشارة ق(س) - هـ (س)



س^2 - ١ = صفرا $\Leftarrow$ (س - ١) (س + ١) = صفرا

$\Leftarrow$ س = ± ١

$\therefore$ ق (س) - هـ (س) $\leq$ صفرا ، لكل س ∈ [١ ، ٢]

$\Leftarrow$ ق (س) $\leq$ هـ (س) ، لكل س ∈ [١ ، ٢]

$\therefore \int_{1}^{2} (3 س^2 + 4)\ .\ د س \leq \int_{1}^{2} (2 س^2 + 5)\ .\ د س$

أمثلة متنوعة

مثال إذا كان $\int_{١}^{أ} |س - ٢| . د س = ٥$ فما قيمة أ ، حيث أ > ٢ ؟

الحل

$|س - ٢| =$ ٢ - س ـــ ٢ ـــ س - ٢

$\int_{١}^{أ} |س - ٢| . د س = \int_{١}^{٢} (٢ - س) . د س + \int_{٢}^{أ} (س - ٢) . د س = ٥$

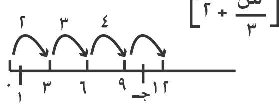
$\leftarrow \left(٢ س - \frac{س^٢}{٢}\right)\Big|_{١}^{٢} + \left(\frac{س^٢}{٢} - ٢ س\right)\Big|_{٢}^{أ} = ٥$

$\leftarrow \left(٢(٢) - \frac{٢^٢}{٢}\right) - \left(٢(١) - \frac{١^٢}{٢}\right) + \left(\frac{أ^٢}{٢} - ٢ أ\right) - \left(\frac{٢^٢}{٢} - ٢(٢)\right) = ٥$

$\leftarrow \frac{أ^٢}{٢} - ٢ أ - \frac{٥}{٢} = ٠ \leftarrow أ^٢ - ٤ أ - ٥ = ٠ \leftarrow (أ - ٥)(أ + ١) = ٠$

$\leftarrow$ أ = ٥ ، أ = -١ (مرفوض لأن أ > ٢)

مثال إذا كان $\int_{١}^{جـ} \left[\frac{س}{٣} + ٢\right] . د س = ٣٥$ ، فما قيمة جـ ، حيث جـ > ١ ؟



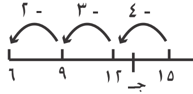
الحل

$\int_{١}^{جـ} \left[\frac{س}{٣} + ٢\right] . د س$

$= \int_{١}^{٣} ٢ . د س + \int_{٣}^{٦} ٣ . د س + \int_{٦}^{٩} ٤ . د س + \int_{٩}^{جـ} ٥ . د س = ٣٥$

$\leftarrow ٢(٣ - ١) + ٣(٦ - ٣) + ٤(٩ - ٦) + ٥(جـ - ٩) = ٣٥ \leftarrow جـ = ١١$

مثال إذا كان $\int_{جـ}^{٦} \left[١ - \frac{س}{٣}\right] . د س = ١٩$ ، فما قيمة جـ ، حيث جـ > ٦ ؟



الحل

$\int_{جـ}^{٦} \left[١ - \frac{س}{٣}\right] . د س = ١٩ \leftarrow \int_{٦}^{جـ} \left[١ - \frac{س}{٣}\right] . د س = -١٩$

$\leftarrow \int_{٦}^{٩} -٢ . د س + \int_{٩}^{١٢} -٣ . د س + \int_{١٢}^{جـ} -٤ . د س = -١٩$

$\leftarrow -٢(٩ - ٦) + -٣(١٢ - ٩) + -٤(جـ - ١٢) = -١٩ \leftarrow جـ = ١٣$

مثال إذا كان $\int_{.}^{٣} [س + ن] . د س = ٩$ ، فما قيمة ن ، حيث ن عدد طبيعي ؟

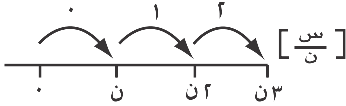
الحل

$\int_{.}^{٣} [س + ن] . د س = \int_{.}^{٣} ([س] + ن) . د س = \int_{.}^{٣} [س] . د س + \int_{.}^{٣} ن . د س = ٩$

$\leftarrow \int_{.}^{١} صفر . د س + \int_{١}^{٢} ١ . د س + \int_{٢}^{٣} ٢ . د س + ن(٣ - ٠) = ٩$

$\leftarrow ٠(١ - ٠) + ١(٢ - ١) + ٢(٣ - ٢) + ٣ ن = ٩ \leftarrow ن = ٢$

مثال جد $\int_{.}^{٣ن} \left[\frac{س}{ن}\right] . د س$ ، حيث ن عدد طبيعي .



الحل

$\int_{.}^{٣ن} \left[\frac{س}{ن}\right] . د س = \int_{.}^{ن} صفر . د س + \int_{ن}^{٢ن} ١ . د س + \int_{٢ن}^{٣ن} ٢ . د س$

$= ٠(ن - ٠) + ١(٢ ن - ن) + ٢(٣ ن - ٢ ن)$

$= ٣ ن$

مثال جد $\int_{0}^{\pi} \sqrt{1 + جتا\,2س}\ .\ د س$

$\sqrt{ق^2(س)} = |ق(س)|$

الحل

$|جتا س|$: جتا س من صفر إلى $\frac{\pi}{2}$ ، - جتا س من $\frac{\pi}{2}$ إلى π

$\int_{0}^{\pi} \sqrt{1 + جتا\,2س}\ .\ د س = \int_{0}^{\pi} \sqrt{1 + (2\,جتا^2 س - 1)}\ .\ د س = \sqrt{2} \int_{0}^{\pi} |جتا س|\ .\ د س$

$= \sqrt{2} \left(\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} جتا س\ .\ د س + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - جتا س\ .\ د س \right) = \sqrt{2} \left(جا س \Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} + - جا س \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \right)$

$= \sqrt{2} \left((جا \frac{\pi}{2} - جا 0) + (- جا \pi - - جا \frac{\pi}{2}) \right) = 2\sqrt{2}$

مثال جد $\int_{-3}^{0} |س^2 - 4س|\ .\ د س$

$|س^2 - 4س| =$: $س^2 - 4س$ قبل 0 ، $4س - س^2$ من 0 إلى 4 ، $س^2 - 4س$ بعد 4 (على خط الأعداد: -3 ، 0 ، 4)

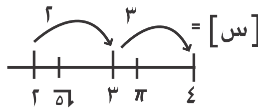
الحل

$\int_{-3}^{0} |س^2 - 4س|\ .\ د س = \int_{-3}^{0} (س^2 - 4س)\ .\ د س = \left(\frac{س^3}{3} - 2س^2 \right) \Big|_{-3}^{0}$

$= \left(\frac{(0)^3}{3} - 2(0)^2 \right) - \left(\frac{(-3)^3}{3} - 2(-3)^2 \right) = 27$

مثال جد $\int_{\sqrt{5}}^{\pi} [س]\ .\ د س$

$[س] =$



الحل

$\int_{\sqrt{5}}^{\pi} [س]\ .\ د س = \int_{\sqrt{5}}^{3} 2\ .\ د س + \int_{3}^{\pi} 3\ .\ د س = 2(3 - \sqrt{5}) + 3(\pi - 3) = 3\pi - 2\sqrt{5} - 3$

مثال جد $\int_{-2}^{2} ق(س)\ .\ د س$ ، حيث $ق(س) = \begin{cases} س + 2 & ،\ س < 0 \\ |س - 2| & ،\ س \geq 0 \end{cases}$

الحل

* $|س - 2| =$: $2 - س$ قبل 2 ، $س - 2$ بعد 2 $\longleftarrow$ $ق(س) = \begin{cases} س + 2 & ،\ س < 0 \\ 2 - س & ،\ 0 \leq س \leq 2 \\ س - 2 & ،\ س > 2 \end{cases}$

$\longleftarrow \int_{-2}^{2} ق(س)\ .\ د س = \int_{-2}^{0} (س + 2)\ .\ د س + \int_{0}^{2} (2 - س)\ .\ د س$

$= \left(\frac{س^2}{2} + 2س \right) \Big|_{-2}^{0} + \left(2س - \frac{س^2}{2} \right) \Big|_{0}^{2}$

$= \left(\frac{(0)^2}{2} + 2(0) \right) - \left(\frac{(-2)^2}{2} + 2(-2) \right) + \left(2(2) - \frac{(2)^2}{2} \right) - \left(2(0) - \frac{(0)^2}{2} \right) = 4$

مثال جد $\int_{-1}^{2} \left(12س^2 - \int_{0}^{1} 4ص\ .\ د ص \right)\ .\ د س$

الحل

$\int_{-1}^{2} \left(12س^2 - \int_{0}^{1} 4ص\ .\ د ص \right)\ .\ د س = \int_{-1}^{2} \left(12س^2 - (2ص^2 \Big|_{0}^{1}) \right)\ .\ د س$

$= \int_{-1}^{2} (12س^2 - 2)\ .\ د س$

$= (4س^3 - 2س) \Big|_{-1}^{2}$

$= 4(2)^3 - 2(2) - \left(4(-1)^3 - 2(-1) \right) = 30$

مثال إذا كان $\int_{1}^{2} (5\text{س}^4 - 3\int_{0}^{\text{جـ}} \text{ص}^2 \, \text{د ص}) \, \text{د س} = 4$ ، فما قيمة جـ ؟

الحل $3\int_{0}^{\text{جـ}} \text{ص}^2 \, \text{د ص} = \text{ص}^3 \Big|_{0}^{\text{جـ}} = (\text{جـ})^3 - (0)^3 = \text{جـ}^3$

$\leftarrow \int_{1}^{2} (5\text{س}^4 - \text{جـ}^3) \, \text{د س} = 4 \leftarrow (\text{س}^5 - \text{جـ}^3\text{س}) \Big|_{1}^{2} = 4$

$\leftarrow ((2)^5 - \text{جـ}^3(2)) - ((1)^5 - \text{جـ}^3(1)) = 4 \leftarrow \text{جـ}^3 = 27 \leftarrow \text{جـ} = 3$

مثال جد $\int_{-2}^{-1} \sqrt{4\text{س}^2 - 4\text{س} + 1} \, \text{د س}$

الحل

$\int_{-2}^{-1} \sqrt{4\text{س}^2 - 4\text{س} + 1} \, \text{د س} = \int_{-2}^{-1} \sqrt{(2\text{س} - 1)(2\text{س} - 1)} \, \text{د س} = \int_{-2}^{-1} \sqrt{(2\text{س} - 1)^2} \, \text{د س}$

$= \int_{-2}^{-1} |2\text{س} - 1| \, \text{د س}$

$= \int_{-2}^{-1} (1 - 2\text{س}) \, \text{د س} = (\text{س} - \text{س}^2) \Big|_{-2}^{-1}$

$= ((-1) - (-1)^2) - ((-2) - (-2)^2) = 4$

$|2\text{س} - 1| = $ $2\text{س} - 1$ | $1 - 2\text{س}$ (عند $\frac{1}{2}$)

مثال إذا كان $\int_{0}^{7} \text{ق(س)} \, \text{د س} = 14$ ، $\int_{0}^{3} \text{ق(س)} \, \text{د س} = 3$ ، $\int_{5}^{7} 3\text{ق(س)} \, \text{د س} = 15$ ،

فما قيمة : $\int_{3}^{5} (\text{ق(س)} + 5) \, \text{د س}$ ؟

$\int_{5}^{7} 3\text{ق(س)} \, \text{د س} = 15$

$\leftarrow \int_{5}^{7} \text{ق(س)} \, \text{د س} = 5$

الحل $\int_{3}^{5} (\text{ق(س)} + 5) \, \text{د س} = \int_{3}^{5} \text{ق(س)} \, \text{د س} + \int_{3}^{5} 5 \, \text{د س}$

$\Bigg(\int_{3}^{5} \text{ق(س)} \, \text{د س} = \int_{3}^{7} \text{ق(س)} \, \text{د س} + \int_{7}^{5} \text{ق(س)} \, \text{د س}$

$\int_{3}^{5} \text{ق(س)} \, \text{د س} = \int_{3}^{0} \text{ق(س)} \, \text{د س} + \int_{0}^{7} \text{ق(س)} \, \text{د س} + \int_{7}^{5} \text{ق(س)} \, \text{د س}$

$= -3 + 14 + -5 = 6 \Bigg)$

$\leftarrow \int_{3}^{5} (\text{ق(س)} + 5) \, \text{د س} = 6 + 5(5 - 3) = 16$

مثال إذا كان ق متصلا على ح وكان :

$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق(س)} \, \text{د س} - \int_{7}^{0} \text{ق(س)} \, \text{د س} = \int_{0}^{2} \text{ق(س)} \, \text{د س}$ فما قيمة أ، ب ؟

الحل

$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق(س)} \, \text{د س} - \int_{7}^{0} \text{ق(س)} \, \text{د س} = \int_{0}^{2} \text{ق(س)} \, \text{د س}$

$\leftarrow \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق(س)} \, \text{د س} = \int_{7}^{0} \text{ق(س)} \, \text{د س} + \int_{0}^{2} \text{ق(س)} \, \text{د س} = \int_{7}^{2} \text{ق(س)} \, \text{د س}$

$\therefore$ أ = 7، ب = 2

مثال إذا كان $\text{م}_1\text{(س)}$ ، $\text{م}_2\text{(س)}$ اقترانين بدائيين للاقتران المتصل ق وكان :

$\int_{-1}^{3} (\text{م}_2\text{(س)} - \text{م}_1\text{(س)}) \, \text{د س} = 16$ فما قيمة $\int_{4}^{9} (\text{م}_1\text{(س)} - \text{م}_2\text{(س)}) \, \text{د س}$ ؟

الحل

$\text{م}_2\text{(س)} - \text{م}_1\text{(س)} = \text{جـ}$ (ثابت)

$\int_{-1}^{3} (\text{م}_2\text{(س)} - \text{م}_1\text{(س)}) \, \text{د س} = 16 \leftarrow \text{جـ}(3 - -1) = 16 \leftarrow \text{جـ} = 4$

$\int_{4}^{9} (\text{م}_1\text{(س)} - \text{م}_2\text{(س)}) \, \text{د س} = \int_{4}^{9} -4 \, \text{د س} = -4(9 - 4) = -20$

مثال جد $\int_{1}^{3} \frac{|س - 2|}{[س]} \, د س$

الحل

$|س - 2| = \begin{cases} 2 - س & \\ س - 2 & \end{cases}$ (تتغير عند ٢)

$[س] = \begin{cases} 1 & 1 \le س < 2 \\ 2 & 2 \le س < 3 \end{cases}$

$\int_{1}^{3} \frac{|س - 2|}{[س]} \, د س = \int_{1}^{2} \frac{2 - س}{1} \, د س + \int_{2}^{3} \frac{س - 2}{2} \, د س$

$= \left(2س - \frac{س^2}{2}\right)\Big|_{1}^{2} + \left(\frac{س^2}{4} - س\right)\Big|_{2}^{3} = 2(2) - \frac{(2)^2}{2} - \left(2(1) - \frac{(1)^2}{2}\right) + \left(\frac{(3)^2}{4} - 3 - \left(\frac{(2)^2}{4} - 2\right)\right) = \frac{3}{4}$

مثال إذا كان $\int_{0}^{3} \frac{ق(س)}{2} \, د س = 5$ ، $\int_{0}^{3} (هـ(س) - 2س) \, د س = 3$

فجد: $\int_{3}^{0} (2ق(س) - هـ(س) - 1) \, د س$

الحل

$\int_{0}^{3} \frac{ق(س)}{2} \, د س = 5 \longleftarrow \int_{0}^{3} ق(س) \, د س = 10$

$\int_{0}^{3} (هـ(س) - 2س) \, د س = 3 \longleftarrow$

$\int_{0}^{3} هـ(س) \, د س - س^2\Big|_{0}^{3} = 3 \longleftarrow \int_{0}^{3} هـ(س) \, د س - \left((3)^2 - (0)^2\right) = 3 \longleftarrow \int_{0}^{3} هـ(س) \, د س = 12$

$\therefore \int_{3}^{0} (2ق(س) - هـ(س) - 1) \, د س = 2\int_{3}^{0} ق(س) \, د س - \int_{3}^{0} هـ(س) \, د س - \int_{3}^{0} 1 \, د س$

$= 2(-10) - (-12) - 1(0 - 3) = -5$

مثال إذا كان $\int_{2}^{-1} جـ \, ق(س) \, د س = -12$ ، $\int_{-1}^{2} (2ق(س) - 1) \, د س = 5$ ، **فما قيمة جـ ؟**

الحل

$\int_{2}^{-1} جـ \, ق(س) \, د س = -12 \longleftarrow \int_{-1}^{2} ق(س) \, د س = \frac{12}{جـ}$

$\int_{-1}^{2} (2ق(س) - 1) \, د س = 2\int_{-1}^{2} ق(س) \, د س - \int_{-1}^{2} 1 \, د س = 5$

$\longleftarrow 2\int_{-1}^{2} ق(س) \, د س - 1(2 - -1) = 5 \longleftarrow \int_{-1}^{2} ق(س) \, د س = 4$

$\longleftarrow \frac{12}{جـ} = 4 \longleftarrow جـ = 3$

مثال إذا كان $\int_{3}^{6} س \, ق(2س + 3) \, د س = 10$ ، **فما قيمة** $\int_{1}^{4} (2س + 4) \, ق(2س + 7) \, د س$ ؟

الحل

$\int_{3}^{6} س \, ق(2س + 3) \, د س = 10$

افرض $ص = 2س + 3 \longleftarrow \frac{د ص}{د س} = 2 \longleftarrow د س = \frac{د ص}{2}$

$ص = 2س + 3 \longleftarrow س = \frac{ص - 3}{2}$

$س = 3 \longleftarrow ص = 9$ ، $س = 6 \longleftarrow ص = 15$

$\int_{3}^{6} س \, ق(2س + 3) \, د س = \frac{1}{4}\int_{9}^{15} (ص - 3) \, ق(ص) \, د ص = 10 \longleftarrow \int_{9}^{15} (ص - 3) \, ق(ص) \, د ص = 40$

* $\int_{1}^{4} (2س + 4) \, ق(2س + 7) \, د س$

افرض $م = 2س + 7 \longleftarrow \frac{د م}{د س} = 2 \longleftarrow د س = \frac{د م}{2}$

$م = 2س + 7 \longleftarrow س = \frac{م - 7}{2}$

$\int_{1}^{4} (2س + 4) \, ق(2س + 7) \, د س = \frac{1}{2}\int_{9}^{15} (م - 3) . ق(م) . د م = \frac{1}{2}(40) = 20$

مثال إذا كان ق (س) = $\begin{cases} ٢ - س &، س < ١ \\ س^٣ &، س \geq ١ \end{cases}$ ، فجد $\int_{١}^{٢} ($ق(س) - ق (س-١)$)$. د س

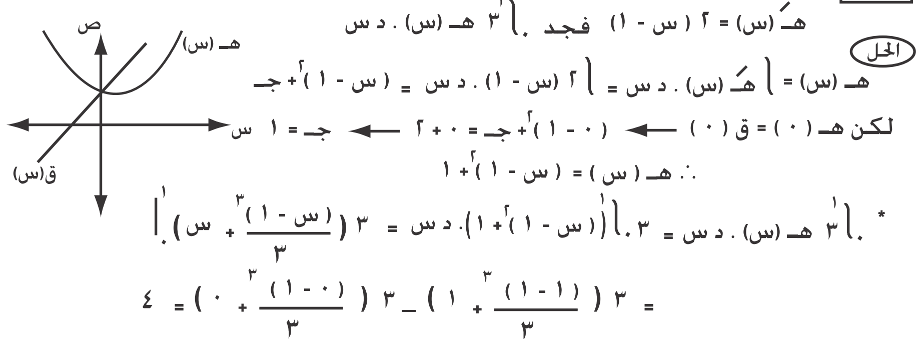
الحل ق (س - ١) = $\begin{cases} ٢ - (س - ١) &، س < ٢ \\ (س - ١)^٣ &، س \geq ٢ \end{cases}$ = $\begin{cases} ٣ - س &، س < ٢ \\ (س - ١)^٣ &، س \geq ٢ \end{cases}$

$\int_{١}^{٢} ($ق(س) - ق (س-١)$)$. د س = $\int_{١}^{٢}$ س^٣. د س − $\int_{١}^{٢}$ (٣ - س) د س

= $\left[\frac{س^٤}{٤}\right]_{١}^{٢}$ − $\left[٣ س − \frac{س^٢}{٢}\right]_{١}^{٢}$

= $\left(\frac{(٢)^٤}{٤} − \frac{(١)^٤}{٤}\right) − \left(٣(٢) − \frac{(٢)^٢}{٢} − ٣(١) − \frac{(١)^٢}{٢}\right) = \frac{٩}{٤}$

مثال الشكل المجاور يمثل بياني الاقترانين ق، هـ . إذا علمت أن ق (س) = س + ٢
هـَ (س) = ٢ (س - ١) فجد $\int_{٠}^{١} ٣$ هـ (س) . د س



الحل هـ (س) = $\int$ هـَ (س) . د س = $\int$ ٢ (س - ١) . د س = (س - ١)^٢+ جـ

لكن هـ (٠) = ق (٠) ⟵ (٠ - ١)^٢+ جـ = ٠ + ٢ ⟵ جـ = ١

∴ هـ (س) = (س - ١)^٢+ ١

* $\int_{٠}^{١} ٣$ هـ (س) . د س = ٣ $\int_{٠}^{١}$ ((س - ١)^٢+ ١). د س = ٣ $\left(\frac{(س - ١)^٣}{٣} + س\right)\Big|_{٠}^{١}$

= ٣ $\left(\frac{(١ - ١)^٣}{٣} + ١\right)$ − ٣ $\left(\frac{(٠ - ١)^٣}{٣} + ٠\right)$ = ٤

مثال جد كثير الحدود ق من الدرجة الأولى بحيث : $\int_{-٢}^{١}$ ق (س) . د س = - ١٢، $\int_{٠}^{٣}$ ق (س) . د س = ٠

الحل افرض ق (س) = أ س + ب

$\int_{-٢}^{١}$(أ س + ب) . د س = - ١٢ ⟵ $\left(\frac{أ}{٢} س^٢ + ب س\right)\Big|_{-٢}^{١}$ = - ١٢ ⟵ $\frac{أ}{٢}$ (١)^٢+ ب (١) − ($\frac{أ}{٢}$ (-٢)^٢+ ب (-٢)) = - ١٢

⟵ - ٣ أ + ٦ ب = - ٢٤ ... ①

$\int_{٠}^{٣}$ ق (س) . د س = ٠ ⟵ $\left(\frac{أ}{٢} س^٢ + ب س\right)\Big|_{٠}^{٣}$ = ٠ ⟵ $\frac{أ}{٢}$ (٣)^٢+ ب (٣) − ($\frac{أ}{٢}$ (٠)^٢+ ب (٠)) = ٠

⟵ $\frac{٩}{٢}$ أ + ٣ ب = ٠ .... ②

وبحل النظام المكون من المعادلتين (١) و (٢) . ⟵ أ = ٢ ، ب = - ٣ ∴ ق (س) = ٢ س - ٣

مثال إذا كان ع = $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}}$ جتا^{٢}س . د س ، ل = $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}}$ جا^{٢}س . د س ، فما قيمة ع - ل ؟

الحل ع - ل = $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}}$ جتا^{٢}س . د س − $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}}$ جا^{٢}س . د س = $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}}$(جتا^{٢}س - جا^{٢}س) . د س

= $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}}$ جتا ٢س . د س = $\frac{١}{٢}$ جا ٢س $\Big|_{٠}^{\frac{\pi}{٤}}$

= $\frac{١}{٢}$ (جا(٢ ($\frac{\pi}{٤}$)) - جا ٢ (٠)) = $\frac{١}{٢}$ (جا $\frac{\pi}{٢}$ - جا ٠)

= $\frac{١}{٢}$ (١ - ٠) = $\frac{١}{٢}$

مثال إذا كان ن عددا صحيحا $\geq$ صفرا. بين أن : $\frac{ن + 1}{2}\int_{-1}^{1} س^{ن} . د س = \begin{cases} 1 & ، \text{إذا كان ن عددا زوجيا} \\ 0 & ، \text{إذا كان ن عددا فرديا} \end{cases}$

الحل

$$\frac{ن + 1}{2}\int_{-1}^{1} س^{ن} . د س = \frac{ن + 1}{2} . \frac{س^{ن+1}}{ن + 1}\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{2} س^{ن+1}\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{2}\left((1)^{ن+1} - (-1)^{ن+1}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - (-1)^{ن+1}\right)$$

عندما

ن عددا زوجيا $\longleftarrow \frac{1}{2}\left(1 - (-1)^{ن+1}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - (-1)\right) = 1$

ن عددا فرديا $\longleftarrow \frac{1}{2}\left(1 - (-1)^{ن+1}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - 1\right) =$ صفرا

مثال إذا كان ك عددا نسبيا موجبا فاثبت أن : $\int_{0}^{1} س^{ك} . د س + \int_{0}^{1} س^{\frac{1}{ك}} . د س = 1$

الحل

$$\int_{0}^{1} س^{ك} . د س + \int_{0}^{1} س^{\frac{1}{ك}} . د س = \frac{س^{ك+1}}{ك + 1}\Big|_{0}^{1} + \frac{س^{\frac{1}{ك}+1}}{\frac{1}{ك} + 1}\Big|_{0}^{1}$$

$$= \left(\frac{(1)^{ك+1}}{ك + 1} - \frac{(0)^{ك+1}}{ك + 1}\right) + \left(\frac{(1)^{\frac{1}{ك}+1}}{\frac{1}{ك} + 1} - \frac{(0)^{\frac{1}{ك}+1}}{\frac{1}{ك} + 1}\right)$$

(الحدان اللذان فيهما (0) مشطوبان ومكتوب فوقهما: صفر)

$$= \frac{1}{ك + 1} + \frac{1}{\frac{1}{ك} + 1} = \frac{1}{ك + 1} + \frac{ك}{ك + 1} = \frac{ك + 1}{ك + 1} = 1$$

مثال إذا كان ق (س) = $\begin{cases} س & ، 0 \leq س \leq أ \\ \frac{أ(1 - س)}{1 - أ} & ، أ < س \leq 1 \end{cases}$ حيث $0 < أ < 1$ فجد $\int_{0}^{1} ق(س) . د س$

الحل

$$\int_{0}^{1} ق(س) . د س = \int_{0}^{أ} ق(س) . د س + \int_{أ}^{1} ق(س) . د س = \int_{0}^{أ} س . د س + \int_{أ}^{1} \frac{أ(1 - س)}{1 - أ} . د س$$

$$= \frac{س^2}{2}\Big|_{0}^{أ} + \frac{أ}{1 - أ}\left(س - \frac{س^2}{2}\right)\Big|_{أ}^{1} = \left(\frac{(أ)^2}{2} - \frac{(0)^2}{2}\right) + \frac{أ}{1 - أ}\left(\left(1 - \frac{(1)^2}{2}\right) - \left(أ - \frac{(أ)^2}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{(أ)^2}{2} + \frac{أ}{1 - أ}\left(\frac{1}{2} - أ + \frac{أ^2}{2}\right) = \frac{(أ)^2}{2} + \frac{أ}{1 - أ} . \frac{1}{2}\left(أ^2 - 2أ + 1\right)$$

$$= \frac{أ^2}{2} + \frac{أ}{1 - أ} . \frac{1}{2}(أ - 1)(أ - 1) = \frac{أ^2}{2} - \frac{أ^2}{2} + \frac{أ}{2} = \frac{أ}{2}$$

(العامل $(1 - أ)$ في المقام مشطوب مع $(أ - 1)$ ومكتوب فوقه: -1)

مثال إذا كان ق متصلا على ح ، جـ عددا حقيقيا غير الصفر فاثبت أن :

$$\frac{1}{جـ}\int_{أجـ}^{بجـ} ق\left(\frac{س}{جـ}\right) . د س = \int_{أ}^{ب} ق(س) . د س$$

الحل

(افرض ص = $\frac{س}{جـ} \longleftarrow \frac{د ص}{د س} = \frac{1}{جـ} \longleftarrow$ د س = جـ . د ص

س = أجـ $\longleftarrow$ ص = أ ، س = ب جـ $\longleftarrow$ ص = ب)

$$\frac{1}{جـ}\int_{أجـ}^{بجـ} ق\left(\frac{س}{جـ}\right) . د س = \frac{1}{جـ}\int_{أ}^{ب} ق(ص) . جـ . د ص = \int_{أ}^{ب} ق(ص) . د ص$$

(جـ مشطوبة في البسط والمقام)

$$= \int_{أ}^{ب} ق(س) . د س$$

مثال إذا كان ق متصلا على [- أ ، أ] فاثبت أن : $\int_{-\text{أ}}^{\text{أ}} \text{ق}(\text{س})\,.\,\text{د س} = \int_{0}^{\text{أ}} (\text{ق}(\text{س}) + \text{ق}(-\text{س}))\,.\,\text{د س}$

الحل

الطرف الأيسر : $\int_{0}^{\text{أ}} (\text{ق}(\text{س}) + \text{ق}(-\text{س}))\,.\,\text{د س} = \int_{0}^{\text{أ}} \text{ق}(\text{س})\,.\,\text{د س} + \int_{0}^{\text{أ}} \text{ق}(-\text{س})\,.\,\text{د س}$

(افرض $\text{ص} = -\text{س} \longrightarrow \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = -1 \longrightarrow \text{د س} = -\text{دص}$

$\text{س} = 0 \longrightarrow \text{ص} = 0$ ، $\text{س} = \text{أ} \longrightarrow \text{ص} = -\text{أ}$)

$\longrightarrow \int_{0}^{\text{أ}} (\text{ق}(\text{س}) + \text{ق}(-\text{س}))\,.\,\text{د س} = \int_{0}^{\text{أ}} \text{ق}(\text{س})\,.\,\text{د س} + \int_{0}^{-\text{أ}} \text{ق}(\text{ص})\,.\,-\text{د ص}$

$= \int_{0}^{\text{أ}} \text{ق}(\text{س})\,.\,\text{د س} + \int_{-\text{أ}}^{0} \text{ق}(\text{ص})\,.\,\text{د ص} = \int_{0}^{\text{أ}} \text{ق}(\text{ص})\,.\,\text{د ص} + \int_{-\text{أ}}^{0} \text{ق}(\text{ص})\,.\,\text{د ص}$

$= \int_{-\text{أ}}^{0} \text{ق}(\text{ص})\,.\,\text{د ص} + \int_{0}^{\text{أ}} \text{ق}(\text{ص})\,.\,\text{د ص} = \int_{-\text{أ}}^{\text{أ}} \text{ق}(\text{ص})\,.\,\text{د ص} = \int_{-\text{أ}}^{\text{أ}} \text{ق}(\text{س})\,.\,\text{د س}$

مثال 1 أثبت أن : $\int_{0}^{\text{أ}} \frac{\text{ق}(\text{س})\,.\,\text{د س}}{\text{ق}(\text{س}) + \text{ق}(\text{أ} - \text{س})} = \frac{\text{أ}}{2}$

الحل

(افرض $\text{ص} = \text{أ} - \text{س} \longrightarrow \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = -1 \longrightarrow \text{د س} = -\text{دص}$

$\text{س} = 0 \longrightarrow \text{ص} = \text{أ}$ ، $\text{س} = \text{أ} \longrightarrow \text{ص} = 0$)

$\int_{0}^{\text{أ}} \frac{\text{ق}(\text{س})\,.\,\text{د س}}{\text{ق}(\text{س}) + \text{ق}(\text{أ} - \text{س})} = \int_{\text{أ}}^{0} \frac{-\text{ق}(\text{أ} - \text{ص})\,.\,\text{د ص}}{\text{ق}(\text{أ} - \text{ص}) + \text{ق}(\text{ص})} = \int_{0}^{\text{أ}} \frac{\text{ق}(\text{أ} - \text{ص})\,.\,\text{د ص}}{\text{ق}(\text{أ} - \text{ص}) + \text{ق}(\text{ص})} = \int_{0}^{\text{أ}} \frac{\text{ق}(\text{أ} - \text{س})\,.\,\text{د س}}{\text{ق}(\text{أ} - \text{س}) + \text{ق}(\text{س})}$

$= \int_{0}^{\text{أ}} \frac{\text{ق}(\text{أ} - \text{س}) + \text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ق}(\text{أ} - \text{س}) + \text{ق}(\text{س})}\,.\,\text{د س}$ باضافة وطرح ق (س) للبسط

$= \int_{0}^{\text{أ}} \frac{\text{ق}(\text{أ} - \text{س}) + \text{ق}(\text{س})}{\text{ق}(\text{أ} - \text{س}) + \text{ق}(\text{س})}\,.\,\text{د س} - \int_{0}^{\text{أ}} \frac{\text{ق}(\text{س})}{\text{ق}(\text{أ} - \text{س}) + \text{ق}(\text{س})}\,.\,\text{د س}$

$\longrightarrow 2\int_{0}^{\text{أ}} \frac{\text{ق}(\text{س})\,.\,\text{د س}}{\text{ق}(\text{س}) + \text{ق}(\text{أ} - \text{س})} = 1\,(\text{أ} - 0) \longrightarrow \int_{0}^{\text{أ}} \frac{\text{ق}(\text{س})\,.\,\text{د س}}{\text{ق}(\text{س}) + \text{ق}(\text{أ} - \text{س})} = \frac{\text{أ}}{2}$

2 استخدم القاعدة (1) أعلاه لإيجاد قيمة $\int_{0}^{3} \frac{\sqrt{\text{س}}\,.\,\text{د س}}{\sqrt{\text{س}} + \sqrt{3 - \text{س}}}$

الحل $\int_{0}^{3} \frac{\sqrt{\text{س}}\,.\,\text{د س}}{\sqrt{\text{س}} + \sqrt{3 - \text{س}}} = \frac{3}{2}$

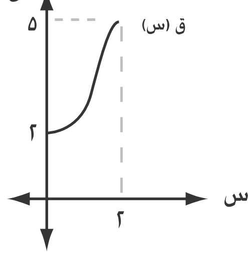
3 استخدم القاعدة (1) أعلاه لإيجاد قيمة $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{جا س}\,.\,\text{د س}}{\text{جا س} + \text{جتا س}}$

الحل

$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{جا س}\,.\,\text{د س}}{\text{جا س} + \text{جتا س}} = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{جا س}\,.\,\text{د س}}{\text{جا س} + \text{جا}(\frac{\pi}{2} - \text{س})} = \frac{\frac{\pi}{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$

مثال الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران ق على [٠ ، ٢] جد أكبر قيمة ممكنة للتكامل :

$\int_{٠}^{٢}$ (٣ ق (س) + ١). د س



الحل

٢ ≤ ق (س) ≤ ٥

٦ ≤ ٣ ق (س) ≤ ١٥

٧ ≤ ٣ ق(س) + ١ ≤ ١٦

$\int_{٠}^{٢}$ ٧ .د س ≤ $\int_{٠}^{٢}$(٣ ق(س) + ١)د س ≤ $\int_{٠}^{٢}$ ١٦ . د س

٧ (٢ - ٠) ≤ $\int_{٠}^{٢}$(٣ ق(س) + ١)د س ≤ ١٦ (٢ - ٠) ⟵ ١٤ ≤ $\int_{٠}^{٢}$(٣ ق(س) + ١).د س ≤ ٣٢

∴ ٣٢ هي أكبر قيمة ممكنة للتكامل

مثال إذا كان | ق (س) - ٧ | < ١ لجميع قيم س ∈ [٠ ، ٣] فما أكبر قيمة وما أصغر قيمة للمقدار :

$\int_{٠}^{٣}$ ق (س) . د س

الحل

| ق (س) - ٧ | < ١ ⟵ - ١ < ق (س) - ٧ < ١

⟵ ٦ < ق (س) < ٨

⟵ $\int_{٠}^{٣}$ ٦. د س < $\int_{٠}^{٣}$ ق (س) . د س < $\int_{٠}^{٣}$ ٨ . د س

⟵ ٦ (٣ - ٠) < $\int_{٠}^{٣}$ ق (س) . د س < ٨ (٣ - ٠)

⟵ ١٨ < $\int_{٠}^{٣}$ ق (س) . د س < ٢٤

أصغر قيمة ، أكبر قيمة

مثال إذا كان ق (س) ≥ ٧ لجميع قيم س ∈ [-١، ٣] فما أصغر قيمة للمقدار :

$\int_{-١}^{٣}$ (٢ ق (س) - ٣) . د س

الحل

ق (س) ≥ ٧ ⟵ ٢ ق (س) ≥ ١٤ ⟵ ٢ ق (س) - ٣ ≥ ١١

$\int_{-١}^{٣}$(٢ ق (س) - ٣) . د س ≥ $\int_{-١}^{٣}$ ١١ . د س ⟵ $\int_{-١}^{٣}$(٢ ق (س) - ٣) . د س ≥ ١١ (٣ - -١)

⟵ $\int_{-١}^{٣}$ (٢ ق (س) - ٣) . د س ≥ ٤٤ ∴ ٤٤ أصغر قيمة للمقدار المطلوب .

مثال دون إجراء عملية التكامل بين أن : ٠ ≤ $\int_{٠}^{\pi}$ س جا س . د س ≤ $\pi^{٢}$

الحل

٠ ≤ س ≤ π . . . (١)

٠ ≤ جا س ≤ ١ ، لكل س ∈ [٠، π] . . . (٢)

> إذا كان ٠ < أ < ب ، ٠ ≤ جـ ≤ د
> فإن ٠ ≤ أ جـ ≤ ب د

من (١)، (٢) ⟵ ٠ ≤ س جا س ≤ π

⟵ $\int_{٠}^{\pi}$ ٠ . د س ≤ $\int_{٠}^{\pi}$ س جا س . د س ≤ $\int_{٠}^{\pi}$ π . د س

⟵ ٠ (π - ٠) ≤ $\int_{٠}^{\pi}$ س جا س . د س ≤ π (π - ٠)

⟵ ٠ ≤ $\int_{٠}^{\pi}$ س جا س . د س ≤ $\pi^{٢}$

مثال دون إجراء عملية التكامل بين أن : $\int_{0}^{3} \sqrt{س^3 + 2}$. د س تنحصر قيمته بين $3\sqrt{2}$ ، $3\sqrt{29}$

الحل

$0 \leqslant س \leqslant 3$

$\leftarrow 0 \leqslant س^3 \leqslant 27$

$\leftarrow 2 \leqslant س^3 + 2 \leqslant 29$

$\leftarrow \sqrt{2} \leqslant \sqrt{س^3 + 2} \leqslant \sqrt{29}$

$\leftarrow \int_{0}^{3} \sqrt{2}$. د س $\leqslant \int_{0}^{3} \sqrt{س^3 + 2}$. د س $\leqslant \int_{0}^{3} \sqrt{29}$. د س

$\leftarrow \sqrt{2}\ (3 - 0) \leqslant \int_{0}^{3} \sqrt{س^3 + 2}$. د س $\leqslant \sqrt{29}\ (3 - 0)$

$\leftarrow 3\sqrt{2} \leqslant \int_{0}^{3} \sqrt{س^3 + 2}$. د س $\leqslant 3\sqrt{29}$

> إذا كان أ $\geqslant$ 0 ، ب $\geqslant$ 0 ، ن $\in$ ط
> فإن: $ب^{ن} \geqslant أ^{ن} \longleftrightarrow ب \geqslant أ$

> إذا كان أ $\geqslant$ 0 ، ب $\geqslant$ 0 ،
> فإن: $\sqrt{ب} \geqslant \sqrt{أ} \longleftrightarrow ب \geqslant أ$

مثال دون إجراء عملية التكامل بين أن : $\int_{0}^{2} \sqrt{2س - س^2}$. د س تنحصر قيمته بين 0 ، 2

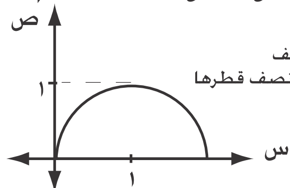
الحل

طريقة (1) $\sqrt{2س - س^2} = \sqrt{-(س^2 - 2س)} = \sqrt{-(س^2 - 2س + 1) + 1} = \sqrt{1 - (س - 1)^2}$

باكمال المربع في س

افرض ق (س) = $\sqrt{1 - (س - 1)^2}$

التمثيل البياني لـ ق هو النصف العلوي لدائرة مركزها (1، 0) ونصف قطرها وحدة واحدة .



$\leftarrow 0 \leqslant \sqrt{2س - س^2} \leqslant 1$

$\int_{0}^{2} 0$. د س $\leqslant \int_{0}^{2} \sqrt{2س - س^2}$. د س $\leqslant \int_{0}^{2} 1$. د س

$0\ (2 - 0) \leqslant \int_{0}^{2} \sqrt{2س - س^2}$. د س $\leqslant 1\ (2 - 0) \leftarrow 0 \leqslant \int_{0}^{2} \sqrt{2س - س^2}$. د س $\leqslant 2$

طريقة (2) افرض ق (س) = $\sqrt{2س - س^2}$ ، س $\in [0 ، 2]$

استخدم اختبار المشتقة الأولى لإيجاد القيم القصوى المطلقة للاقتران ق

$ق'(س) = \frac{2 - 2س}{2\sqrt{2س - س^2}}$ ابحث إشارة ق'(س)

إشارة ق' : بين 0 و 1 : + + + ، بين 1 و 2 : - - -

عند س = 0 ، ق (0) = 0
عند س = 2 ، ق (2) = 0
$\leftarrow$ 0 قيمة صغرى مطلقة

عند س = 1 يوجد قيمة عظمى مطلقة هي ق (1) = 1

$\leftarrow 0 \leqslant \sqrt{2س - س^2} \leqslant 1$

$\leftarrow \int_{0}^{2} 0$. د س $\leqslant \int_{0}^{2} \sqrt{2س - س^2}$. د س $\leqslant \int_{0}^{2} 1$. د س

$\leftarrow 0\ (2 - 0) \leqslant \int_{0}^{2} \sqrt{2س - س^2}$. د س $\leqslant 1\ (2 - 0)$

$\leftarrow 0 \leqslant \int_{0}^{2} \sqrt{2س - س^2}$. د س $\leqslant 2$

ملاحظة يمكن استخدام الطريقة (2) في حل أمثلة سابقة مشابهة لفكرة هذا المثال .

مثال إذا كان ن عددا صحيحا موجبا، فما هي مجموعة قيم ن التي تجعل المساواة

$\int_{0}^{1} س^{ن} . د س = \frac{١}{ن + ١} \int_{0}^{١}$ جتا (ن π) . د س صحيحة دائما .

الحل

$\frac{س^{ن+١}}{ن + ١} \Big|_{0}^{١} = \frac{١}{ن + ١}$ جتا (ن π) (١ - ٠)

جتا (ن π) = $(- ١)^{ن}$

$\frac{(١)^{ن+١}}{ن + ١} - \frac{(٠)^{ن+١}}{ن + ١} = \frac{(- ١)^{ن}}{ن + ١} \longleftarrow \frac{١}{ن + ١}$ – صفر $= \frac{(- ١)^{ن}}{ن + ١}$

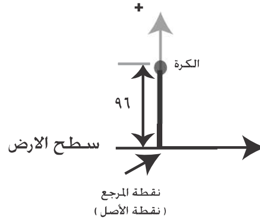
$\longleftarrow$ ١ = $(- ١)^{ن}$ $\longleftarrow$ ∴ ن عدد زوجي موجب

مثال قذفت كرة رأسيا للأعلى بسرعة ابتدائية قدرها ١٦ قدم / ثانية من على ارتفاع ٩٦ قدما عن سطح الأرض، إذا علمت أن تسارع الكرة يساوي -٣٢ قدم / (ثانية.ثانية) فجد ما يأتي :

(١) أقصى ارتفاع تصل إليه الكرة عن سطح الأرض .

(٢) الزمن الذي تحتاجه الكرة لتمر بنقطة القذف في هبوطها للأسفل .

(٣) سرعة الكرة لحظة اصطدامها بالأرض .



الحل

ع (ن) = $\int$ ت (ن) . د ن = $\int$ -٣٢ . د ن = -٣٢ ن + $جـ_{١}$

لكن ع (٠) = ١٦ $\longleftarrow$ ١٦ = -٣٢ (٠) + $جـ_{١}$ $\longleftarrow$ $جـ_{١}$ = ١٦

∴ ع (ن) = - ٣٢ ن + ١٦

ف (ن) = $\int$ ع (ن) . د ن = $\int$ (-٣٢ ن + ١٦) . د ن = $\frac{-٣٢}{٢}$ $ن^{٢}$ + ١٦ ن + $جـ_{٢}$ = -١٦ $ن^{٢}$ + ١٦ ن + $جـ_{٢}$

لكن ف (٠) = ٩٦ $\longleftarrow$ ٩٦ = -١٦ $(٠)^{٢}$ + ١٦ (٠) + $جـ_{٢}$ $\longleftarrow$ $جـ_{٢}$ = ٩٦

∴ ف (ن) = - ١٦ $ن^{٢}$ + ١٦ ن + ٩٦ (ارتفاع الكرة عن سطح الارض عند اي لحظة ن)

(١) تصل الكرة أقصى ارتفاع عندما تنعدم السرعة .

ع (ن) = ٠ $\longleftarrow$ -٣٢ ن + ١٦ = ٠ $\longleftarrow$ ن = $\frac{١}{٢}$

أقصى ارتفاع تصل إليه الكرة عن سطح الارض = ف ($\frac{١}{٢}$) = - ١٦ $(\frac{١}{٢})^{٢}$ + ١٦ ($\frac{١}{٢}$) + ٩٦ = ١٠٠ قدم

(٢) تمر الكرة بنقطة القذف عندما ف = ٩٦

٩٦ = -١٦ $ن^{٢}$ + ١٦ ن + ٩٦ $\longleftarrow$ $ن^{٢}$ - ن = ٠ $\longleftarrow$ ن (ن - ١) = ٠ $\longleftarrow$ ن = ٠ (مشطوبة) ، ن = ١

∴ ثانية واحدة هي المدة الزمنية التي تحتاجها الكرة لتمر بنقطة القذف في هبوطها للأسفل

(٣) تصطدم الكرة بالأرض عندما ف = صفرا

- ١٦ $ن^{٢}$ + ١٦ ن + ٩٦ = ٠ $\longleftarrow$ $ن^{٢}$ - ن - ٦ = ٠

$\longleftarrow$ (ن - ٣) (ن + ٢) = ٠

$\longleftarrow$ ن = ٣ ، ن = -٢ (مشطوبة)

ع (٣) = -٣٢ (٣) + ١٦ = – ٨٠ قدم / ثانية

مثال يتحرك جسيم على محور السينات بحيث إن سرعته ع (ن) = جا (ن) وحدة /ثانية . إذا علمت أن الجسيم يمر بنقطة الأصل عندما ن = $\frac{\pi}{٦}$. فجد أول زمن يلي (ن = $\frac{\pi}{٦}$) والذي يمر عنده الجسيم بنقطة الأصل .

الحل

ف (ن) = $\int$ ع (ن) . د ن = $\int$ جا ن . د ن = $-$ جتا ن + جـ

لكن ف ($\frac{\pi}{٦}$) = ٠ ⟵ $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + جـ = ٠ ⟵ جـ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

∴ ف (ن) = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ − جتا ن

* يمر الجسيم بنقطة الأصل عندما ف = ٠

ف (ن) = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ − جتا ن = ٠ ⟵ جتا ن = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

ن = $\frac{\pi}{٦}$ + ٢ π أ ، ن = $\frac{١١\pi}{٦}$ + ٢ π أ (حيث أ عدد صحيح غير سالب)

∴ الزمن المطلوب هو : ن = $\frac{١١\pi}{٦}$ ثانية

مثال جسيم يتحرك في خط مستقيم بتسارع قدره ت =(٦ ن + ٤) م/ ث^{٢} إذا علمت أن سرعة الجسيم الابتدائية ٢ م/ ث . فجد المسافة التي يقطعها الجسيم في الفترة الزمنية [٠ ، ٣] .

الحل

ع (ن) = $\int$(٦ن + ٤). د ن = ٣ ن^{٢} + ٤ ن + جـ

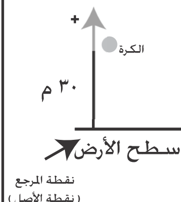
لكن ع(٠) = ٢ ⟵ ٣ (٠) + ٤ (٠) + جـ = ٢ ⟵ جـ = ٢

∴ ع (ن) = ٣ ن^{٢} + ٤ ن + ٢

ف = $\int_{٠}^{٣}$ | ٣ ن^{٢} + ٤ ن + ٢ | . د ن ⟵ ف = $\int_{٠}^{٣}$(٣ ن^{٢} + ٤ ن + ٢). د ن ف =(ن^{٣} + ٢ ن^{٢} + ٢ ن)$|_{٠}^{٣}$

= ((٣)^{٣} + ٢ (٣)^{٢} + ٢ (٣)) - ((٠)^{٣} + ٢ (٠)^{٢} + ٢ (٠)) = ٥١ م

مثال قذف جسم رأسيا لأسفل من ارتفاع ٣٠ مترا عن سطح الأرض فتحرك بتسارع قدره -١٠ م / ث^{٢}. فإذا علمت أنه اصطدم بالأرض بعد ثانيتين من لحظة قذفه . فجد السرعة الابتدائية للجسم .



الحل

ع (ن) = $\int$ $-$١٠ . د ن = $-$١٠ ن + $جـ_{١}$

ف (ن) = $\int$($-$١٠ ن + $جـ_{١}$). د ن = $-$ ٥ ن^{٢} + $جـ_{١}$ ن + $جـ_{٢}$

لكن ف (٠) = ٣٠ ⟵ - ٥ (٠)^{٢} + $جـ_{١}$ (٠) + $جـ_{٢}$ = ٣٠ ⟵ $جـ_{٢}$ = ٣٠

كذلك ف (٢) = ٠ ⟵ $-$ ٥ (٢)^{٢} + $جـ_{١}$ (٢) + ٣٠ = ٠ ⟵ $جـ_{١}$ = $-$٥

∴ ع (ن) = $-$١٠ ن − ٥

ع (٠) = - ١٠ (٠) - ٥ = $-$ ٥ م / ث

السرعة الابتدائية للجسم = ٥ م / ث باتجاه الأسفل

اقتران اللوغرتم الطبيعي $لـو_{هـ} س$

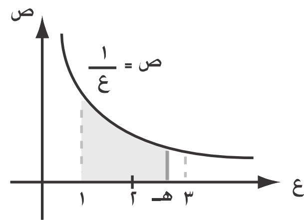
تعريف

اقتران اللوغرتم الطبيعي ورمزه $لـو_{هـ}$ هو : $لـو_{هـ} س = \int_{1}^{س} \frac{1}{ع} \cdot دع$

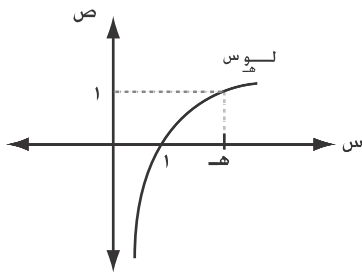
وهو متصل قابل للاشتقاق في مجاله $(0 ، \infty)$

حيث هـ عددغير نسبي $\approx 2,7$ ونسميه العدد النيبيري (العدد الطبيعي) وهو العدد الذي يجعل مساحة المنطقة تحت منحنى الاقتران $ص = \frac{1}{ع}$ من ع = ١ إلى ع = هـ تساوي وحدة مساحة واحدة .

انظر الشكل المجاور



الشكل المجاور يمثل منحنى $لـو_{هـ} س$



لاحظ أن:

$لـو_{هـ} هـ = 1$

$لـو_{هـ} 1 = صفرا$

مشتقة الاقتران اللوغرتمي الطبيعي

نظرية (١)

١ إذا كان $ق(س) = لـو_{هـ} س$ ، $س > 0$ ، فإن $قَ(س) = \frac{1}{س}$

٢ إذا كان $ق (س) = لـو_{هـ} ل (س)$ ، وكان ل(س) قابلا للاشتقاق فإن :

$قَ (س) = \frac{لَ (س)}{ل (س)}$ ، حيث $ل(س) > 0$

٣ إذا كان $ق (س) = لـو_{هـ} |ل (س)|$ وكان ل(س) قابلا للاشتقاق فإن :

$قَ (س) = \frac{لَ (س)}{ل (س)}$ ، حيث $ل(س) \neq 0$

مثال إذا كان ق (س) = لــوهـ $\sqrt{1+س^2}$ ، فجد قَ (س) .

(الحل)

$$قَ(س) = \frac{\frac{2س}{2\sqrt{1+س^2}}}{\sqrt{1+س^2}} = \frac{2س}{2\sqrt{1+س^2}\cdot\sqrt{1+س^2}} = \frac{س}{1+س^2}$$

مثال إذا كان ق (س) = لــوهـ | جا س | ، فجد قَ (س) .

(الحل)

$$قَ(س) = \frac{جتا س}{جا س} = ظتا س \quad حيث \quad جا س \neq 0$$

تذكر

خصائص اللوغرتمات

إذا كان س ،ص عددين حقيقيين موجبين، جـ عددا حقيقيا فإن :

1. لــوهـ س . ص = لــوهـ س + لــوهـ ص
2. لــوهـ $\frac{س}{ص}$ = لــوهـ س − لــوهـ ص وكحالة خاصة لــوهـ $\frac{1}{س}$ = −لــوهـ س
3. لــوهـ $س^{جـ}$ = جـ لــوهـ س
4. لــوس هـ = $\frac{1}{لــوهـ س}$
5. إذا كان س = ص فإن : لــوهـ س = لــوهـ ص

ملاحظة: تستخدم خصائص اللوغرتمات في تبسيط الاقتران قبل عملية الاشتقاق وذلك لتبسيط عملية الاشتقاق .

مثال إذا كان ق (س) = لــوهـ $\frac{س^3 جا س}{\sqrt{1+س}}$ ، فجد قَ (س) .

(الحل)

ق (س) = لــوهـ ($س^3$ جا س) − لــوهـ $\sqrt{1+س}$

= لــوهـ $س^3$ + لــوهـ جا س − لــوهـ $(1+س)^{\frac{1}{2}}$

= 3 لــوهـ س + لــوهـ جا س − $\frac{1}{2}$ لــوهـ (1 + س)

$$قَ(س) = \frac{3}{س} + \frac{جتا س}{جا س} - \frac{1}{2(1+س)} = \frac{3}{س} + ظتا س - \frac{1}{2+2س}$$

تكاملات تتضمن اقترانات لوغرتمية طبيعية

نظرية (٢)

$$\int \frac{ق'(س)}{ق(س)} . د س = لـو_هـ |ق(س)| + جـ \ ، \ ق(س) \neq ٠$$

مثال جد $\int \frac{٣ س^٢ + ١}{س^٣ + س + ١} . د س$

الحل

البسط مشتقة المقام

$$\int \frac{٣ س^٢ + ١}{س^٣ + س + ١} . د س = لـو_هـ |س^٣ + س + ١| + جـ$$

مثال جد $\int ظتا س . د س$

الحل

$$\int ظتا س . د س = \int \frac{جتا س}{جا س} . د س = لـو_هـ |جا س| + جـ$$

مثال جد $\int \frac{قا^٢ ٣س}{ظا ٣س + ٥} . د س$

الحل

$$\int \frac{قا^٢ ٣س}{ظا ٣س + ٥} . د س = \frac{١}{٣} \int \frac{٣ قا^٢ ٣س}{ظا ٣س + ٥} . د س = \frac{١}{٣} لـو_هـ |ظا ٣س + ٥| + جـ$$

مثال جد $\int ظا (٥س+١) . د س$

الحل

$$\int ظا (٥س+١) . د س = \int \frac{جا (٥س+١)}{جتا (٥س+١)} . د س = \frac{-١}{٥} \int \frac{-٥ جا (٥س+١)}{جتا (٥س+١)} . د س$$

$$= \frac{-١}{٥} لـو_هـ |جتا (٥س+١)| + جـ$$

مثال جد $\int \frac{جا ٣س}{٢ + جتا ٣س} . د س$

الحل

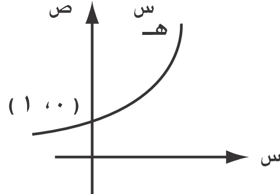
$$\int \frac{جا ٣س}{٢ + جتا ٣س} . د س = \frac{-١}{٣} \int \frac{-٣ جا ٣س}{٢ + جتا ٣س} . د س$$

$$= \frac{-١}{٣} لـو_هـ |٢ + جتا ٣س| + جـ$$

الاقتران الأسي الطبيعي (مشتقته وتكامله)

تعريف

يدعى الاقتران ق (س) = $هـ^{س}$ حيث س عدد حقيقي ، هـ : العدد النيبيري الاقتران الأسي الطبيعي .



لاحظ أن رسمة الاقتران $هـ^{س}$ تقع أعلى محور السينات

أي أن $هـ^{س}$ > صفر لكل س عددحقيقي .

كما أن منحنى $هـ^{س}$ يقطع محور الصادات عند النقطة (٠ ، ١) أي أن $هـ^{٠} = ١$

تذكر قوانين الأسس

- $هـ^{س + ص} = هـ^{س} \; هـ^{ص}$
- $(هـ^{س})^{ص} = هـ^{س ص}$
- $هـ^{س - ص} = \frac{هـ^{س}}{هـ^{ص}}$
- $هـ^{-س} = \frac{١}{هـ^{س}}$

مشتقة الاقتران الأسي الطبيعي

نظرية

إذا كان ص = $هـ^{س}$ فإن $\frac{د ص}{د س} = هـ^{س}$

البرهان :

ص = $هـ^{س}$ ⟵ $لو_{هـ} ص = لو_{هـ} هـ^{س}$

⟵ $لو_{هـ} ص = س \; لو_{هـ} هـ$

⟵ $لو_{هـ} ص = س$

باشتقاق الطرفين بالنسبة لـ س ⟵ $\frac{١}{ص} \frac{د ص}{د س} = ١$

⟵ $\frac{د ص}{د س} = ص$ ⟵ $\frac{د ص}{د س} = هـ^{س}$

وبشكل عام

$$\frac{د}{د س}\left(هـ^{ق(س)}\right) = هـ^{ق(س)} \; ق'(س)$$

مثال جد المشتقة الأولى لكل من الاقترانات الاتية :

١) ص = $هـ^{س^{٢} - ١}$

الحل $\frac{د ص}{د س} = هـ^{س^{٢} - ١} \; ٢ س$

٢ $ص = \frac{١}{٢}\left(هـ^{س} + هـ^{-س}\right)$

الحل $\frac{دص}{دس} = \frac{١}{٢}\left(هـ^{س} - هـ^{-س}\right)$

٣ $ص = \left(هـ^{س^{٢}} + ١\right)^{٢}$

الحل $\frac{دص}{دس} = ٢\left(هـ^{س^{٢}} + ١\right) هـ^{س^{٢}} . ٢س = ٤س\, هـ^{س^{٢}}\left(هـ^{س^{٢}} + ١\right)$

٤ $ص = جا\left(هـ^{٢س}\right)$

الحل $\frac{دص}{دس} = جتا\left(هـ^{٢س}\right) ٢هـ^{٢س}$

٥ $ص = \frac{هـ^{س} - ١}{هـ^{س} + ١}$

الحل $\frac{دص}{دس} = \frac{\left(هـ^{س} + ١\right)هـ^{س} - \left(هـ^{س} - ١\right)هـ^{س}}{\left(هـ^{س} + ١\right)^{٢}} = \frac{٢هـ^{س}}{\left(هـ^{س} + ١\right)^{٢}}$

تكامل الاقتران الأسي الطبيعي

نظرية

$$\int هـ^{س} . دس = هـ^{س} + جـ$$

وبشكل عام :

$$\int هـ^{أس + ب} . دس = \frac{١}{أ} هـ^{أس + ب} + جـ$$

مثال جد $\int هـ^{١ - ٥س} . دس$

الحل $\int هـ^{١ - ٥س} . دس = \frac{-١}{٥} هـ^{١ - ٥س} + جـ$

مثال جد $\int \frac{٤}{\sqrt{هـ^{س}}} . دس$

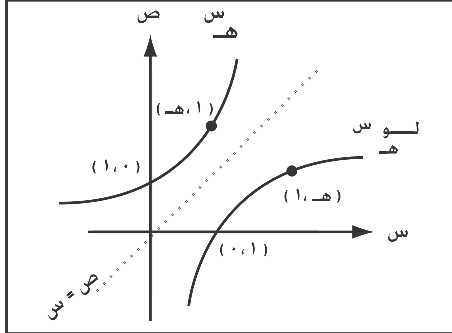
الحل $\int \frac{٤}{\sqrt{هـ^{س}}} . دس = ٤\int هـ^{\frac{-س}{٢}} . دس = -٨ هـ^{\frac{-س}{٢}} + جـ$

مثال جد $\int_{٠}^{١} \frac{١ + هـ^{س}}{هـ^{س}} . دس$

الحل $\int_{٠}^{١} \frac{١ + هـ^{س}}{هـ^{س}} . دس = \int_{٠}^{١} \frac{دس}{هـ^{س}} + \int_{٠}^{١} ١ . دس = \int_{٠}^{١} هـ^{-س} . دس + ١(١ - ٠)$

$= -هـ^{-س}\Big|_{٠}^{١} + ١ = -\left(هـ^{-١} - هـ^{٠}\right) + ١ = ١ + ١ = ٢ - \frac{١}{هـ}$

العلاقة بين الاقتران اللوغرتمي الطبيعي والاقتران الأسي الطبيعي



- إن كلا من اقتراني اللوغرتم والأس الطبيعي هو معكوس للاخر .
  فرسمة كل اقتران منهما هي انعكاس لرسمة الاقتران الاخر في المستقيم ص = س .

  انظر الشكل المجاور

  (لاحظ أن المنحنيين لا يتقاطعان)

والجدول الاتي يبين خصائص منحنييهما :

خصائص $هـ^{س}$	خصائص $لـو_{هـ}\ س$
• $هـ^{س} > $ صفر ، لجميع قيم س	• $لـو_{هـ}\ س > $ صفر ، $س > ١$ $لـو_{هـ}\ س < $ صفر ، $س < ١$ $لـو_{هـ}\ س = $ صفر ، $س = ١$
• $هـ^{س}$ متزايد على $(-\infty ، \infty)$	• $لـو_{هـ}\ س$ متزايد على $(٠ ، \infty)$
• منحنى $هـ^{س}$ مقعر للأعلى على $(-\infty ، \infty)$	• منحنى $لـو_{هـ}\ س$ مقعر للأسفل على $(٠ ، \infty)$

- وبما أن كلا من اقتراني اللوغرتم والأس الطبيعي هو معكوس للاخر تتحقق العلاقتان الاتيتان :

$لـو_{هـ}\ هـ^{س} = س$ $\qquad$ $هـ^{لـو_{هـ}\ س} = س \ ،\ س > ٠$

قـــاعدة

١ $\quad لـو_{هـ}\ هـ^{ق(س)} = ق(س)$

٢ $\quad هـ^{لـو_{هـ}\ ق(س)} = ق(س) \ ،\ ق(س) > ٠$

ملاحظة (١) :

- للتحويل من الصورة اللوغرتمية إلى الصورة الأسية وبالعكس :

  $ص = لـو_{هـ}\ س \longleftrightarrow س = هـ^{ص} \ ،\ س > ٠$

ملاحظة (٢) :

تستخدم العلاقتان السابقتان في تبسيط الاقترانات وذلك لتبسيط عملية الاشتقاق أو التكامل كما في الأمثلة الاتية :

مثال جد مشتقة كل من الاقترانات الاتية :

١ $ص = لو_{هـ} هـ^{س^{3}+1}$

الحل $ص = لو_{هـ} هـ^{س^{3}+1} \longleftarrow ص = (س^{3}+1) لو_{هـ} هـ = س^{3}+1$

$\frac{د ص}{د س} = 3 س^{2}$

٢ $ص = هـ^{لو_{هـ} س - س}$

الحل $ص = هـ^{لو_{هـ} س - س} \longleftarrow ص = هـ^{لو_{هـ} س} . هـ^{-س} = س . هـ^{-س}$

$\frac{د ص}{د س} = س (-هـ^{-س}) + هـ^{-س} (1) = هـ^{-س} (1 - س)$

٣ $ص = لو_{هـ} \sqrt{هـ^{س}}$

الحل $ص = لو_{هـ} \sqrt{هـ^{س}} \longleftarrow ص = لو_{هـ} هـ^{\frac{س}{2}} = \frac{س}{2}$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{1}{2}$

مثال جد $\int_{1}^{هـ} 3 س هـ^{لو_{هـ} س} . د س$

الحل $\int_{1}^{هـ} 3 س هـ^{لو_{هـ} س} . د س = \int_{1}^{هـ} 3 س^{2} . د س = س^{3} \Big|_{1}^{هـ} = هـ^{3} - 1$

مثال جد $\int 4 س هـ^{1 + لو_{هـ} س^{2}} . د س$ ، س > صفر

الحل $\int 4 س هـ^{1 + لو_{هـ} س^{2}} . د س = \int 4 س هـ هـ^{لو_{هـ} س^{2}} . د س$

$= 4 هـ \int س . س^{2} . د س = 4 هـ \int س^{3} . د س = هـ س^{4} + جـ$

أمثلة متنوعة

١ جد مشتقة كل من الاقترانات الاتية :

(أ) $\text{ص} = \text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{٣س}\ \text{هـ}^{-\text{س}})$

الحل $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{٣س}(-\text{هـ}^{-\text{س}}) + \text{هـ}^{-\text{س}}(\text{٣})}{\text{٣س}\ \text{هـ}^{-\text{س}}} = \frac{\text{٣هـ}^{-\text{س}}(-\text{س}+\text{١})}{\text{٣س}\ \text{هـ}^{-\text{س}}} = \frac{\text{١}-\text{س}}{\text{س}}$

(ب) $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}}\ \text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}$

الحل $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{هـ}^{\text{س}} . \frac{\text{١}}{\text{س}} + \text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س} . \text{هـ}^{\text{س}}$

(جـ) $\text{ص} = \text{لـو}_{\text{هـ}} \left| \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{هـ}^{\text{س}}+\text{١}} \right|$

الحل $\text{ص} = \text{لـو}_{\text{هـ}} \left| \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{هـ}^{\text{س}}+\text{١}} \right| = \text{لـو}_{\text{هـ}}\text{هـ}^{\text{س}} - \text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{هـ}^{\text{س}}+\text{١}) = \text{س} - \text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{هـ}^{\text{س}}+\text{١})$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{١} - \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{هـ}^{\text{س}}+\text{١}}$

(د) $\text{ص} = \text{هـ}^{\sqrt{\text{س}}} + \sqrt{\text{هـ}^{\text{س}}}$

الحل $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{هـ}^{\sqrt{\text{س}}} . \frac{\text{١}}{\text{٢}\sqrt{\text{س}}} + \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{٢}\sqrt{\text{هـ}^{\text{س}}}} = \frac{\text{هـ}^{\sqrt{\text{س}}}}{\text{٢}\sqrt{\text{س}}} + \frac{\sqrt{\text{هـ}^{\text{س}}}}{\text{٢}}$

(هـ) $\text{ص} = \text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س})$

الحل $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\frac{\text{١}}{\text{س}}}{\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}} = \frac{\text{١}}{\text{س}\ \text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}}$

(و) $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{هـ}^{\text{س}}}$

الحل $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{هـ}^{\text{هـ}^{\text{س}}} . \text{هـ}^{\text{س}}$

(ز) $\text{ص} = \text{هـ}^{\sqrt{\text{س}}}\ \text{لـو}_{\text{هـ}}\sqrt{\text{س}}$

الحل $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{هـ}^{\sqrt{\text{س}}} . \frac{\frac{\text{١}}{\text{٢}\sqrt{\text{س}}}}{\sqrt{\text{س}}} + \text{لـو}_{\text{هـ}}\sqrt{\text{س}} . \text{هـ}^{\sqrt{\text{س}}} \frac{\text{١}}{\text{٢}\sqrt{\text{س}}} = \frac{\text{هـ}^{\sqrt{\text{س}}}}{\text{٢س}} + \frac{\text{هـ}^{\sqrt{\text{س}}}}{\text{٢}\sqrt{\text{س}}}\ \text{لـو}_{\text{هـ}}\sqrt{\text{س}}$

(ح) $\text{ص} = (\text{٢س}+\text{١})^{\text{٢}}\ \text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{٢س}+\text{١})$

الحل $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = (\text{٢س}+\text{١})^{\text{٢}} . \frac{\text{٢}}{\text{٢س}+\text{١}} + \text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{٢س}+\text{١}) . \text{٢}(\text{٢س}+\text{١})\text{٢}$

$= (\text{٤س}+\text{٢}) + \text{٢}(\text{٤س}+\text{٢})\ \text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{٢س}+\text{١})$

$= (\text{٤س}+\text{٢})(\text{١}+\text{٢}\ \text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{٢س}+\text{١}))$

ط) $ص = \sqrt[3]{\text{لـو}_{هـ} س^{3}}$

الحل: $ص = \left(\text{لـو}_{هـ} س^{3}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(3\,\text{لـو}_{هـ} س\right)^{\frac{1}{3}}$

$$\frac{دص}{دس} = \frac{1}{3}\left(3\,\text{لـو}_{هـ} س\right)^{\frac{-2}{3}} \cdot \frac{3}{س} = \frac{\left(3\,\text{لـو}_{هـ} س\right)^{\frac{-2}{3}}}{س}$$

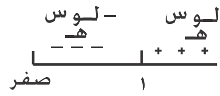
ي) $ص = \sqrt{هـ^{4س}} + \text{لـو}_{هـ} \frac{1}{س}$

الحل: $ص = هـ^{2س} - \text{لـو}_{هـ} س$

$$\frac{دص}{دس} = 2\,هـ^{2س} - \frac{1}{س}$$

ك) $ص = |\text{لـو}_{هـ} س|$

الحل: نعيد تعريف الاقتران دون استخدام رمز المطلق



$\text{لـو}_{هـ} س = \text{صفرا} \longrightarrow س = 1$

$$ص = \begin{cases} -\text{لـو}_{هـ} س &، \quad 0 < س < 1 \\ \text{لـو}_{هـ} س &، \quad س \geq 1 \end{cases}$$

$$\frac{دص}{دس} = \begin{cases} \frac{-1}{س} &، \quad 0 < س < 1 \\ \frac{1}{س} &، \quad س > 1 \\ \text{غير موجودة} &، \quad س = 1 \end{cases}$$

ل) $ص = \text{لـو}_{هـ} \sqrt{\frac{1-س}{1+س}}$

الحل: $ص = \text{لـو}_{هـ}\left(\frac{1-س}{1+س}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(\text{لـو}_{هـ}(1-س) - \text{لـو}_{هـ}(1+س)\right)$

$$\frac{دص}{دس} = \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{1-س} - \frac{1}{1+س}\right) = \frac{1}{س^{2}-1}$$

م) $ص = \text{لـو}_{هـ} \sqrt[4]{س^{2}+1}$

الحل: $ص = \text{لـو}_{هـ}|س^{2}+1|^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}\,\text{لـو}_{هـ}|س^{2}+1|$

$$\frac{دص}{دس} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2س}{س^{2}+1} = \frac{س}{2\,|س^{2}+1|}$$

ن) $ص = \left(هـ^{3س} - هـ^{-3س}\right)^{4}$

الحل: $\frac{دص}{دس} = 4\left(هـ^{3س} - هـ^{-3س}\right)^{3}\left(3\,هـ^{3س} + 3\,هـ^{-3س}\right)$

٢ جد مشتقة كل من الاقترانات الاتية :

أ) $\text{ص} = \text{هـ}^{٣} + \text{هـ}^{٢} + \text{هـ}$

الحل: $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{صفرا}$

ب) $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}} + \text{س}^{٢}$

الحل: $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{هـ}^{\text{س}} + ٢\text{س}$

---

٣ إذا كان $\text{ص} + \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س ص}) = ٣$ ، فجد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ عند النقطة $(\frac{١}{٣} ، ٣)$

الحل: $\text{ص} + \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} + \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} = ٣$

$\text{ص}' + \frac{١}{\text{س}} + \frac{\text{ص}'}{\text{ص}} = ٠$

عند النقطة $(\frac{١}{٣} ، ٣)$ ← $\text{ص}' + ٣ + \frac{\text{ص}'}{٣} = ٠$

← $\frac{٤}{٣}\text{ص}' = -٣$ ← $\text{ص}' = \frac{-٩}{٤}$

---

٤ إذا كان $\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٢} - ٢\text{س} - ٢$ ، فجد $\text{ق}'(٣)$

الحل: $\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٢} - ٢\text{س} - ٢$ ← $\text{ق}(\text{س}) = \text{هـ}^{(\text{س}^{٢} - ٢\text{س} - ٢)}$

$\text{ق}'(\text{س}) = \text{هـ}^{(\text{س}^{٢} - ٢\text{س} - ٢)} . (٢\text{س} - ٢)$ ← $\text{ق}'(٣) = \text{هـ}^{(٣^{٢} - ٢(٣) - ٢)} . (٢(٣) - ٢) = ٤\text{هـ}$

---

٥ إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{هـ}^{\text{جتا س}} + \text{لو}_{\text{هـ}}\left|\text{س} - \frac{\pi}{٤}\right|^{٣}$ ، فجد $\text{ق}'(\frac{\pi}{٢})$

الحل: $\text{ق}(\text{س}) = \text{هـ}^{\text{جتا س}} + ٣\,\text{لو}_{\text{هـ}}\left|\text{س} - \frac{\pi}{٤}\right|$

$\text{ق}'(\text{س}) = \text{هـ}^{\text{جتا س}} . -\text{جا س} + \frac{٣}{\text{س} - \frac{\pi}{٤}}$

$\text{ق}'(\frac{\pi}{٢}) = \text{هـ}^{\text{جتا}\frac{\pi}{٢}} . -\text{جا}\frac{\pi}{٢} + \frac{٣}{\frac{\pi}{٢} - \frac{\pi}{٤}} = \text{هـ}^{٠}(-١) + \frac{١٢}{\pi} = \frac{١٢}{\pi} - ١$

---

٦ إذا كان $\text{هـ}^{\text{س}+\text{ص}} = \text{س}$ ، فجد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ عندما $\text{س} = \frac{١}{٢}$

الحل: $\text{هـ}^{\text{س}+\text{ص}}(١ + \text{ص}') = ١$

← $\text{س}(١ + \text{ص}') = ١$ ($\text{هـ}^{\text{س}+\text{ص}} = \text{س}$)

← $١ + \text{ص}' = \frac{١}{\text{س}}$

← $\text{ص}' = \frac{١}{\text{س}} - ١$ ← $\text{ص}'\Big|_{\text{س} = \frac{١}{٢}} = \frac{١}{\frac{١}{٢}} - ١ = ١$

٧ إذا كان $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}^{٣}} \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س}^{٢}$ ، فجد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ حيث س > صفر

الحل

$\text{ص} = ٢\, \text{هـ}^{\text{س}^{٣}} \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س}$

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = ٢\, \text{هـ}^{\text{س}^{٣}} \cdot \frac{١}{\text{س}} + \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \cdot ٢\, \text{هـ}^{\text{س}^{٣}} \cdot ٣\text{س}^{٢} = \frac{٢\text{هـ}^{\text{س}^{٣}}}{\text{س}} + ٦\,\text{س}^{٢}\, \text{هـ}^{\text{س}^{٣}} \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س}$$

---

٨ إذا كان $\text{لو}_{\text{هـ}}^{(\text{س}-\text{ص})} = \text{هـ}^{\text{ص}}$ ، فجد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ عندما ص = صفرا .

الحل

$\text{لو}_{\text{هـ}}^{(\text{س}-\text{ص})} = \text{هـ}^{\text{ص}} \longrightarrow (\text{س}-\text{ص}) = \text{هـ}^{\text{هـ}^{\text{ص}}}$

باشتقاق طرفي المساواة $\longrightarrow ١ - \text{ص}' = \text{هـ}^{\text{هـ}^{\text{ص}}} \text{هـ}^{\text{ص}} \text{ص}'$

عندما ص = صفرا $\longrightarrow ١ - \text{ص}' = \text{هـ}^{\text{هـ}^{٠}} \text{هـ}^{٠} \text{ص}' \longrightarrow ١ - \text{ص}' = \text{هـ}\, \text{ص}'$

$\longrightarrow \text{ص}'(\text{هـ}+١) = ١ \longrightarrow \text{ص}' = \frac{١}{\text{هـ}+١}$

---

٩ إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{هـ}^{٥\text{س}} + \text{لو}_{\text{هـ}}(٣\text{س}+١)^{٢}$ ، حيث $\text{س} > \frac{-١}{٣}$ فجد $\text{ق}'(٠)$

الحل

$\text{ق}(\text{س}) = \text{هـ}^{٥\text{س}} + ٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}(٣\text{س}+١)$

$$\text{ق}'(\text{س}) = ٥\,\text{هـ}^{٥\text{س}} + ٢\,\frac{٣}{(٣\text{س}+١)} = ٥\,\text{هـ}^{٥\text{س}} + \frac{٦}{(٣\text{س}+١)}$$

$$\text{ق}'(٠) = ٥\,\text{هـ}^{٠} + \frac{٦}{(٣(٠)+١)} = ١١$$

---

١٠ إذا كان $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\left|\text{س} + \sqrt{\text{س}^{٢}+١}\right|$ ، فأثبت أن : $\text{ص}' = \frac{١}{\sqrt{\text{س}^{٢}+١}}$

الحل

$\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\left|\text{س} + \sqrt{\text{س}^{٢}+١}\right| \longrightarrow \text{هـ}^{\text{ص}} = \text{س} + \sqrt{\text{س}^{٢}+١}$

باشتقاق طرفي المساواة $\longrightarrow \text{هـ}^{\text{ص}}\text{ص}' = ١ + \frac{٢\text{س}}{٢\sqrt{\text{س}^{٢}+١}} \longrightarrow \text{هـ}^{\text{ص}}\text{ص}' = ١ + \frac{\text{س}}{\sqrt{\text{س}^{٢}+١}}$

$\longrightarrow \text{هـ}^{\text{ص}}\text{ص}' = \frac{\sqrt{\text{س}^{٢}+١} + \text{س}}{\sqrt{\text{س}^{٢}+١}}$

$\longrightarrow \text{هـ}^{\text{ص}}\text{ص}' = \frac{\text{هـ}^{\text{ص}}}{\sqrt{\text{س}^{٢}+١}}$ $\boxed{\text{هـ}^{\text{ص}} = \text{س} + \sqrt{\text{س}^{٢}+١}}$

$\longrightarrow \text{ص}' = \frac{١}{\sqrt{\text{س}^{٢}+١}}$

١١ إذا كان $\text{ص} = \text{جا} \left|\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\right|$ ، فأثبت أن : $\text{س}^{٢}\text{ص}'' + \text{س ص}' + \text{ص} = \text{صفرا}$.

(الحل)

$\text{ص}' = \text{جتا}\left|\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\right| \cdot \frac{١}{\text{س}}$

$\text{ص}'' = \text{جتا}\left|\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\right| \cdot \frac{-١}{\text{س}^{٢}} + \frac{١}{\text{س}} \cdot -\text{جا}\left|\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\right| \cdot \frac{١}{\text{س}} = \frac{-١}{\text{س}^{٢}} \left(\text{جتا}\left|\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\right| + \text{جا}\left|\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\right| \right)$

الطرف الأيمن : $\text{س}^{٢}\text{ص}'' + \text{س ص}' + \text{ص}$

$= \text{س}^{٢} \cdot \frac{-١}{\text{س}^{٢}} \left(\text{جتا}\left|\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\right| + \text{جا}\left|\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\right| \right) + \text{س جتا}\left|\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\right| \cdot \frac{١}{\text{س}} + \text{جا}\left|\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\right|$

$= -\text{جتا}\left|\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\right| - \text{جا}\left|\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\right| + \text{جتا}\left|\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\right| + \text{جا}\left|\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\right| = \text{صفرا}$

---

١٢ إذا كان $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{أس}} \text{ جا ب س}$ ، أ،ب $\in$ ح فأثبت أن: $\text{ص}'' - ٢\text{أ ص}' + \left(\text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢}\right) \text{ص} = \text{صفرا}$.

(الحل)

$\text{ص}' = \text{هـ}^{\text{أس}} \text{ جتا ب س} \cdot \text{ب} + \text{جا ب س هـ}^{\text{أس}} \text{ أ} = \text{ب هـ}^{\text{أس}} \text{ جتا ب س} + \text{أ هـ}^{\text{أس}} \text{ جا ب س}$

$\text{ص}'' = \text{ب هـ}^{\text{أس}} \cdot -\text{جا ب س} \cdot \text{ب} + \text{جتا ب س} \cdot \text{أ ب هـ}^{\text{أس}} + \text{أ جا ب س} \cdot \text{أ هـ}^{\text{أس}} + \text{هـ}^{\text{أس}} \cdot \text{أ ب جتا ب س}$

$= -\text{ب}^{٢}\text{هـ}^{\text{أس}} \text{ جا ب س} + ٢ \text{ أ ب هـ}^{\text{أس}} \text{ جتا ب س} + \text{أ}^{٢}\text{هـ}^{\text{أس}} \text{ جا ب س}$

الطرف الأيمن : $\text{ص}'' - ٢\text{أ ص}' + \left(\text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢}\right) \text{ص}$

$= -\text{ب}^{٢}\text{هـ}^{\text{أس}} \text{ جا ب س} + ٢ \text{ أ ب هـ}^{\text{أس}} \text{ جتا ب س} + \text{أ}^{٢}\text{هـ}^{\text{أس}} \text{ جا ب س} - ٢\text{أ}\left(\text{ب هـ}^{\text{أس}} \text{ جتا ب س} + \text{أ هـ}^{\text{أس}} \text{ جا ب س}\right)$
$+ \left(\text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢}\right) \text{هـ}^{\text{أس}} \text{ جا ب س}$

$= -\text{ب}^{٢}\text{هـ}^{\text{أس}} \text{ جا ب س} + ٢ \text{ أ ب هـ}^{\text{أس}} \text{ جتا ب س} + \text{أ}^{٢}\text{هـ}^{\text{أس}} \text{ جا ب س} - ٢ \text{ أ ب هـ}^{\text{أس}} \text{ جتا ب س}$

$- ٢\text{أ}^{٢}\text{هـ}^{\text{أس}} \text{ جا ب س} + \text{أ}^{٢}\text{هـ}^{\text{أس}} \text{ جا ب س} + \text{ب}^{٢}\text{هـ}^{\text{أس}} \text{ جا ب س}$

$= \text{صفرا}$

---

١٣ إذا كان $\text{هـ}^{\text{س ص}} = \text{س} + \text{ص}$ ، فأثبت أن : $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{١ - \text{س ص} - \text{ص}^{٢}}{\text{س}^{٢} + \text{س ص} - ١}$

(الحل)

$\text{هـ}^{\text{س ص}} \left(\text{س ص}' + \text{ص} \right) = ١ + \text{ص}'$

$\text{س هـ}^{\text{س ص}} \text{ص}' + \text{ص هـ}^{\text{س ص}} = ١ + \text{ص}' \longleftarrow \text{س هـ}^{\text{س ص}} \text{ص}' - \text{ص}' = ١ - \text{ص هـ}^{\text{س ص}}$

$\longleftarrow \text{ص}' \left(\text{س هـ}^{\text{س ص}} - ١ \right) = ١ - \text{ص هـ}^{\text{س ص}}$

$\text{ص}' = \frac{١ - \text{ص هـ}^{\text{س ص}}}{\text{س هـ}^{\text{س ص}} - ١}$ ، $\boxed{\text{هـ}^{\text{س ص}} = \text{س} + \text{ص}}$

$= \frac{١ - \text{ص} \left(\text{س} + \text{ص} \right)}{\text{س} \left(\text{س} + \text{ص} \right) - ١} = \frac{١ - \text{س ص} - \text{ص}^{٢}}{\text{س}^{٢} + \text{س ص} - ١}$

١٤ إذا كان $ص = لـو_{هـ} \sqrt{\frac{١ + جا س}{١ - جا س}}$ ، فاثبت أن : $\frac{د ص}{د س} = قا س$

الحل

$ص = لـو_{هـ} \left(\frac{١ + جا س}{١ - جا س}\right)^{\frac{١}{٢}} = \frac{١}{٢} لـو_{هـ} \left(\frac{١ + جا س}{١ - جا س}\right)$

$= \frac{١}{٢}\left(لـو_{هـ} (١ + جا س) - لـو_{هـ} (١ - جا س)\right)$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{١}{٢}\left(\frac{جتا س}{١ + جا س} - \frac{- جتا س}{١ - جا س}\right)$

$= \frac{١}{٢} \cdot \frac{(جتا س (١ - جا س) + جتا س (١ + جا س))}{١ - جا^٢ س} = \frac{١}{٢} \cdot \frac{٢ جتا س}{جتا^٢ س}$

$= \frac{١}{جتا س} = قا س$

---

١٥ إذا كان $ص = لـو_{هـ} ظا \left|\frac{س}{٢}\right|$ ، فأثبت أن : $\frac{د ص}{د س} = قتا س$.

الحل

$\frac{د ص}{د س} = \frac{قا^٢ \left|\frac{س}{٢}\right| \cdot \frac{١}{٢}}{ظا \left|\frac{س}{٢}\right|}$

$= \frac{١}{٢} \cdot \frac{جتا \left|\frac{س}{٢}\right|}{جتا^٢ \left|\frac{س}{٢}\right| جا \left|\frac{س}{٢}\right|} = \frac{١}{٢ جا \left|\frac{س}{٢}\right| جتا \left|\frac{س}{٢}\right|} = \frac{١}{جا س} = قتا س$

---

١٦ إذا كان $ص = لـو_{س} هـ$ ، فأثبت أن : $ص^٢ + س ص' = صفرا$.

الحل

$ص = \frac{١}{لـو_{هـ} س}$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{\frac{-١}{س}}{\left(لـو_{هـ} س\right)^٢} = \frac{-١}{س \left(لـو_{هـ} س\right)^٢}$

الطرف الأيمن : $ص^٢ + س ص'$

$= \left(\frac{١}{لـو_{هـ} س}\right)^٢ + س \cdot \frac{-١}{س \left(لـو_{هـ} س\right)^٢} = \frac{١}{\left(لـو_{هـ} س\right)^٢} - \frac{١}{\left(لـو_{هـ} س\right)^٢} = صفرا$.

---

١٧ إذا كان $ص = أ هـ^{جـ س} + ب هـ^{-جـ س}$ ، فأثبت أن : $ص'' = جـ^٢ ص$

الحل

$ص' = أ جـ هـ^{جـ س} - ب جـ هـ^{-جـ س}$

$ص'' = أ جـ^٢ هـ^{جـ س} + ب جـ^٢ هـ^{-جـ س}$

$= جـ^٢ \left(أ هـ^{جـ س} + ب هـ^{-جـ س}\right) = جـ^٢ ص$

١٨ جد التكاملات الاتية :

(أ) $\int \frac{\text{س}^{٣} + \text{س}}{\text{س}^{٤} + ٢\,\text{س}^{٢} + ٣} \,.\, \text{د س}$

(الحل) $\int \frac{\text{س}^{٣} + \text{س}}{\text{س}^{٤} + ٢\,\text{س}^{٢} + ٣} \,.\, \text{د س} = \frac{١}{٤} \int \frac{٤\,(\text{س}^{٣} + \text{س})}{\text{س}^{٤} + ٢\,\text{س}^{٢} + ٣} \,.\, \text{د س} = \frac{١}{٤} \int \frac{٤\,\text{س}^{٣} + ٤\,\text{س}}{\text{س}^{٤} + ٢\,\text{س}^{٢} + ٣} \,.\, \text{د س}$

$= \frac{١}{٤}\, \text{لـو}_{\text{هـ}} \left| \text{س}^{٤} + ٢\,\text{س}^{٢} + ٣ \right| + \text{جـ}$

(ب) $\int \frac{\text{هـ}^{\text{س}} + \text{هـ}^{-\text{س}}}{\text{هـ}^{\text{س}} - \text{هـ}^{-\text{س}}} \,.\, \text{د س}$

(الحل) $\int \frac{\text{هـ}^{\text{س}} + \text{هـ}^{-\text{س}}}{\text{هـ}^{\text{س}} - \text{هـ}^{-\text{س}}} \,.\, \text{د س} = \text{لـو}_{\text{هـ}} \left| \text{هـ}^{\text{س}} - \text{هـ}^{-\text{س}} \right| + \text{جـ}$

(جـ) $\int \frac{١ + \text{ظا}^{٢}\text{س}}{\text{ظا س}} \,.\, \text{د س}$

(الحل) $\int \frac{١ + \text{ظا}^{٢}\text{س}}{\text{ظا س}} \,.\, \text{د س} = \int \frac{\text{قا}^{٢}\text{س}}{\text{ظا س}} \,.\, \text{د س} = \text{لـو}_{\text{هـ}} \left| \text{ظا س} \right| + \text{جـ}$

(د) $\int_{٠}^{\text{هـ}} \text{هـ}^{٣} \,.\, \text{د س}$

(الحل) $\int_{٠}^{\text{هـ}} \text{هـ}^{٣} \,.\, \text{د س} = \text{هـ}^{٣}\,(\text{هـ} - ٠) = \text{هـ}^{٤}$

(هـ) $\int \left(\frac{٢}{\text{س}} + ٣\,\text{هـ}^{\text{س}} \right) . \, \text{د س}$

(الحل) $\int \left(\frac{٢}{\text{س}} + ٣\,\text{هـ}^{\text{س}} \right) . \, \text{د س} = ٢\,\text{لـو}_{\text{هـ}} |\text{س}| + ٣\,\text{هـ}^{\text{س}} + \text{جـ}$

(و) $\int \text{هـ}^{٢\,\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}} \,.\, \text{د س}$

(الحل) $\int \text{هـ}^{٢\,\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}} \,.\, \text{د س} = \int \text{هـ}^{\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}^{٢}} \,.\, \text{د س} = \int \text{س}^{٢} \,.\, \text{د س} = \frac{\text{س}^{٣}}{٣} + \text{جـ}$

(ز) $\int \left(\text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{هـ}^{\text{س}} + \text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{هـ}^{-\text{س}} \right) . \, \text{د س}$

(الحل) $\int \left(\text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{هـ}^{\text{س}} + \text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{هـ}^{-\text{س}} \right) . \, \text{د س} = \int (\text{س} - \text{س}) \,.\, \text{د س} = \int \text{صفر} \,.\, \text{د س} = \text{جـ}$

(ح) $\int \text{هـ}^{٥ + \text{لـو}_{\text{هـ}}(٣\,\text{س}^{٢})} \,.\, \text{د س}$

(الحل) $\int \text{هـ}^{٥ + \text{لـو}_{\text{هـ}}(٣\,\text{س}^{٢})} \,.\, \text{د س} = \int \text{هـ}^{٥}\, \text{هـ}^{\text{لـو}_{\text{هـ}}(٣\,\text{س}^{٢})} \,.\, \text{د س} = \int \text{هـ}^{٥}(٣\,\text{س}^{٢}) \,.\, \text{د س} = \text{هـ}^{٥}\,\text{س}^{٣} + \text{جـ}$

١٩ جد التكاملين الاتيين :

(أ) $\int$ قا س . د س

(الحل)

$\int$ قا س . د س = $\int \frac{\text{قا س (قا س + ظا س)}}{\text{(قا س + ظا س)}}$. د س = $\int \frac{\text{قا س ظا س + قا}^2\text{س}}{\text{(قا س + ظا س)}}$. د س

= لو$_{هـ}$ | قا س + ظا س | + جـ

(ب) $\int$ قتا س . د س

(الحل)

$\int$ قتا س . د س = $\int \frac{\text{قتا س (قتا س - ظتا س)}}{\text{(قتا س - ظتا س)}}$. د س = $\int \frac{\text{قتا}^2\text{س - قتا س ظتا س}}{\text{(قتا س - ظتا س)}}$. د س

= لو$_{هـ}$ | قتا س - ظتا س | + جـ

---

٢٠ جد التكاملين الاتيين :

(أ) $\int_{هـ}^{هـ^2} \frac{\text{د س}}{\text{س لو}_{هـ}\text{س}}$

(الحل)

$\int_{هـ}^{هـ^2} \frac{\text{د س}}{\text{س لو}_{هـ}\text{س}} = \int_{هـ}^{هـ^2} \frac{\frac{1}{\text{س}}}{\text{لو}_{هـ}\text{س}}$. د س = لو$_{هـ}$ | لو$_{هـ}$ س | $\Big]_{هـ}^{هـ^2}$

= لو$_{هـ}$ (لو$_{هـ}$ هـ^2) - لو$_{هـ}$ (لو$_{هـ}$ هـ) = لو$_{هـ}$ ٢ - لو$_{هـ}$ ١ (صفر) = لو$_{هـ}$ ٢

(ب) $\int_{هـ^2}^{هـ^4} \frac{\text{د س}}{\text{س لو}_{هـ}\text{س . لو}_{هـ}\text{(لو}_{هـ}\text{س)}}$

(الحل)

$\int_{هـ^2}^{هـ^4} \frac{\text{د س}}{\text{س لو}_{هـ}\text{س . لو}_{هـ}\text{(لو}_{هـ}\text{س)}} = \int_{هـ^2}^{هـ^4} \frac{\frac{1}{\text{س لو}_{هـ}\text{س}}}{\text{لو}_{هـ}\text{(لو}_{هـ}\text{س)}}$. د س = لو$_{هـ}$ | لو$_{هـ}$ (لو$_{هـ}$ س) | $\Big]_{هـ^2}^{هـ^4}$

= لو$_{هـ}$ (لو$_{هـ}$ (لو$_{هـ}$ هـ^4)) - لو$_{هـ}$ (لو$_{هـ}$ (لو$_{هـ}$ هـ^2)) = لو$_{هـ}$ (لو$_{هـ}$ ٤) - لو$_{هـ}$ (لو$_{هـ}$ ٢)

= لو$_{هـ}$ | $\frac{\text{لو}_{هـ}\text{٤}}{\text{لو}_{هـ}\text{٢}}$ | = لو$_{هـ}$ | $\frac{\text{٢ لو}_{هـ}\text{٢}}{\text{لو}_{هـ}\text{٢}}$ | = لو$_{هـ}$ ٢

---

٢١ جد $\int$ هـ^{2س} (٣ + هـ$^{-س}$) . د س

(الحل)

$\int$ هـ^{2س} (٣ + هـ$^{-س}$) . د س = $\int$ (٣ هـ^{2س} + هـ^{س}) . د س = $\frac{3}{2}$ هـ^{2س} + هـ^{س} + جـ

٢٢ جد $\int_{0}^{1} \left(2\,\text{لـو}_{\text{هـ}} \left(\text{هـ}^{2\text{س}} \left(\text{هـ}^{\text{س}} \right)^{3} \right) + 3\,\text{هـ}^{\text{لـو}_{\text{هـ}} 1} \right) .\,\text{د س}$

الحل

$\int_{0}^{1} \left(2\,\text{لـو}_{\text{هـ}} \left(\text{هـ}^{2\text{س}} \left(\text{هـ}^{\text{س}} \right)^{3} \right) + 3\,\text{هـ}^{\text{لـو}_{\text{هـ}} 1} \right) .\,\text{د س} = \int_{0}^{1} \left(2\,\text{لـو}_{\text{هـ}} \left(\text{هـ}^{2\text{س}} .\, \text{هـ}^{3\text{س}} \right) + 3\,\text{هـ}^{0} \right) .\,\text{د س}$

$= \int_{0}^{1} \left(2\,\text{لـو}_{\text{هـ}} \left(\text{هـ}^{5\text{س}} \right) + 3 \right) .\,\text{د س} = \int_{0}^{1} \left(10\,\text{س} + 3 \right) .\,\text{د س} = \left(5\,\text{س}^{2} + 3\,\text{س} \right) \Big|_{0}^{1}$

$= 5(1)^{2} + 3(1) - \left(5(0)^{2} + 3(0) \right) = 8$

---

٢٣ جد $\int_{-1}^{1} \left| \text{هـ}^{\text{س}} - 1 \right| .\,\text{د س}$

الحل نعيد تعريف اقتران القيمة المطلقة دون استخدام رمز المطلق .

$\text{هـ}^{\text{س}} - 1 = 0 \longleftarrow \text{س} = 0$

$1 - \text{هـ}^{\text{س}}$ − − − | + + + $\text{هـ}^{\text{س}} - 1$ (عند 0)

$\int_{-1}^{1} \left| \text{هـ}^{\text{س}} - 1 \right| .\,\text{د س} = \int_{-1}^{0} \left(1 - \text{هـ}^{\text{س}} \right) .\,\text{د س} + \int_{0}^{1} \left(\text{هـ}^{\text{س}} - 1 \right) .\,\text{د س}$

$= \left(\text{س} - \text{هـ}^{\text{س}} \right) \Big|_{-1}^{0} + \left(\text{هـ}^{\text{س}} - \text{س} \right) \Big|_{0}^{1}$

$= \left(0 - \text{هـ}^{0} \right) - \left(-1 - \text{هـ}^{-1} \right) + \left(\text{هـ}^{1} - 1 \right) - \left(\text{هـ}^{0} - 0 \right) = \text{هـ}^{-1} + \text{هـ} - 2$

---

٢٤ جد $\int \frac{\text{هـ}^{4\text{س}} - 1}{\text{هـ}^{\text{س}} - 1} .\,\text{د س}$

الحل

$\int \frac{\text{هـ}^{4\text{س}} - 1}{\text{هـ}^{\text{س}} - 1} .\,\text{د س} = \int \frac{\left(\text{هـ}^{\text{س}} \right)^{4} - 1}{\text{هـ}^{\text{س}} - 1} .\,\text{د س} = \int \frac{\left(\text{هـ}^{\text{س}} - 1 \right)\left(\text{هـ}^{3\text{س}} + \text{هـ}^{2\text{س}} + \text{هـ}^{\text{س}} + 1 \right)}{\text{هـ}^{\text{س}} - 1} .\,\text{د س}$

$= \int \left(\text{هـ}^{3\text{س}} + \text{هـ}^{2\text{س}} + \text{هـ}^{\text{س}} + 1 \right) .\,\text{د س} = \frac{1}{3}\,\text{هـ}^{3\text{س}} + \frac{1}{2}\,\text{هـ}^{2\text{س}} + \text{هـ}^{\text{س}} + \text{س} + \text{جـ}$

---

٢٥ جد $\int \frac{\text{هـ}^{2\text{س}} - 2\,\text{هـ}^{\text{س}} - 3}{\text{هـ}^{\text{س}} - 3} .\,\text{د س}$

الحل

$\int \frac{\text{هـ}^{2\text{س}} - 2\,\text{هـ}^{\text{س}} - 3}{\text{هـ}^{\text{س}} - 3} .\,\text{د س} = \int \frac{\left(\text{هـ}^{\text{س}} \right)^{2} - 2\,\text{هـ}^{\text{س}} - 3}{\text{هـ}^{\text{س}} - 3} .\,\text{د س} = \int \frac{\left(\text{هـ}^{\text{س}} - 3 \right)\left(\text{هـ}^{\text{س}} + 1 \right)}{\text{هـ}^{\text{س}} - 3} .\,\text{د س}$

$= \int -\left(\text{هـ}^{\text{س}} + 1 \right) .\,\text{د س} = -\left(\text{هـ}^{\text{س}} + \text{س} \right) + \text{جـ}$

---

٢٦ جد $\int \left(\text{هـ}^{\text{س}} + \text{هـ}^{-\text{س}} \right)^{2} .\,\text{د س}$

الحل

$\int \left(\text{هـ}^{\text{س}} + \text{هـ}^{-\text{س}} \right)^{2} .\,\text{د س} = \int \left(\text{هـ}^{2\text{س}} + 2\,\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{هـ}^{-\text{س}} + \text{هـ}^{-2\text{س}} \right) .\,\text{د س} = \int \left(\text{هـ}^{2\text{س}} + 2 + \text{هـ}^{-2\text{س}} \right) .\,\text{د س}$

$= \frac{1}{2}\,\text{هـ}^{2\text{س}} + 2\,\text{س} - \frac{1}{2}\,\text{هـ}^{-2\text{س}} + \text{جـ}$

٢٧ جد $\int_{2}^{4} \frac{د س}{1 - هـ^{-س}}$

الحل

$$\int_{2}^{4} \frac{د س}{1 - هـ^{-س}} = \int_{2}^{4} \frac{د س}{1 - هـ^{-س}} \cdot \frac{هـ^{س}}{هـ^{س}} = \int_{2}^{4} \frac{هـ^{س}}{هـ^{س} - 1} . د س = لو_{هـ} \left| هـ^{س} - 1 \right| \Big|_{2}^{4}$$

$$= لو_{هـ}(هـ^{4} - 1) - لو_{هـ}(هـ^{2} - 1) = لو_{هـ}\left(\frac{هـ^{4} - 1}{هـ^{2} - 1}\right) = لو_{هـ}\left(\frac{(هـ^{2} - 1)(هـ^{2} + 1)}{هـ^{2} - 1}\right)$$

$$= لو_{هـ}(هـ^{2} + 1)$$

---

٢٨ جد $\int_{4}^{9} \frac{د س}{\sqrt{س}\,(\sqrt{س} + 1)}$

الحل

$$\int_{4}^{9} \frac{د س}{\sqrt{س}\,(\sqrt{س} + 1)} = 2\int_{4}^{9} \frac{\frac{1}{2\sqrt{س}}}{\sqrt{س} + 1} . د س = 2\, لو_{هـ} \left| \sqrt{س} + 1 \right| \Big|_{4}^{9}$$

$$= 2\left(لو_{هـ}(\sqrt{9} + 1) - لو_{هـ}(\sqrt{4} + 1)\right) = 2\left(لو_{هـ}4 - لو_{هـ}3\right) = 2\, لو_{هـ}\frac{4}{3}$$

---

٢٩ جد $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{جتا س . د س}{2 - جا س}$

الحل

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{جتا س . د س}{2 - جا س} = -\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{-جتا س . د س}{2 - جا س} = -لو_{هـ} \left| 2 - جا س \right| \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -\left(لو_{هـ}\left|2 - جا \frac{\pi}{2}\right| - لو_{هـ}\left|2 - جا \frac{\pi}{6}\right|\right) = -\left(لو_{هـ}(2 - 1) - لو_{هـ}\left(2 - \frac{1}{2}\right)\right)$$

$$= -\left(لو_{هـ}1 - لو_{هـ}\frac{3}{2}\right) = لو_{هـ}\frac{3}{2}$$

---

٣٠ إذا كان $ص = أ\, هـ^{2س} + جا\,(لو_{هـ} س)$ حيث أ ثابت وكان $ص'' \Big|_{س = 1} = 2هـ^{3} - 1$

فجد قيمة أ .

الحل

$$ص' = 2أ\, هـ^{2س} + جتا\,(لو_{هـ} س) \cdot \frac{1}{س}$$

$$ص'' = 4أ\, هـ^{2س} + جتا\,(لو_{هـ} س) \cdot \frac{-1}{س^{2}} + \frac{1}{س} \cdot -جا\,(لو_{هـ} س)\, \frac{1}{س}$$

$$ص'' = 4أ\, هـ^{2س} + \frac{-1}{س^{2}}\left(جتا\,(لو_{هـ} س) + جا\,(لو_{هـ} س)\right)$$

$$ص'' \Big|_{س = 1} = 4أ\, هـ^{2(1)} + \frac{-1}{(1)^{2}}\left(جتا\,(لو_{هـ} 1) + جا\,(لو_{هـ} 1)\right)$$

$$= 4أ\, هـ^{2} - \left(جتا\, صفر + جا\, صفر\right) = 2هـ^{3} - 1$$

$$\longleftarrow 4أ\, هـ^{2} - 1 = 2هـ^{3} - 1$$

$$\longleftarrow 4أ\, هـ^{2} = 2هـ^{3} \longleftarrow 2أ = هـ \longleftarrow أ = \frac{هـ}{2}$$

٣١ إذا كان ص = هـ^(جـ س) فجد قيمة جـ التي تحقق المعادلة ص″ - ٣ ص′ + ٢ ص = ٠ .

(الحل)

ص′ = جـ هـ^(جـ س)

ص″ = جـ^٢ هـ^(جـ س)

ص″ - ٣ ص′ + ٢ ص = ٠ ⟵ جـ^٢ هـ^(جـ س) − ٣ جـ هـ^(جـ س) + ٢ هـ^(جـ س) = ٠

⟵ هـ^(جـ س) (جـ^٢ − ٣ جـ + ٢) = ٠

هـ^(جـ س) ≠ ٠ (جميع قوى العدد النيبيري ذات قيمة موجبة) ، (جـ^٢ − ٣ جـ + ٢) = ٠

⟵ (جـ - ٢) (جـ - ١) = ٠ ⟵ جـ = ٢، جـ = ١

---

٣٢ إذا كان س هـ^ص + ٢ س − لو_هـ (ص + ١) = ٣ ، فجد ص′ .

(الحل)

باشتقاق طرفي المساواة ضمنيا بالنسبة لـ س

س هـ^ص ص′ + هـ^ص (١) + ٢ − ص′ / (ص + ١) = ٠

ص′ (س هـ^ص − ١ / (ص + ١)) = - ٢ − هـ^ص

ص′ ((س هـ^ص (ص + ١) − ١) / (ص + ١)) = - ٢ − هـ^ص ⟵ ص′ = (- ٢ − هـ^ص)(ص + ١) / (س هـ^ص (ص + ١) − ١)

---

٣٣ إذا كان ∫ ق (س) . د س = س (جا (لو_هـ س) − جتا (لو_هـ س)) + جـ ، فجد ق′ (س)

(الحل)

د/د س ∫ ق (س) . د س = د/د س (س (جا (لو_هـ س) − جتا (لو_هـ س)) + جـ)

ق (س) = س (جتا (لو_هـ س) . ١/س + جا (لو_هـ س) . ١/س) + (جا (لو_هـ س) − جتا (لو_هـ س)) (١) + ٠

= س . ١/س (جتا (لو_هـ س) + جا (لو_هـ س)) + (جا (لو_هـ س) − جتا (لو_هـ س))

= جتا (لو_هـ س) + جا (لو_هـ س) + جا (لو_هـ س) − جتا (لو_هـ س) = ٢ جا (لو_هـ س)

ق′ (س) = ٢ جتا (لو_هـ س) . ١/س = ٢/س جتا (لو_هـ س)

---

٣٤ جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران ص = (س - ١) هـ^س + ٢ لو_هـ س + ٢ عند النقطة (١ ، ٢)

(الحل)

ميل المماس = د ص / د س = (س - ١) هـ^س + هـ^س (١) + ٢/س + ٠

عند النقطة (١ ، ٢) : د ص / د س = (١ - ١) هـ^١ + هـ^١ + ٢/١ = هـ + ٢

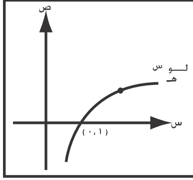
معادلة المماس : ص - ٢ = (هـ + ٢) (س - ١)

٣٥ إذا كان $ق(س) = هـ^{١-٢س} \cdot لو_{هـ} س$ ، فبدون حساب التكامل ما إشارة $\int_{\frac{١}{٢}}^{١} ق(س) \cdot د س$

الحل افرض $ق_١(س) = هـ^{١-٢س}$ ، $ق_٢(س) = لو_{هـ} س$ ⟵ $ق(س) = ق_١(س) ق_٢(س)$

$ق_١(س) = هـ^{١-٢س} > ٠$ لكل $س \in [\frac{١}{٢} ، ١]$ جميع قوى العدد النيبيري ذات قيمة موجبة

$ق_٢(س) = لو_{هـ} س \leq ٠$ لكل $س \in [\frac{١}{٢} ، ١]$ انظر الشكل المجاور



$ق(س) = ق_١(س) ق_٢(س) = هـ^{١-٢س} \cdot لو_{هـ} س \leq ٠$ لكل $س \in [\frac{١}{٢} ، ١]$

بما أن $ق(س) \leq ٠$ لكل $س \in [\frac{١}{٢} ، ١]$ ∴ $\int_{\frac{١}{٢}}^{١} ق(س) \cdot د س \leq$ صفر

---

٣٦ إذا علمت أن: $لو_{هـ} أ = ٩$ ، $لو_{هـ} جـ = ٥$ فجد التكاملات الآتية :

(أ) $\int_{١}^{\frac{أ}{جـ}} \frac{١}{س} \cdot د س$

الحل $\int_{١}^{\frac{أ}{جـ}} \frac{١}{س} \cdot د س = لو_{هـ} |س| \Big|_{١}^{\frac{أ}{جـ}} = لو_{هـ} \frac{أ}{جـ} - لو_{هـ} ١ = لو_{هـ} أ - لو_{هـ} جـ$

$= ٩ - ٥ = ٤$

(ب) $\int_{١}^{أجـ} \frac{١}{س} \cdot د س$

الحل $\int_{١}^{أجـ} \frac{١}{س} \cdot د س = لو_{هـ} |س| \Big|_{١}^{أجـ} = لو_{هـ} أجـ - لو_{هـ} ١ = لو_{هـ} أ + لو_{هـ} جـ$

$= ٩ + ٥ = ١٤$

(جـ) $\int_{١}^{\sqrt{أ}} \frac{١}{س} \cdot د س$

الحل $\int_{١}^{\sqrt{أ}} \frac{١}{س} \cdot د س = لو_{هـ} |س| \Big|_{١}^{\sqrt{أ}} = لو_{هـ} \sqrt{أ} - لو_{هـ} ١ = لو_{هـ} \sqrt{أ} = \frac{١}{٢} لو_{هـ} أ = \frac{٩}{٢}$

(د) $\int_{١}^{٢أ} \frac{١}{س} \cdot د س$

الحل $\int_{١}^{٢أ} \frac{١}{س} \cdot د س = لو_{هـ} |س| \Big|_{١}^{٢أ} = لو_{هـ} ٢أ - لو_{هـ} ١ = لو_{هـ} ٢ + لو_{هـ} أ = لو_{هـ} (٢) + ٩$

(هـ) $\int_{١}^{\frac{١}{جـ}} \frac{١}{س} \cdot د س$

الحل $\int_{١}^{\frac{١}{جـ}} \frac{١}{س} \cdot د س = لو_{هـ} |س| \Big|_{١}^{\frac{١}{جـ}} = لو_{هـ} \frac{١}{جـ} - لو_{هـ} ١ = لو_{هـ} ١ - لو_{هـ} جـ$

$= - لو_{هـ} جـ = -٥$

٣٧ جد $\int \frac{د س}{س^٣ - س}$

(الحل) $\int \frac{د س}{س^٣ - س} = \int \frac{د س}{س^٣ (١ - س^{-٢})} = \int \frac{س^{-٣}}{(١ - س^{-٢})} . د س$

$= \frac{١}{٢} \int \frac{٢ س^{-٣}}{(١ - س^{-٢})} . د س = \frac{١}{٢} لـو_هـ |١ - س^{-٢}| + جـ$

---

٣٨ جسم يتحرك في خط مستقيم بتسارع قدره :

$ت(ن) = ٤ - ٢(ن + ١) + \frac{٣}{ن + ١}$ قدم / ث^٢ حيث $٠ \leqslant ن \leqslant ٣$ ، جد سرعة الجسم عند أي لحظة ن في الفترة الزمنية [٠ ، ٣] علما بأن سرعة الجسم الابتدائية = ٢ قدم / ث .

(الحل) $ع(ن) = \int \left(٤ - ٢(ن + ١) + \frac{٣}{ن + ١}\right) . د ن$

$= ٤ ن - (ن + ١)^٢ + ٣ لـو_هـ |ن + ١| + جـ$

لكن $ع(٠) = ٢ \longrightarrow ٤(٠) - (٠ + ١)^٢ + ٣ لـو_هـ |٠ + ١| + جـ = ٢$

$\longrightarrow جـ = ٣$

$\therefore ع(ن) = ٤ ن - (ن + ١)^٢ + ٣ لـو_هـ (ن + ١) + ٣$ ، $٠ \leqslant ن \leqslant ٣$

---

٣٩ جسم يتحرك في خط مستقيم بتسارع قدره $ت(ن) = -(ن + ١)^{-٢}$ قدم / ث^٢ وكانت سرعته الابتدائية ٢ قدم / ث . احسب المسافة الكلية التي يقطعها الجسم في الفترة الزمنية [٠ ، ٤] .

(الحل) $ع(ن) = \int -(ن + ١)^{-٢} . د ن = \frac{-(ن + ١)^{-١}}{-١} + جـ = \frac{١}{(ن + ١)} + جـ$

لكن $ع(٠) = ٢ \longrightarrow \frac{١}{٠ + ١} + جـ = ٢ \longrightarrow جـ = ١$

$\therefore ع(ن) = \frac{١}{(ن + ١)} + ١$

المسافة الكلية التي يقطعها الجسم في الفترة الزمنية [٠ ، ٤]

$= \int_٠^٤ \left|\frac{١}{(ن + ١)} + ١\right| . د ن = \int_٠^٤ \left(\frac{١}{(ن + ١)} + ١\right) . د ن$

$= \left(لـو_هـ |ن + ١| + ن\right)_٠^٤$

$= لـو_هـ |٤ + ١| + ٤ - (لـو_هـ |٠ + ١| + ٠)$

$= ٤ + لـو_هـ ٥$ قدم

مشتقة $\text{أ}^{\text{ق(س)}}$ ، حيث أ عدد ثابت موجب و ق (س) قابل للإشتقاق

• لإيجاد مشتقة $\text{أ}^{\text{ق(س)}}$ نعيد كتابة $\text{أ}^{\text{ق(س)}}$ على الصورة المكافئة $\text{هـ}^{\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{أ}^{\text{ق(س)}}}$ ثم نشتق باستخدام القواعد المعروفة لدينا .

مثال إذا كان ص = $٨^{\text{س}}$ فجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$.

الحل

$\text{ص} = ٨^{\text{س}} = \text{هـ}^{\text{لـو}_{\text{هـ}}٨^{\text{س}}} = \text{هـ}^{\text{س لـو}_{\text{هـ}}٨}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{هـ}^{\text{س لـو}_{\text{هـ}}٨} \cdot \text{لـو}_{\text{هـ}}٨ = ٨^{\text{س}}\ \text{لـو}_{\text{هـ}}٨$

مثال إذا كان ص = $٢^{\text{جاس}}$ فجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$.

الحل

$\text{ص} = ٢^{\text{جاس}} = \text{هـ}^{\text{لـو}_{\text{هـ}}٢^{\text{جاس}}} = \text{هـ}^{\text{جاس لـو}_{\text{هـ}}٢}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{هـ}^{\text{جاس لـو}_{\text{هـ}}٢} \cdot \text{لـو}_{\text{هـ}}٢ \cdot \text{جتاس} = ٢^{\text{جاس}}\ \text{جتاس لـو}_{\text{هـ}}٢$

مثال إذا كان ص = $\text{أ}^{\text{ق(س)}}$ ، حيث أ عدد ثابت موجب و ق (س) قابل للإشتقاق

أثبت أن : $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{ص لـو}_{\text{هـ}}\text{أ} \cdot \text{ق}'\text{(س)}$

الحل

$\text{ص} = \text{أ}^{\text{ق(س)}} = \text{هـ}^{\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{أ}^{\text{ق(س)}}} = \text{هـ}^{\text{ق(س) لـو}_{\text{هـ}}\text{أ}}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{هـ}^{\text{ق(س) لـو}_{\text{هـ}}\text{أ}} \cdot \text{لـو}_{\text{هـ}}\text{أ} \cdot \text{ق}'\text{(س)} = \text{ص لـو}_{\text{هـ}}\text{أ} \cdot \text{ق}'\text{(س)}$

تكامل $\text{أ}^{\text{ق(س)}}$ ، حيث أ عدد موجب لا يساوي الواحد و ق (س) اقتران خطي

• لإيجاد تكامل $\text{أ}^{\text{ق(س)}}$ نعيد كتابة $\text{أ}^{\text{ق(س)}}$ على الصورة المكافئة $\text{هـ}^{\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{أ}^{\text{ق(س)}}}$ ثم نكامل باستخدام القواعد المعروفة لدينا .

مثال جد $\int ٥^{\text{س}} \cdot \text{دس}$

الحل

$٥^{\text{س}} = \text{هـ}^{\text{لـو}_{\text{هـ}}٥^{\text{س}}} = \text{هـ}^{\text{س لـو}_{\text{هـ}}٥}$

$\int ٥^{\text{س}} \cdot \text{دس} = \int \text{هـ}^{\text{س لـو}_{\text{هـ}}٥} \cdot \text{دس} = \frac{\text{هـ}^{\text{س لـو}_{\text{هـ}}٥}}{\text{لـو}_{\text{هـ}}٥} + \text{جـ} = \frac{٥^{\text{س}}}{\text{لـو}_{\text{هـ}}٥} + \text{جـ}$

مشتقة $لـو_أ$ ق (س) ، حيث أ عدد موجب لا يساوي واحد ، ق (س) > ٠ و قابل للإشتقاق

● لإيجاد مشتقة $لـو_أ$ ق (س) نعيد كتابة $لـو_أ$ ق (س) على الصورة المكافئة $\frac{لـو_{هـ} ق(س)}{لـو_{هـ} أ}$ ثم نشتق باستخدام القواعد المعروفة لدينا .

مثال إذا كان ص = $لـو_٢$ (٣ س^٢ + ١) ، فجد $\frac{د ص}{د س}$.

الحل

$$ص = \frac{لـو_{هـ} (٣ س^٢ + ١)}{لـو_{هـ} ٢}$$

$$\frac{د ص}{د س} = \frac{١}{لـو_{هـ} ٢} \cdot \frac{٦ س}{(٣ س^٢ + ١)} = \frac{٦ س}{(٣ س^٢ + ١) لـو_{هـ} ٢}$$

مثال إذا كان ص = $لـو_{١٠}$ هـ^{س} ، فجد $\frac{د ص}{د س}$.

الحل

$$ص = لـو_{١٠} هـ^{س} = س لـو_{١٠} هـ$$

$$\frac{د ص}{د س} = لـو_{١٠} هـ$$

طرق التكامل

في كثير من الأحيان نصادف تكاملات لا يمكن حسابها باستخدام قواعد التكامل السابقة . لذلك لا بد من استخدام طرق أخرى تحول هذه التكاملات إلى صورة قابلة للحل بإحدى القواعد المعروفة لدينا .

والطرق التي سندرسها هي :

١ _ طريقة التكامل بالكسور الجزئية .

٢ _ طريقة التكامل بالتعويض .

٣ _ طريقة التكامل بالأجزاء .

تكامل الاقترانات النسبية

تذكر :

يسمى ق (س) اقترانا نسبيا إذا أمكن كتابته على الصورة ق (س) = $\frac{م(س)}{ل(س)}$ حيث م (س) ، ل (س) كثيرا حدود .

التكامل بالكسور الجزئية

افرض أن $\frac{م(س)}{ل(س)}$ اقتران نسبي ، وأردنا إجراء التكامل $\int \frac{م(س)}{ل(س)}$. د س

سنواجه حالتين :

في الحالة الأولى تكون درجة م أقل من درجة ل .

وفي الحالة الثانية تكون درجة م أكبر أو تساوي درجة ل .

- لإجراء التكامل في الحالة الأولى نحلل المقام ل (س) إلى عوامله، ونكتب الاقتران النسبي $\frac{م(س)}{ل(س)}$ كمجموع لكسور جزئية ثم نجري التكامل. والمثال الاتي يوضح طريقة الحل .

مثال جد $\int \frac{٥ س - ١٠}{س^٢ - ٣ س - ٤}$. د س

الحل نحلل مقام الاقتران النسبي إلى عوامله .

$$\frac{٥ س - ١٠}{س^٢ - ٣ س - ٤} = \frac{٥ س - ١٠}{(س - ٤)(س + ١)}$$

نكتب الاقتران النسبي على أنه جمع كسرين جزئيين على النحو :

$$\frac{٥ س - ١٠}{(س - ٤)(س + ١)} = \frac{أ}{س - ٤} + \frac{ب}{س + ١}$$

ولكي نجد قيمة المجهولين أ و ب نعود لجمع الكسرين في الطرف الأيسر لنحصل على المعادلة :

$$\frac{٥ س - ١٠}{(س - ٤)(س + ١)} = \frac{أ(س + ١) + ب(س - ٤)}{(س - ٤)(س + ١)}$$

ويترتب على ذلك تحقق المتطابقة : ٥ س - ١٠ = أ (س + ١) + ب (س - ٤)

والان نجد قيمة كل من أ ، ب بإعطاء قيم محددة لـ س ولتكن أصفار مقام المكامل .

عندما س = - ١ : ٥ (- ١) - ١٠ = أ (- ١ + ١) + ب (- ١ - ٤)

⟵ - ١٥ = - ٥ ب ⟵ ب = ٣

عندما س = ٤ : ٥ (٤) - ١٠ = أ (٤ + ١) + ب (٤ - ٤)

⟵ ١٠ = ٥ أ ⟵ أ = ٢

إذن $\int \frac{\text{٥ س} - \text{١٠}}{\text{س}^{\text{٢}} - \text{٣ س} - \text{٤}} \,.\, \text{د س} = \int \frac{\text{٢}}{\text{س} - \text{٤}} \,.\, \text{د س} + \int \frac{\text{٣}}{\text{س} + \text{١}} \,.\, \text{د س}$

$= \text{٢} \,\text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س} - \text{٤}| + \text{٣} \,\text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س} + \text{١}| + \text{جـ}$

مثال جد $\int \frac{\text{د س}}{\text{س}^{\text{٢}} + \text{٤ س} - \text{٧٧}}$

الحل

$\frac{\text{١}}{\text{س}^{\text{٢}} + \text{٤ س} - \text{٧٧}} = \frac{\text{١}}{(\text{س} - \text{٧})(\text{س} + \text{١١})} = \frac{\text{أ}}{\text{س} - \text{٧}} + \frac{\text{ب}}{\text{س} + \text{١١}} = \frac{\text{أ}(\text{س} + \text{١١}) + \text{ب}(\text{س} - \text{٧})}{(\text{س} - \text{٧})(\text{س} + \text{١١})}$

$\longleftarrow \text{١} = \text{أ}(\text{س} + \text{١١}) + \text{ب}(\text{س} - \text{٧})$

بوضع س = - ١١ : $\text{١} = \text{أ}(-\text{١١} + \text{١١}) + \text{ب}(-\text{١١} - \text{٧}) \longleftarrow \text{ب} = \frac{\text{١}^{-}}{\text{١٨}}$

بوضع س = ٧ : $\text{١} = \text{أ}(\text{٧} + \text{١١}) + \text{ب}(\text{٧} - \text{٧}) \longleftarrow \text{أ} = \frac{\text{١}}{\text{١٨}}$

$\int \frac{\text{د س}}{\text{س}^{\text{٢}} + \text{٤ س} - \text{٧٧}} = \int \frac{\frac{\text{١}}{\text{١٨}}}{\text{س} - \text{٧}} \,.\, \text{د س} + \int \frac{\frac{\text{١}^{-}}{\text{١٨}}}{\text{س} + \text{١١}} \,.\, \text{د س}$

$= \frac{\text{١}}{\text{١٨}} \,\text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س} - \text{٧}| - \frac{\text{١}}{\text{١٨}} \,\text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س} + \text{١١}| + \text{جـ}$

مثال جد $\int \frac{\text{س}}{\text{٤ س}^{\text{٢}} + \text{٨ س} + \text{٣}} \,.\, \text{د س}$

الحل

$\frac{\text{س}}{\text{٤ س}^{\text{٢}} + \text{٨ س} + \text{٣}} = \frac{\text{س}}{(\text{٢س} + \text{١})(\text{٢س} + \text{٣})} = \frac{\text{أ}}{\text{٢ س} + \text{١}} + \frac{\text{ب}}{\text{٢ س} + \text{٣}} = \frac{\text{أ}(\text{٢س} + \text{٣}) + \text{ب}(\text{٢س} + \text{١})}{(\text{٢س} + \text{١})(\text{٢س} + \text{٣})}$

$\longleftarrow \text{س} = \text{أ}(\text{٢س} + \text{٣}) + \text{ب}(\text{٢س} + \text{١})$

بوضع س = $\frac{\text{٣}^{-}}{\text{٢}}$: $\frac{\text{٣}^{-}}{\text{٢}} = \text{أ}(\text{٢}(\frac{\text{٣}^{-}}{\text{٢}}) + \text{٣}) + \text{ب}(\text{٢}(\frac{\text{٣}^{-}}{\text{٢}}) + \text{١}) \longleftarrow \text{ب} = \frac{\text{٣}}{\text{٤}}$

بوضع س = $\frac{\text{١}^{-}}{\text{٢}}$: $\frac{\text{١}^{-}}{\text{٢}} = \text{أ}(\text{٢}(\frac{\text{١}^{-}}{\text{٢}}) + \text{٣}) + \text{ب}(\text{٢}(\frac{\text{١}^{-}}{\text{٢}}) + \text{١}) \longleftarrow \text{أ} = \frac{\text{١}^{-}}{\text{٤}}$

$\int \frac{\text{س}}{\text{٤ س}^{\text{٢}} + \text{٨ س} + \text{٣}} \,.\, \text{د س} = \int \frac{\frac{\text{١}^{-}}{\text{٤}}}{\text{٢ س} + \text{١}} \,.\, \text{د س} + \int \frac{\frac{\text{٣}}{\text{٤}}}{\text{٢ س} + \text{٣}} \,.\, \text{د س}$

$= \frac{\text{١}^{-}}{\text{٨}} \int \frac{\text{٢}}{\text{٢ س} + \text{١}} \,.\, \text{د س} + \frac{\text{٣}}{\text{٨}} \int \frac{\text{٢}}{\text{٢ س} + \text{٣}} \,.\, \text{د س}$

$= \frac{\text{١}^{-}}{\text{٨}} \,\text{لو}_{\text{هـ}} |\text{٢س} + \text{١}| + \frac{\text{٣}}{\text{٨}} \,\text{لو}_{\text{هـ}} |\text{٢س} + \text{٣}| + \text{جـ}$

مثال جد $\int_{0}^{2} \frac{س}{س^2 + ٥ س + ٦}$. د س

الحل

$\frac{س}{س^2 + ٥ س + ٦} = \frac{س}{(س + ٣)(س + ٢)} = \frac{أ}{س + ٣} + \frac{ب}{س + ٢} = \frac{أ(س + ٢) + ب(س + ٣)}{(س + ٣)(س + ٢)}$

← س = أ (س + ٢) + ب (س + ٣)

بوضع س = - ٢ : - ٢ = أ (- ٢ + ٢) + ب (-٢ + ٣) ← ب = - ٢

بوضع س = - ٣ : - ٣ = أ (- ٣ + ٢) + ب (- ٣ + ٣) ← أ = ٣

$\int_{0}^{2} \frac{س}{س^2 + ٥ س + ٦}$. د س = $\int_{0}^{2} \frac{٣}{س + ٣}$. د س + $\int_{0}^{2} \frac{- ٢}{س + ٢}$. د س

= ٣ لـوهـ | س + ٣ | $\Big|_{0}^{2}$ ـ ٢ لـوهـ | س + ٢ | $\Big|_{0}^{2}$

= ٣ (لـوهـ (٢ + ٣) ـ لـوهـ (٠ + ٣)) ـ ٢ (لـوهـ (٢ + ٢) ـ لـوهـ (٠ + ٢))

= ٣ (لـوهـ ٥ ـ لـوهـ ٣) ـ ٢ (لـوهـ ٤ ـ لـوهـ ٢) = لـوهـ ١٢٥ ـ لـوهـ ٢٧ ـ لـوهـ ١٦ + لـوهـ ٤

= لـوهـ $\frac{٥٠٠}{٤٣٢}$ = لـوهـ $\frac{١٢٥}{١٠٨}$

مثال جد $\int \frac{٥ س - ١٢}{س (س - ٤)}$. د س

الحل

$\frac{٥ س - ١٢}{س (س - ٤)} = \frac{أ}{س} + \frac{ب}{س - ٤} = \frac{أ (س - ٤) + ب س}{س (س - ٤)}$

← ٥ س - ١٢ = أ (س - ٤) + ب س

بوضع س = ٤ : ٥ (٤) - ١٢ = أ (٤ - ٤) + ب (٤) ← ب = ٢

بوضع س = ٠ : ٥ (٠) - ١٢ = أ (٠ - ٤) + ب (٠) ← أ = ٣

$\int \frac{٥ س - ١٢}{س (س - ٤)}$. د س = $\int \frac{٣}{س}$. د س + $\int \frac{٢}{س - ٤}$. د س

= ٣ لـوهـ | س | + ٢ لـوهـ | س - ٤ | + جـ

مثال جد $\int \frac{7}{(\text{س} - 2)(\text{س} + 5)} \, . \, \text{د س}$

الحل

$$\frac{7}{(\text{س} - 2)(\text{س} + 5)} = \frac{\text{أ}}{\text{س} - 2} + \frac{\text{ب}}{\text{س} + 5} = \frac{\text{أ}(\text{س} + 5) + \text{ب}(\text{س} - 2)}{(\text{س} - 2)(\text{س} + 5)}$$

$\longleftarrow \; 7 = \text{أ}(\text{س} + 5) + \text{ب}(\text{س} - 2)$

بوضع س = - ٥ : $7 = \text{أ}(-5 + 5) + \text{ب}(-5 - 2) \longleftarrow \text{ب} = -1$

بوضع س = ٢ : $7 = \text{أ}(2 + 5) + \text{ب}(2 - 2) \longleftarrow \text{أ} = 1$

$$\int \frac{7}{(\text{س} - 2)(\text{س} + 5)} \, . \, \text{د س} = \int \frac{1}{\text{س} - 2} \, . \, \text{د س} + \int \frac{-1}{\text{س} + 5} \, . \, \text{د س}$$

$$= \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س} - 2| - \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س} + 5| + \text{جـ}$$

$$= \text{لو}_{\text{هـ}} \left| \frac{\text{س} - 2}{\text{س} + 5} \right| + \text{جـ}$$

مثال أثبت أن : $\int \frac{\text{د س}}{(\text{س} + \text{أ})(\text{س} + \text{ب})} = \frac{1}{\text{ب} - \text{أ}} \, \text{لو}_{\text{هـ}} \left| \frac{\text{س} + \text{أ}}{\text{س} + \text{ب}} \right| + \text{جـ}$ ، $\text{أ} \neq \text{ب}$

الحل

$$\frac{1}{(\text{س} + \text{أ})(\text{س} + \text{ب})} = \frac{\text{م}}{\text{س} + \text{أ}} + \frac{\text{ل}}{\text{س} + \text{ب}} = \frac{\text{م}(\text{س} + \text{ب}) + \text{ل}(\text{س} + \text{أ})}{(\text{س} + \text{أ})(\text{س} + \text{ب})}$$

$\longleftarrow \; 1 = \text{م}(\text{س} + \text{ب}) + \text{ل}(\text{س} + \text{أ})$

بوضع س = - ب : $1 = \text{م}(-\text{ب} + \text{ب}) + \text{ل}(-\text{ب} + \text{أ}) \longleftarrow \text{ل} = \frac{1}{\text{أ} - \text{ب}}$

بوضع س = - أ : $1 = \text{م}(-\text{أ} + \text{ب}) + \text{ل}(-\text{أ} + \text{أ}) \longleftarrow \text{م} = \frac{1}{\text{ب} - \text{أ}}$

$$\int \frac{\text{د س}}{(\text{س} + \text{أ})(\text{س} + \text{ب})} = \int \frac{\frac{1}{\text{ب} - \text{أ}}}{\text{س} + \text{أ}} \, . \, \text{د س} + \int \frac{\frac{1}{\text{أ} - \text{ب}}}{\text{س} + \text{ب}} \, . \, \text{د س}$$

$$= \frac{1}{\text{ب} - \text{أ}} \int \frac{1}{\text{س} + \text{أ}} \, . \, \text{د س} - \frac{1}{\text{ب} - \text{أ}} \int \frac{1}{\text{س} + \text{ب}} \, . \, \text{د س}$$

$$= \frac{1}{\text{ب} - \text{أ}} \, \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س} + \text{أ}| - \frac{1}{\text{ب} - \text{أ}} \, \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س} + \text{ب}| + \text{جـ}$$

$$= \frac{1}{\text{ب} - \text{أ}} \, \text{لو}_{\text{هـ}} \left| \frac{\text{س} + \text{أ}}{\text{س} + \text{ب}} \right| + \text{جـ}$$

مثال جد $\int_{١}^{٥} \frac{١٦}{٩\text{س}^{٢} + ٦\text{س} + ١} . \text{د س}$

الحل

$$\int_{١}^{٥} \frac{١٦}{٩\text{س}^{٢} + ٦\text{س} + ١} . \text{د س} = \int_{١}^{٥} \frac{١٦}{(٣\text{س} + ١)(٣\text{س} + ١)} . \text{د س} = \int_{١}^{٥} \frac{١٦}{(٣\text{س} + ١)^{٢}} . \text{د س}$$

$$= ١٦ \int_{١}^{٥} (٣\text{س} + ١)^{-٢} . \text{د س} = ١٦ . \frac{(٣\text{س} + ١)^{-١}}{-١(٣)} \Big|_{١}^{٥}$$

$$= \frac{-١٦}{٣} . \frac{١}{٣\text{س} + ١} \Big|_{١}^{٥} = \frac{-١٦}{٣} \left(\frac{١}{٣(٥) + ١} - \frac{١}{٣(١) + ١} \right)$$

$$= \frac{-١٦}{٣} \left(\frac{١}{١٦} - \frac{١}{٤} \right) = \frac{-١٦}{٣} . \frac{-٣}{١٦} = ١$$

ملاحظة في بعض الحالات والتي يكون فيها بسط الاقتران النسبي هو مشتقة مقامه أو مشتقة مقامه مضروبا في عدد . يكون من الأسهل إجراء التكامل باستخدام القاعدة : $\int \frac{\text{ق}'(\text{س})}{\text{ق}(\text{س})} . \text{د س} = \text{لـو}_{\text{هـ}} |\text{ق}(\text{س})| + \text{جـ}$ بدلا من استخدام الكسور الجزئية .

مثال جد $\int \frac{٦\text{س} + ٥}{٣\text{س}^{٢} + ٥\text{س} - ١٧} . \text{د س}$

من غير المناسب استخدام الكسور الجزئية لإجراء التكامل . حيث بملاحظة أن البسط هو مشتقة المقام يمكن إجراء التكامل فورا باستخدام القاعدة السابقة .

الحل

$$\int \frac{٦\text{س} + ٥}{٣\text{س}^{٢} + ٥\text{س} - ١٧} . \text{د س} = \text{لـو}_{\text{هـ}} |٣\text{س}^{٢} + ٥\text{س} - ١٧| + \text{جـ}$$

مثال جد $\int \frac{٥\text{س} + ٢}{٥\text{س}^{٢} + ٤\text{س} - ٣} . \text{د س}$

الحل

$$\int \frac{٥\text{س} + ٢}{٥\text{س}^{٢} + ٤\text{س} - ٣} . \text{د س} = \frac{١}{٢} \int \frac{٢(٥\text{س} + ٢)}{٥\text{س}^{٢} + ٤\text{س} - ٣} . \text{د س}$$

$$= \frac{١}{٢} \int \frac{١٠\text{س} + ٤}{٥\text{س}^{٢} + ٤\text{س} - ٣} . \text{د س}$$

$$= \frac{١}{٢} \text{لـو}_{\text{هـ}} |٥\text{س}^{٢} + ٤\text{س} - ٣| + \text{جـ}$$

تكامل الاقتران النسبي $\frac{م(س)}{ل(س)}$ ، حيث درجة م أكبر أو تساوي درجة ل .

لإجراء تكامل الاقتران النسبي في هذه الحالة نستخدم القسمة الطويلة لقسمة البسط على المقام . لتعطينا الناتج كثير حدود ، مضافا إليه الباقي على المقسوم عليه (اقترانا نسبيا درجة بسطه أقل من درجة مقامه) .

حيث يكتب الاقتران المكامل على الصورة :

$\frac{م(س)}{ل(س)} = ك(س) + \frac{ر(س)}{ل(س)}$ حيث ك : الناتج ، ر: الباقي

وعليه فإن :

$\int \frac{م(س)}{ل(س)} \, د س = \int ك(س) \, د س + \int \frac{ر(س)}{ل(س)} \, د س$

تذكر

عند إجراء عملية القسمة الطويلة نرتب حدود البسط والمقام تنازليا (من القوة الكبرى إلى القوة الصغرى) .

مثال جد $\int \frac{٣س^٤ + ٣س^٣ - ٥س^٢ + س - ١}{س^٢ + س - ٢} \, د س$

الحل

$$\begin{array}{r|l} ٣س^٢ + ١ & \\ \hline ٣س^٤ + ٣س^٣ - ٥س^٢ + س - ١ & س^٢ + س - ٢ \\ \mp ٣س^٤ \mp ٣س^٣ \pm ٦س^٢ & \\ \hline س^٢ + س - ١ & \\ \mp س^٢ \mp س \pm ٢ & \\ \hline ١ & \end{array}$$

أجر عملية القسمة الطويلة لتحصل على :

$\frac{٣س^٤ + ٣س^٣ - ٥س^٢ + س - ١}{س^٢ + س - ٢} = ٣س^٢ + ١ + \frac{١}{س^٢ + س - ٢}$

جزيء $\frac{١}{س^٢ + س - ٢}$ إلى كسور

$\frac{١}{س^٢ + س - ٢} = \frac{١}{(س + ٢)(س - ١)} = \frac{أ}{س + ٢} + \frac{ب}{س - ١} = \frac{أ(س - ١) + ب(س + ٢)}{(س + ٢)(س - ١)}$

$\longleftarrow$ ١ = أ (س - ١) + ب (س + ٢)

ضع س = ١ : ١ = أ (١ - ١) + ب (١ + ٢) $\longrightarrow$ ب = $\frac{١}{٣}$

ضع س = - ٢ : ١ = أ (- ٢ - ١) + ب (- ٢ + ٢) $\longrightarrow$ أ = $\frac{-١}{٣}$

* $\int \frac{٣س^٤ + ٣س^٣ - ٥س^٢ + س - ١}{س^٢ + س - ٢} \, د س = \int \left(٣س^٢ + ١ + \frac{\frac{-١}{٣}}{س + ٢} + \frac{\frac{١}{٣}}{س - ١} \right) د س$

$= س^٣ + س - \frac{١}{٣} لـو_هـ |س + ٢| + \frac{١}{٣} لـو_هـ |س - ١| + جـ = س^٣ + س + \frac{١}{٣} لـو_هـ \left| \frac{س - ١}{س + ٢} \right| + جـ$

مثال جد $\int \frac{\text{س}^3 - 3\text{س}^2 + 2\text{س} - 3}{\text{س}^2 + 1} \, .\, \text{د س}$

الحل

$$\begin{array}{r|l} & \text{س} - 3 \\ \hline \text{س}^2 + 1 & \text{س}^3 - 3\text{س}^2 + 2\text{س} - 3 \\ & \mp \text{س}^3 \quad \mp \text{س} \\ \hline & -3\text{س}^2 + \text{س} - 3 \\ & \pm 3\text{س}^2 \quad \pm 3 \\ \hline & \text{س} \end{array}$$

$$\frac{\text{س}^3 - 3\text{س}^2 + 2\text{س} - 3}{\text{س}^2 + 1} = \text{س} - 3 + \frac{\text{س}}{\text{س}^2 + 1}$$

$$\int \frac{\text{س}^3 - 3\text{س}^2 + 2\text{س} - 3}{\text{س}^2 + 1} \, .\, \text{د س} = \int \left(\text{س} - 3 + \frac{\text{س}}{\text{س}^2 + 1} \right) .\, \text{د س}$$

$$= \int \left(\text{س} - 3 + \frac{1}{2} . \frac{2\text{س}}{\text{س}^2 + 1} \right) .\, \text{د س} = \frac{1}{2}\text{س}^2 - 3\text{س} + \frac{1}{2} \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س}^2 + 1| + \text{جـ}$$

مثال جد $\int \frac{\text{س} - \text{س}^3 + 2}{2\text{س}^2 + 8\text{س}} \, .\, \text{د س}$

الحل

نرتب حدود البسط والمقام تنازليا (من القوة الكبرى إلى القوة الصغرى) ثم نجري عملية القسمة الطويلة .

$$\begin{array}{r|l} & \frac{-1}{2}\text{س} + 2 \\ \hline 2\text{س}^2 + 8\text{س} & -\text{س}^3 \quad + \text{س} + 2 \\ & \pm \text{س}^3 \pm 4\text{س}^2 \\ \hline & 4\text{س}^2 + \text{س} + 2 \\ & \mp 4\text{س}^2 \mp 16\text{س} \\ \hline & -15\text{س} + 2 \end{array}$$

$$\frac{\text{س} - \text{س}^3 + 2}{2\text{س}^2 + 8\text{س}} = \frac{-\text{س}^3 + \text{س} + 2}{2\text{س}^2 + 8\text{س}} = \frac{-1}{2}\text{س} + 2 + \frac{-15\text{س} + 2}{2\text{س}^2 + 8\text{س}}$$

$$\frac{-15\text{س} + 2}{2\text{س}^2 + 8\text{س}} = \frac{-15\text{س} + 2}{2\text{س}(\text{س} + 4)} = \frac{\text{أ}}{2\text{س}} + \frac{\text{ب}}{\text{س} + 4} = \frac{\text{أ}(\text{س} + 4) + \text{ب}(2\text{س})}{2\text{س}(\text{س} + 4)}$$

$\longleftarrow \; -15\text{س} + 2 = \text{أ}(\text{س} + 4) + \text{ب}(2\text{س})$

بوضع س = − ٤ : $-15(-4) + 2 = \text{أ}(-4 + 4) + \text{ب}(2(-4)) \longrightarrow \text{ب} = \frac{62}{-8} = \frac{-31}{4}$

بوضع س = ٠ : $-15(0) + 2 = \text{أ}(0 + 4) + \text{ب}(2(0)) \longrightarrow \text{أ} = \frac{1}{2}$

$$\int \frac{\text{س} - \text{س}^3 + 2}{2\text{س}^2 + 8\text{س}} \, .\, \text{د س} = \int \left(\frac{-1}{2}\text{س} + 2 + \frac{\frac{1}{2}}{2\text{س}} + \frac{\frac{-31}{4}}{\text{س} + 4} \right) .\, \text{د س}$$

$$= \frac{-1}{4}\text{س}^2 + 2\text{س} + \frac{1}{4} \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س}| - \frac{31}{4} \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س} + 4| + \text{جـ}$$

مثال جد $\int \frac{3\text{س}^2}{(\text{س}-1)(3\text{س}-1)} \,.\, \text{د س}$

الحل

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ \hline 3\text{س}^2 - 4\text{س} + 1 & 3\text{س}^2 \\ & \mp 3\text{س}^2 \pm 4\text{س} \mp 1 \\ \hline & 4\text{س} - 1 \end{array}$$

$$\frac{3\text{س}^2}{(\text{س}-1)(3\text{س}-1)} = \frac{3\text{س}^2}{3\text{س}^2 - 4\text{س} + 1}$$

$$= 1 + \frac{4\text{س}-1}{3\text{س}^2 - 4\text{س} + 1}$$

$$\frac{4\text{س}-1}{3\text{س}^2 - 4\text{س} + 1} = \frac{4\text{س}-1}{(\text{س}-1)(3\text{س}-1)} = \frac{\text{أ}}{\text{س}-1} + \frac{\text{ب}}{3\text{س}-1} = \frac{\text{أ}(3\text{س}-1) + \text{ب}(\text{س}-1)}{(\text{س}-1)(3\text{س}-1)}$$

$\longrightarrow$ $4\text{س} - 1 = \text{أ}(3\text{س}-1) + \text{ب}(\text{س}-1)$

بوضع س $= \frac{1}{3}$: $4(\frac{1}{3}) - 1 = \text{أ}(3(\frac{1}{3}) - 1) + \text{ب}((\frac{1}{3}) - 1)$ $\longrightarrow$ $\text{ب} = \frac{-1}{2}$

بوضع س $= 1$: $4(1) - 1 = \text{أ}(3(1) - 1) + \text{ب}(1 - 1)$ $\longrightarrow$ $\text{أ} = \frac{3}{2}$

$$\int \frac{3\text{س}^2}{(\text{س}-1)(3\text{س}-1)} \,.\, \text{د س} = \int \left(1 + \frac{\frac{3}{2}}{\text{س}-1} + \frac{\frac{-1}{2}}{3\text{س}-1}\right) .\, \text{د س}$$

$$= \text{س} + \frac{3}{2}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}-1| - \frac{1}{6}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|3\text{س}-1| + \text{جـ}$$

مثال جد $\int \frac{3 + \text{س}^2}{2 - 3\text{س} + \text{س}^2} \,.\, \text{د س}$

الحل نرتب حدود البسط والمقام تنازليا (من القوة الكبرى إلى القوة الصغرى) ثم نجري عملية القسم الطويلة .

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ \hline \text{س}^2 - 3\text{س} + 2 & \text{س}^2 \quad + 3 \\ & \mp \text{س}^2 \pm 3\text{س} \mp 2 \\ \hline & 3\text{س} + 1 \end{array}$$

$$\frac{3 + \text{س}^2}{2 - 3\text{س} + \text{س}^2} = \frac{\text{س}^2 + 3}{\text{س}^2 - 3\text{س} + 2} = 1 + \frac{3\text{س} + 1}{\text{س}^2 - 3\text{س} + 2}$$

$$\frac{3\text{س}+1}{\text{س}^2 - 3\text{س} + 2} = \frac{3\text{س}+1}{(\text{س}-2)(\text{س}-1)} = \frac{\text{أ}}{\text{س}-2} + \frac{\text{ب}}{\text{س}-1} = \frac{\text{أ}(\text{س}-1) + \text{ب}(\text{س}-2)}{(\text{س}-2)(\text{س}-1)}$$

$\longrightarrow$ $3\text{س} + 1 = \text{أ}(\text{س}-1) + \text{ب}(\text{س}-2)$

بوضع س $= 1$: $3(1) + 1 = \text{أ}(1-1) + \text{ب}(1-2)$ $\longrightarrow$ $\text{ب} = -4$

بوضع س $= 2$: $3(2) + 1 = \text{أ}(2-1) + \text{ب}(2-2)$ $\longrightarrow$ $\text{أ} = 7$

$$\int \frac{3 + \text{س}^2}{2 - 3\text{س} + \text{س}^2} \,.\, \text{د س} = \int \left(1 + \frac{7}{\text{س}-2} + \frac{-4}{\text{س}-1}\right) .\, \text{د س}$$

$$= \text{س} + 7\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}-2| - 4\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}-1| + \text{جـ}$$

أمثلة متنوعة

١ جد $\int \left(\frac{\text{س} - ١}{\text{س} + ١}\right) . \text{د س}$

الحل

$$\int \frac{\text{س} - ١}{\text{س} + ١} . \text{د س} = \int \left(١ + \frac{-٢}{\text{س} + ١}\right) . \text{د س}$$

$$= \text{س} - ٢ \, \text{لـو}_{\text{هـ}} |\text{س} + ١| + \text{جـ}$$

القسمة: $(\text{س} - ١) \div (\text{س} + ١) = ١$ والباقي -٢

٢ جد $\int \left(\frac{\text{س} - ١}{\text{س} + ١}\right)^٢ . \text{د س}$

الحل

القسمة: $(\text{س} - ١) \div (\text{س} + ١) = ١$ والباقي -٢

$$\int \left(\frac{\text{س} - ١}{\text{س} + ١}\right)^٢ . \text{د س} = \int \left(١ + \frac{-٢}{\text{س} + ١}\right)^٢ . \text{د س} = \int \left(١ + \frac{-٤}{\text{س} + ١} + \frac{٤}{(\text{س} + ١)^٢}\right) . \text{د س}$$

$$= \int \left(١ + \frac{-٤}{\text{س} + ١} + ٤ (\text{س} + ١)^{-٢}\right) . \text{د س}$$

$$= \text{س} - ٤ \, \text{لـو}_{\text{هـ}} |\text{س} + ١| + \frac{٤ (\text{س} + ١)^{-١}}{-١} + \text{جـ}$$

$$= \text{س} - ٤ \, \text{لـو}_{\text{هـ}} |\text{س} + ١| - \frac{٤}{\text{س} + ١} + \text{جـ}$$

٣ جد $\int \left(\frac{\text{س}^٢ + ١}{\text{س} + ١}\right)^٢ . \text{د س}$

الحل

القسمة: $(\text{س}^٢ + ١) \div (\text{س} + ١) = \text{س} - ١$ والباقي ٢

$$\left(\frac{\text{س}^٢ + ١}{\text{س} + ١}\right)^٢ = \left((\text{س} - ١) + \frac{٢}{\text{س} + ١}\right)^٢ = (\text{س} - ١)^٢ + \frac{٤ (\text{س} - ١)}{\text{س} + ١} + \frac{٤}{(\text{س} + ١)^٢}$$

$$\int \left(\frac{\text{س}^٢ + ١}{\text{س} + ١}\right)^٢ . \text{د س} = \int \left((\text{س} - ١)^٢ + \frac{٤ (\text{س} - ١)}{\text{س} + ١} + \frac{٤}{(\text{س} + ١)^٢}\right) . \text{د س}$$

$$= \int \left((\text{س} - ١)^٢ + ٤ \, \frac{(\text{س} - ١)}{\text{س} + ١} + ٤ (\text{س} + ١)^{-٢}\right) . \text{د س}$$

بالإستعانة بالمثال (١)

$$= \frac{(\text{س} - ١)^٣}{٣} + ٤ \left(\text{س} - ٢ \, \text{لـو}_{\text{هـ}} |\text{س} + ١|\right) + \frac{٤ (\text{س} + ١)^{-١}}{-١} + \text{جـ}$$

$$= \frac{(\text{س} - ١)^٣}{٣} + ٤ \left(\text{س} - ٢ \, \text{لـو}_{\text{هـ}} |\text{س} + ١|\right) - \frac{٤}{\text{س} + ١} + \text{جـ}$$

٤ جد $\int \frac{\text{س}^{٢} + ١١\text{س} + ٣٠}{(\text{س} + ٥)^{٥}} \cdot \text{د س}$

الحل

$$\int \frac{\text{س}^{٢} + ١١\text{س} + ٣٠}{(\text{س} + ٥)^{٥}} \cdot \text{د س} = \int \frac{(\text{س} + ٦)(\text{س} + ٥)}{(\text{س} + ٥)^{٥}} \cdot \text{د س} = \int (\text{س} + ٦)(\text{س} + ٥)^{-٤} \cdot \text{د س}$$

$$= \int ((\text{س} + ٥) + ١)(\text{س} + ٥)^{-٤} \cdot \text{د س} = \int \left((\text{س} + ٥)^{-٣} + (\text{س} + ٥)^{-٤} \right) \cdot \text{د س}$$

$$= \frac{(\text{س} + ٥)^{-٢}}{-٢} + \frac{(\text{س} + ٥)^{-٣}}{-٣} + \text{جـ} = \frac{-١}{٢(\text{س} + ٥)^{٢}} + \frac{-١}{٣(\text{س} + ٥)^{٣}} + \text{جـ}$$

٥ جد $\int \frac{\text{س}^{٥} + ٣\text{س}^{٤}}{\text{س}^{٦} + ٨\text{س}^{٥} + ٧\text{س}^{٤}} \cdot \text{د س}$

الحل

$$\int \frac{\text{س}^{٥} + ٣\text{س}^{٤}}{\text{س}^{٦} + ٨\text{س}^{٥} + ٧\text{س}^{٤}} \cdot \text{د س} = \int \frac{\text{س}^{٤}(\text{س} + ٣)}{\text{س}^{٤}(\text{س}^{٢} + ٨\text{س} + ٧)} \cdot \text{د س}$$

$$\frac{\text{س} + ٣}{\text{س}^{٢} + ٨\text{س} + ٧} = \frac{\text{س} + ٣}{(\text{س} + ٧)(\text{س} + ١)} = \frac{\text{أ}}{\text{س} + ٧} + \frac{\text{ب}}{\text{س} + ١} = \frac{\text{أ}(\text{س} + ١) + \text{ب}(\text{س} + ٧)}{(\text{س} + ٧)(\text{س} + ١)}$$

$\leftarrow$ $\text{س} + ٣ = \text{أ}(\text{س} + ١) + \text{ب}(\text{س} + ٧)$

بوضع $\text{س} = -١$: $-١ + ٣ = \text{أ}(-١ + ١) + \text{ب}(-١ + ٧)$ $\leftarrow$ $\text{ب} = \frac{١}{٣}$

بوضع $\text{س} = -٧$: $-٧ + ٣ = \text{أ}(-٧ + ١) + \text{ب}(-٧ + ٧)$ $\leftarrow$ $\text{أ} = \frac{٢}{٣}$

$$\int \frac{\text{س}^{٥} + ٣\text{س}^{٤}}{\text{س}^{٦} + ٨\text{س}^{٥} + ٧\text{س}^{٤}} \cdot \text{د س} = \int \left(\frac{\frac{٢}{٣}}{\text{س} + ٧} + \frac{\frac{١}{٣}}{\text{س} + ١} \right) \cdot \text{د س}$$

$$= \frac{٢}{٣} \text{لـو}_{\text{هـ}} |\text{س} + ٧| + \frac{١}{٣} \text{لـو}_{\text{هـ}} |\text{س} + ١| + \text{جـ}$$

التكامل بالتعويض

إذا كان م اقترانا بدائيا للاقتران ق وكان هـ اقترانا قابلا للاشتقاق ، فيمكننا إجراء التكامل للاقتران المركب : $\int$ ق (هـ (س)) . هـَ (س) . د س كما يأتي :

افرض ص = هـ (س)

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{هـَ (س)} \longrightarrow \text{د ص} = \text{هـَ (س) . د س}$$

وبتعويض هذه المقادير في التكامل نحصل على :

$$\int \text{ق (هـ (س)) . هـَ (س) . د س} = \int \text{ق (ص) . د ص} = \text{م (ص) + جـ}$$

وعندما نستبدل بـ ص ما تساويه بدلالة س نحصل على :

$$\boxed{\int \text{ق (هـ (س)) . هـَ (س) . د س} = \text{م (هـ (س)) + جـ}}$$

مثال جد $\int$ ٣ س^{٢} (٥ + س^{٣})^{٥} . د س

الحل افرض ص = ٥ + س^{٣}

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = ٣\text{ س}^{٢} \longrightarrow \text{د س} = \frac{\text{د ص}}{٣\text{ س}^{٢}}$$

$$\int ٣\text{ س}^{٢} (٥ + \text{س}^{٣})^{٥} \text{ . د س} = \int ٣\text{ س}^{٢} (\text{ص})^{٥} . \frac{\text{د ص}}{٣\text{ س}^{٢}} = \int \text{ص}^{٥} \text{ . د ص}$$

$$= \frac{\text{ص}^{٦}}{٦} + \text{جـ} = \frac{(٥ + \text{س}^{٣})^{٦}}{٦} + \text{جـ}$$

مثال $\int \frac{٤\text{ س} + ٦}{\sqrt[٣]{\text{س}^{٢} + ٣\text{ س} + ٥}} \text{ . د س}$

الحل افرض ص = س^{٢} + ٣ س + ٥

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = ٢\text{ س} + ٣ \longrightarrow \text{د س} = \frac{\text{د ص}}{٢\text{ س} + ٣}$$

$$\int \frac{٤\text{ س} + ٦}{\sqrt[٣]{\text{س}^{٢} + ٣\text{ س} + ٥}} \text{ . د س} = \int \frac{٢\ (٢\text{ س} + ٣)}{\sqrt[٣]{\text{ص}}} . \frac{\text{د ص}}{٢\text{ س} + ٣} = ٢ \int \text{ص}^{-\frac{١}{٣}} \text{ . د ص}$$

$$= ٣\text{ ص}^{\frac{٢}{٣}} + \text{جـ} = ٣\ (\text{س}^{٢} + ٣\text{ س} + ٥)^{\frac{٢}{٣}} + \text{جـ}$$

مثال جد $\int \text{جتا}\,(\text{ظا س})\,.\,\text{قا}^{2}\text{س}\,.\,\text{د س}$

الحل بما أن زاوية اقتران الجتا غير خطية افرض ص = ظا س

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{قا}^{2}\text{س} \longrightarrow \text{د س} = \frac{\text{د ص}}{\text{قا}^{2}\text{س}}$$

$$\int \text{جتا}\,(\text{ظا س})\,.\,\text{قا}^{2}\text{س}\,.\,\text{د س} = \int \text{جتا}\,(\text{ص})\,.\,\text{قا}^{2}\text{س}\,.\,\frac{\text{د ص}}{\text{قا}^{2}\text{س}} = \int \text{جتا}\,(\text{ص})\,.\,\text{د ص}$$

$$= \text{جا}\,(\text{ص}) + \text{جـ} = \text{جا}\,(\text{ظا س}) + \text{جـ}$$

مثال جد $\int \frac{\text{قا}^{2}\sqrt[3]{\text{س}}}{\sqrt[3]{\text{س}^{2}}}\,.\,\text{د س}$

الحل افرض $\text{ص} = \sqrt[3]{\text{س}}$

$$\longrightarrow \text{ص} = \text{س}^{\frac{1}{3}} \longrightarrow \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{1}{3}\,\text{س}^{\frac{-2}{3}} \longrightarrow \text{د س} = 3\,\text{س}^{\frac{2}{3}}\,.\,\text{د ص}$$

$$\int \frac{\text{قا}^{2}\sqrt[3]{\text{س}}}{\sqrt[3]{\text{س}^{2}}}\,.\,\text{د س} = \int \frac{\text{قا}^{2}\text{ص}}{\text{س}^{\frac{2}{3}}}\,.\,3\,\text{س}^{\frac{2}{3}}\,.\,\text{د ص} = 3\int \text{قا}^{2}\text{ص}\,.\,\text{د ص} = 3\,\text{ظا}\,(\text{ص}) + \text{جـ}$$

$$= 3\,\text{ظا}\,\sqrt[3]{\text{س}} + \text{جـ}$$

مثال جد $\int \frac{\text{جا س}}{\sqrt{1 + 2\,\text{جتا س}}}\,.\,\text{د س}$

الحل افرض ص = ١ + ٢ جتا س

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = -2\,\text{جا س} \longrightarrow \text{د س} = \frac{\text{د ص}}{-2\,\text{جا س}}$$

$$\int \frac{\text{جا س}}{\sqrt{1 + 2\,\text{جتا س}}}\,.\,\text{د س} = \int \frac{\text{جا س}}{\sqrt{\text{ص}}}\,.\,\frac{\text{د ص}}{-2\,\text{جا س}} = \frac{-1}{2}\int \text{ص}^{\frac{-1}{2}}\,.\,\text{د ص} = -\,\text{ص}^{\frac{1}{2}} + \text{جـ}$$

$$= -\sqrt{\text{ص}} + \text{جـ} = -\sqrt{1 + 2\,\text{جتا س}} + \text{جـ}$$

مثال جد $\int \frac{\text{جتا}\,(\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س})}{\text{س}}\,.\,\text{د س}$

الحل افرض $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}$

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{1}{\text{س}} \longrightarrow \text{د س} = \text{س}\,.\,\text{د ص}$$

$$\int \frac{\text{جتا}\,(\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س})}{\text{س}}\,.\,\text{د س} = \int \frac{\text{جتا ص}}{\text{س}}\,.\,\text{س}\,.\,\text{د ص} = \int \text{جتا ص}\,.\,\text{د ص}$$

$$= \text{جا ص} + \text{جـ} = \text{جا}\,(\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}) + \text{جـ}$$

مثال جد $\int \frac{\text{جا}^2 (\text{لـو}_{\text{هـ}} \text{س})}{\text{س}} \cdot \text{د س}$

الحل افرض ص = $\text{لـو}_{\text{هـ}}$ س

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{1}{\text{س}} \longrightarrow$ د س = س . د ص

$\int \frac{\text{جا}^2 (\text{لـو}_{\text{هـ}} \text{س})}{\text{س}} \cdot \text{د س} = \int \frac{\text{جا}^2 \text{ص}}{\text{س}} \text{س} \cdot \text{د ص} = \int \text{جا}^2 \text{ص} \cdot \text{د ص}$

$= \int \frac{1}{2} (1 - \text{جتا} 2\text{ص}) \cdot \text{د ص} = \frac{1}{2} (\text{ص} - \frac{1}{2} \text{جا} 2\text{ص}) + \text{جـ}$

$= \frac{1}{2} (\text{لـو}_{\text{هـ}} \text{س} - \frac{1}{2} \text{جا} (2 \text{لـو}_{\text{هـ}} \text{س})) + \text{جـ}$

قــاعــدة

إذا كان ق , هـَ اقترانيين متصلين , فإن :

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق} (\text{هـ} (\text{س})) \cdot \text{هـَ} (\text{س}) \cdot \text{د س} = \int_{\text{هـ}(\text{أ})}^{\text{هـ}(\text{ب})} \text{ق} (\text{ص}) \cdot \text{د ص}$$

مثال جد $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\text{ظا س}} \ \text{قا}^2\text{س} \cdot \text{د س}$

الحل افرض ص = ظا س

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{قا}^2\text{س} \longrightarrow \text{د س} = \frac{\text{د ص}}{\text{قا}^2\text{س}}$

عندما س = ۰ : ص = ظا (۰) = ۰

عندما س = $\frac{\pi}{4}$: ص = ظا ($\frac{\pi}{4}$) = ۱

$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\text{ظا س}} \ \text{قا}^2\text{س} \cdot \text{د س} = \int_{0}^{1} \sqrt{\text{ص}} \ \text{قا}^2\text{س} \frac{\text{د ص}}{\text{قا}^2\text{س}} = \int_{0}^{1} \sqrt{\text{ص}} \cdot \text{د ص} = \int_{0}^{1} \text{ص}^{\frac{1}{2}} \cdot \text{د ص}$

$= \frac{2}{3} \text{ص}^{\frac{3}{2}} \Big|_{0}^{1} = \frac{2}{3} \left((1)^{\frac{3}{2}} - (0)^{\frac{3}{2}} \right) = \frac{2}{3}$

مثال جد $\int \frac{1}{س^2}$ ظا $(\frac{1}{س})$. د س

الحل افرض ص $= \frac{1}{س}$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{-1}{س^2}$ ⟵ د س $=$ - س^2 . د ص

$\int \frac{1}{س^2}$ ظا $(\frac{1}{س})$. د س $= \int \frac{1}{س^2}$ ظا (ص) . - س^2 . د ص $= - \int$ ظا (ص) . د ص

$= \int \frac{-جا (ص)}{جتا (ص)}$. د ص $=$ لو$_{هـ}$ |جتا ص| + جـ $=$ لو$_{هـ}$ |جتا $(\frac{1}{س})$| + جـ

مثال جد $\int$ س جا^5 (س^2 + 1) جتا (س^2 + 1) . د س

الحل افرض ص $=$ جا (س^2 + 1)

$\frac{د ص}{د س} = 2$ س جتا (س^2 + 1) ⟵ د س $= \frac{د ص}{2 \text{ س جتا } (س^2 + 1)}$

$\int$ س جا^5 (س^2 + 1) جتا (س^2 + 1) . د س $= \int$ (ص)^5 س جتا (س^2 + 1) . $\frac{د ص}{2 \text{ س جتا } (س^2 + 1)}$

$= \frac{1}{2} \int$ ص^5 . د ص $= \frac{1}{12}$ ص^6 + جـ $= \frac{1}{12}$ جا^6 (س^2 + 1) + جـ

مثال جد $\int \frac{\sqrt{1 + لو_{هـ} س}}{س}$. د س

الحل افرض ص $= 1 +$ لو$_{هـ}$ س

$\frac{د ص}{د س} = \frac{1}{س}$ ⟵ د س $=$ س . د ص

$\int \frac{\sqrt{1 + لو_{هـ} س}}{س}$. د س $= \int \frac{\sqrt{ص}}{س}$ س . د ص $= \int \sqrt{ص}$. د ص $= \int$ ص$^{\frac{1}{2}}$. د ص

$= \frac{2}{3}$ ص$^{\frac{3}{2}}$ + جـ $= \frac{2}{3}$ (1 + لو$_{هـ}$ س)$^{\frac{3}{2}}$ + جـ

مثال جد $\int \frac{د س}{س (لو_{هـ} س)^2}$

الحل افرض ص $=$ لو$_{هـ}$ س : $\frac{د ص}{د س} = \frac{1}{س}$ ⟵ د س $=$ س . د ص

$\int \frac{د س}{س (لو_{هـ} س)^2} = \int \frac{س . د ص}{س ص^2} = \int$ ص$^{-2}$. د ص $=$ - ص$^{-1}$ + جـ $= \frac{-1}{ص}$ + جـ $= \frac{-1}{لو_{هـ} س}$ + جـ

مثال جد $\int \frac{د س}{\sqrt{س}\,(\sqrt{س}+٥)}$

(الحل)

افرض $ص = \sqrt{س} + ٥$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{١}{٢\sqrt{س}} \longrightarrow د س = ٢\sqrt{س}\; د ص$

$\int \frac{د س}{\sqrt{س}\,(\sqrt{س}+٥)} = \int \frac{٢\sqrt{س}\; د ص}{\sqrt{س}\; ص} = ٢\int \frac{د ص}{ص} = ٢ لـو_{هـ}|ص| + جـ$

$= ٢ لـو_{هـ}|\sqrt{س}+٥| + جـ$

مثال جد $\int س^٢\, هـ^{س^٣+٥} . د س$

(الحل) بما أن الأس غير خطي ولا يحوي لوغرتم (في الاقتران الأسي) افرض $ص = س^٣+٥$

$\frac{د ص}{د س} = ٣ س^٢ \longrightarrow د س = \frac{د ص}{٣ س^٢}$

$\int س^٢\, هـ^{س^٣+٥} . د س = \int س^٢\, هـ^{ص} . \frac{د ص}{٣ س^٢} = \frac{١}{٣}\int هـ^{ص} . د ص = \frac{١}{٣} هـ^{ص} + جـ$

$= \frac{١}{٣} هـ^{س^٣+٥} + جـ$

مثال جد $\int هـ^{س+٣هـ^{س}} . د س$

(الحل) $\int هـ^{س+٣هـ^{س}} . د س = \int هـ^{س} . هـ^{٣هـ^{س}} . د س$

بما أن الأس غير خطي ولا يحوي لوغرتم افرض $ص = ٣ هـ^{س}$

$\frac{د ص}{د س} = ٣ هـ^{س} \longrightarrow د س = \frac{د ص}{٣ هـ^{س}}$

$\int هـ^{س} . هـ^{٣هـ^{س}} . د س = \int هـ^{س} . هـ^{ص} . \frac{د ص}{٣ هـ^{س}} = \frac{١}{٣}\int هـ^{ص} . د ص = \frac{١}{٣} هـ^{ص} + جـ = \frac{١}{٣} هـ^{٣هـ^{س}} + جـ$

مثال جد $\int جتاس . جا^٢(جا س) . د س$

(الحل) افرض $ص = جا س$

$\frac{د ص}{د س} = جتا س \longrightarrow د س = \frac{د ص}{جتا س}$

$\int جتاس . جا^٢(جا س) . د س = \int جتاس . جا^٢(ص) . \frac{د ص}{جتا س} = \int جا^٢ ص . د ص$

$= \frac{١}{٢}\int (١ - جتا ٢ص) . د ص = \frac{١}{٢} (ص - \frac{١}{٢} جا ٢ص) + جـ$

$= \frac{١}{٢} (جا س - \frac{١}{٢} جا (٢جا س)) + جـ$

مثال جد $\int هـ^{جا س + لـو_{هـ} جتا س} . د س$

الحل $\int هـ^{جا س + لـو_{هـ} جتا س} . د س = \int هـ^{جا س} . هـ^{لـو_{هـ} جتا س} . د س = \int هـ^{جا س} . جتا س . د س$

افرض ص = جا س

$\frac{د ص}{د س} = جتا س \longrightarrow د س = \frac{د ص}{جتا س}$

$\int هـ^{جا س} . جتا س . د س = \int هـ^{ص} . جتا س . \frac{د ص}{جتا س} = \int هـ^{ص} . د ص$

$= هـ^{ص} + جـ = هـ^{جا س} + جـ$

مثال جد $\int جا ٢س هـ^{جا^٢ س} . د س$

الحل افرض ص = جا^٢ س

$\frac{د ص}{د س} = ٢ جا س جتا س = جا ٢س \longrightarrow د س = \frac{د ص}{جا ٢س}$

$\int جا ٢س هـ^{جا^٢ س} . د س = \int جا ٢س هـ^{ص} . \frac{د ص}{جا ٢س} = \int هـ^{ص} . د ص$

$= هـ^{ص} + جـ = هـ^{جا^٢ س} + جـ$

مثال جد $\int س هـ^{س^٢ + هـ^{س^٢}} . د س$

الحل $\int س هـ^{س^٢ + هـ^{س^٢}} . د س = \int س هـ^{س^٢} هـ^{هـ^{س^٢}} . د س$

افرض $ص = هـ^{س^٢} \longrightarrow \frac{د ص}{د س} = ٢ س هـ^{س^٢} \longrightarrow د س = \frac{د ص}{٢ س هـ^{س^٢}}$

$\int س هـ^{س^٢} هـ^{هـ^{س^٢}} . د س = \int س هـ^{س^٢} هـ^{ص} . \frac{د ص}{٢ س هـ^{س^٢}}$

$= \frac{١}{٢} \int هـ^{ص} . د ص = \frac{١}{٢} هـ^{ص} + جـ = \frac{١}{٢} هـ^{هـ^{س^٢}} + جـ$

نستخدم التعويض لتبسيط المقدار الذي نكامله , ولكن بشكل عام فإن طريقة التكامل بالتعويض ستفشل إذا كان الاختيار للفرض ص و د ص المحسوبة يؤدي لإنتاج تكامل يحوي س ، أو أنك لا تستطيع أن تحسب التكامل الناتج .

وحتى الان كان اختيارنا للفرض ص سهلا نسبيا وتمكنا من إجراء التكاملات بعد تحويلها إلى صورة قابلة للحل بإحدى القواعد المعروفة لدينا .

لكن يمكن القول أنه لا يوجد تعويض مثالي يؤدي الغرض في جميع الحالات . لذلك تبقى مسألة اختيار الفرض المناسب هي مسألة تمرين وخبرة .

مثال جد $\int \frac{س^{٣}}{(س^{٢}+٩)^{٣}} \,.\, د\,س$

الحل افرض $ص = س^{٢}+٩$

$\frac{د\,ص}{د\,س} = ٢\,س \longrightarrow د\,س = \frac{د\,ص}{٢\,س}$

$\int \frac{س^{٣}}{(س^{٢}+٩)^{٣}} \,.\, د\,س = \int \frac{س^{٣}}{ص^{٣}} \cdot \frac{د\,ص}{٢\,س} = \frac{١}{٢} \int \frac{س^{٢}}{ص^{٣}} \,.\, د\,ص$

$= \frac{١}{٢} \int (ص-٩) \,.\, ص^{-٣} \,.\, د\,ص = \frac{١}{٢} \int (ص^{-٢} - ٩\,ص^{-٣}) \,.\, د\,ص$ ($ص = س^{٢}+٩ \longrightarrow س^{٢} = ص - ٩$)

$= \frac{١}{٢} (-ص^{-١} + \frac{٩}{٢}\,ص^{-٢}) + جـ = \frac{١}{٢} (-(س^{٢}+٩)^{-١} + \frac{٩}{٢}\,(س^{٢}+٩)^{-٢}) + جـ$

مثال جد $\int س^{٣}\,(س^{٢}+١)^{٦} \,.\, د\,س$

الحل افرض $ص = س^{٢}+١$

$\frac{د\,ص}{د\,س} = ٢\,س \longrightarrow د\,س = \frac{د\,ص}{٢\,س}$

$\int س^{٣}\,(س^{٢}+١)^{٦} \,.\, د\,س = \int س^{٣}\,ص^{٦} \,.\, \frac{د\,ص}{٢\,س} = \frac{١}{٢} \int س^{٢}\,ص^{٦} \,.\, د\,ص$

$= \frac{١}{٢} \int (ص-١)\,ص^{٦} \,.\, د\,ص = \frac{١}{٢} \int (ص^{٧} - ص^{٦}) \,.\, د\,ص$ ($ص = س^{٢}+١ \longrightarrow س^{٢} = ص - ١$)

$= \frac{١}{٢} \left(\frac{ص^{٨}}{٨} - \frac{ص^{٧}}{٧} \right) + جـ = \frac{١}{٢} \left(\frac{(س^{٢}+١)^{٨}}{٨} - \frac{(س^{٢}+١)^{٧}}{٧} \right) + جـ$

مثال جد $\int س^{٥} \sqrt{س^{٢}+١} \,.\, د\,س$

الحل

افرض $ص = \sqrt{س^{٢}+١} \longrightarrow ص^{٢} = س^{٢}+١ \longrightarrow ٢ص \frac{د\,ص}{د\,س} = ٢\,س \longrightarrow د\,س = \frac{ص \,.\, د\,ص}{س}$

$\int س^{٥} \sqrt{س^{٢}+١} \,.\, د\,س = \int س^{٥}\,ص \,\frac{ص \,.\, د\,ص}{س} = \int س^{٤}\,ص^{٢} \,.\, د\,ص$

($ص^{٢} = س^{٢}+١$ ، $س^{٢} = ص^{٢} - ١$ ، $س^{٤} = (ص^{٢}-١)^{٢}$ ، $س^{٤} = ص^{٤} - ٢\,ص^{٢} + ١$)

$= \int (ص^{٤} - ٢\,ص^{٢} + ١)\,ص^{٢} \,.\, د\,ص = \int (ص^{٦} - ٢\,ص^{٤} + ص^{٢}) \,.\, د\,ص$

$= \frac{ص^{٧}}{٧} - \frac{٢ص^{٥}}{٥} + \frac{ص^{٣}}{٣} + جـ = \frac{(\sqrt{س^{٢}+١})^{٧}}{٧} - \frac{٢(\sqrt{س^{٢}+١})^{٥}}{٥} + \frac{(\sqrt{س^{٢}+١})^{٣}}{٣} + جـ$

مثال جد $\int_{\frac{١}{٣}}^{١} (٢\,س+١)\,(٣\,س-٢)^{١٠٠} \,.\, د\,س$

الحل افرض $ص = ٣\,س - ٢$: $\frac{د\,ص}{د\,س} = ٣ \longrightarrow د\,س = \frac{د\,ص}{٣}$

عندما $س = \frac{١}{٣}$: $ص = ٣\,(\frac{١}{٣}) - ٢ = -١$

عندما $س = ١$: $ص = ٣\,(١) - ٢ = ١$

($ص = ٣\,س - ٢ \longrightarrow س = \frac{ص+٢}{٣}$)

$$\frac{1}{3}\int_{-1}^{1} (2س + 1)(3س - 2)^{100}.دس = \int_{-1}^{1} (2(\frac{ص+2}{3}) + 1) ص^{100} . \frac{دص}{3}$$

$$= \frac{1}{9}\int_{-1}^{1} (2ص + 7) ص^{100} . دص = \frac{1}{9}\int_{-1}^{1} (2ص^{101} + 7ص^{100}) . دص$$

$$= \frac{1}{9}\left(\frac{ص^{102}}{51} + \frac{7ص^{101}}{101}\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{9}\left(\frac{(1)^{102}}{51} + \frac{7(1)^{101}}{101}\right) - \frac{1}{9}\left(\frac{(-1)^{102}}{51} + \frac{7(-1)^{101}}{101}\right) = \frac{14}{909}$$

مثال جد $\int س\sqrt[3]{1 - س} \,.\, دس$

الحل افرض $ص = \sqrt[3]{1 - س}$

$ص^3 = 1 - س \longrightarrow 3ص^2 \frac{دص}{دس} = -1 \longrightarrow دس = -3ص^2 . دص$

$\int س\sqrt[3]{1-س} \,.\, دس = \int س . ص . -3ص^2 . دص = -3\int (1 - ص^3) ص^3 . دص$ ($ص^3 = 1 - س$، $س = 1 - ص^3$)

$= -3\int (ص^3 - ص^6) . دص = -3\left(\frac{ص^4}{4} - \frac{ص^7}{7}\right) + جـ$

$= -3\left(\frac{(\sqrt[3]{1-س})^4}{4} - \frac{(\sqrt[3]{1-س})^7}{7}\right) + جـ$

مثال جد $\int \frac{س}{\sqrt{س - 1}} \,.\, دس$

الحل افرض $ص = \sqrt{س - 1}$

$ص^2 = س - 1 \longrightarrow 2ص \frac{دص}{دس} = 1 \longrightarrow دس = 2ص . دص$

$\int \frac{س}{\sqrt{س-1}} . دس = \int \frac{س}{ص} 2ص . دص = 2\int س . دص = 2\int (ص^2 + 1) . دص$ ($ص^2 = س - 1$، $س = ص^2 + 1$)

$= 2\left(\frac{ص^3}{3} + ص\right) + جـ = 2\left(\frac{(\sqrt{س-1})^3}{3} + \sqrt{س-1}\right) + جـ$

مثال جد $\int \frac{هـ^{2س}}{\sqrt[3]{1 + هـ^{س}}} . دس$

الحل افرض $ص = \sqrt[3]{1 + هـ^{س}}$

$ص^3 = 1 + هـ^{س} \longrightarrow 3ص^2 \frac{دص}{دس} = هـ^{س} \longrightarrow دس = \frac{3ص^2 . دص}{هـ^{س}}$

$\int \frac{هـ^{2س}}{\sqrt[3]{1+هـ^{س}}} . دس = \int \frac{هـ^{2س}}{ص} . \frac{3ص^2 . دص}{هـ^{س}} = 3\int هـ^{س} ص . دص$ ($ص^3 = 1 + هـ^{س}$، $هـ^{س} = ص^3 - 1$)

$= 3\int (ص^3 - 1) ص . دص = 3\int (ص^4 - ص) . دص = 3\left(\frac{ص^5}{5} - \frac{ص^2}{2}\right) + جـ$

$= 3\left(\frac{(\sqrt[3]{1+هـ^{س}})^5}{5} - \frac{(\sqrt[3]{1+هـ^{س}})^2}{2}\right) + جـ$

مثال جد $\int هـ^{٢س}\sqrt{هـ^{س}+٢}\ .\ د\,س$

الحل افرض $ص = \sqrt{هـ^{س}+٢}$

$ص^{٢} = هـ^{س}+٢ \longrightarrow ٢\,ص\ \frac{د\,ص}{د\,س} = هـ^{س} \longrightarrow د\,س = \frac{٢\,ص\ .\ د\,ص}{هـ^{س}}$

$\int هـ^{٢س}\sqrt{هـ^{س}+٢}\ .\ د\,س = \int هـ^{٢س}\ .\ ص\ .\ \frac{٢ص\ .\ د\,ص}{هـ^{س}} = ٢\int هـ^{س}\ ص^{٢}\ .\ د\,ص$

$ص^{٢} = هـ^{س}+٢$
$هـ^{س} = ص^{٢}-٢$

$= ٢\int(ص^{٢}-٢)\ ص^{٢}\ .\ د\,ص = ٢\int(ص^{٤}-٢ص^{٢})\ .\ د\,ص = ٢\left(\frac{ص^{٥}}{٥}-\frac{٢ص^{٣}}{٣}\right)+جـ$

$= ٢\left(\frac{\left(\sqrt{هـ^{س}+٢}\right)^{٥}}{٥}-\frac{٢\left(\sqrt{هـ^{س}+٢}\right)^{٣}}{٣}\right)+جـ$

مثال جد $\int(س^{٧}-٣\,س)^{٥}\ .\ د\,س$

الحل $\int(س^{٧}-٣\,س)^{٥}\ .\ د\,س = \int\left(س(س^{٦}-٣)\right)^{٥}\ .\ د\,س = \int س^{٥}(س^{٦}-٣)^{٥}\ .\ د\,س$

افرض $ص = س^{٦}-٣$

$\frac{د\,ص}{د\,س} = ٦\,س^{٥} \longrightarrow د\,س = \frac{د\,ص}{٦\,س^{٥}}$

$\int س^{٥}(س^{٦}-٣)^{٥}\ .\ د\,س = \int س^{٥}\ ص^{٥}\ .\ \frac{د\,ص}{٦\,س^{٥}} = \frac{١}{٦}\int ص^{٥}\ .\ د\,ص = \frac{ص^{٦}}{٣٦}+جـ = \frac{(س^{٦}-٣)^{٦}}{٣٦}+جـ$

مثال جد $\int س^{٢}(س-١)^{٧}(س^{٢}+س+١)^{٧}\ .\ د\,س$

الحل $\int س^{٢}(س-١)^{٧}(س^{٢}+س+١)^{٧}\ .\ د\,س = \int س^{٢}\left((س-١)(س^{٢}+س+١)\right)^{٧}\ .\ د\,س$

$= \int س^{٢}(س^{٣}-١)^{٧}\ .\ د\,س$

افرض $ص = س^{٣}-١$

$\frac{د\,ص}{د\,س} = ٣\,س^{٢} \longrightarrow د\,س = \frac{د\,ص}{٣\,س^{٢}}$

$\int س^{٢}(س^{٣}-١)^{٧}\ .\ د\,س = \int س^{٢}\ ص^{٧}\ .\ \frac{د\,ص}{٣\,س^{٢}} = \frac{١}{٣}\int ص^{٧}\ .\ د\,ص = \frac{ص^{٨}}{٢٤}+جـ = \frac{(س^{٣}-١)^{٨}}{٢٤}+جـ$

مثال جد $\int\frac{س^{٣}-٢\,س}{\sqrt{س^{٢}+١}}\ .\ د\,س$

الحل افرض $ص = \sqrt{س^{٢}+١} \longrightarrow ص^{٢} = س^{٢}+١ \longrightarrow ٢ص\ \frac{د\,ص}{د\,س} = ٢\,س \longrightarrow د\,س = \frac{ص\ .\ د\,ص}{س}$

$\int\frac{س^{٣}-٢\,س}{\sqrt{س^{٢}+١}}\ .\ د\,س = \int\frac{س(س^{٢}-٢)}{ص}\ .\ \frac{ص\ .\ د\,ص}{س} = \int(ص^{٢}-٣)\ .\ د\,ص$

$ص^{٢} = س^{٢}+١$
$ص^{٢}-٣ = س^{٢}-٢$

$$= \frac{\text{ص}^3}{3} - 3\,\text{ص} + \text{جـ} = \frac{\left(\sqrt{\text{س}^2+1}\right)^3}{3} - 3\sqrt{\text{س}^2+1} + \text{جـ}$$

مثال جد $\int (\text{س} - 1)^3 (\text{س}^2 - 2\,\text{س} + 5)^8 \,.\, \text{د س}$

الحل افرض $\text{ص} = \text{س}^2 - 2\,\text{س} + 5$

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = 2\,\text{س} - 2 = 2(\text{س} - 1) \longrightarrow \text{د س} = \frac{\text{د ص}}{2(\text{س} - 1)}$$

$$\int (\text{س} - 1)^3 (\text{س}^2 - 2\,\text{س} + 5)^8 \,.\, \text{د س} = \int (\text{س} - 1)^3 \,.\, \text{ص}^8 \,.\, \frac{\text{د ص}}{2(\text{س} - 1)} = \frac{1}{2}\int (\text{س} - 1)^2 \,\text{ص}^8 \,.\, \text{د ص}$$

$\text{ص} = \text{س}^2 - 2\,\text{س} + 5$
$\text{ص} - 4 = \text{س}^2 - 2\,\text{س} + 1$

$$= \frac{1}{2}\int (\text{س}^2 - 2\,\text{س} + 1)\,\text{ص}^8 \,.\, \text{د ص}$$

$$= \frac{1}{2}\int (\text{ص} - 4)\,\text{ص}^8 \,.\, \text{د ص} = \frac{1}{2}\int (\text{ص}^9 - 4\,\text{ص}^8) \,.\, \text{د ص} = \frac{1}{2}\left(\frac{\text{ص}^{10}}{10} - \frac{4\,\text{ص}^9}{9}\right) + \text{جـ}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{(\text{س}^2 - 2\,\text{س} + 5)^{10}}{10} - \frac{4(\text{س}^2 - 2\,\text{س} + 5)^9}{9}\right) + \text{جـ}$$

مثال جد $\int \sqrt[3]{\text{س}^5 - \text{س}^3} \,.\, \text{د س}$

الحل

$$\int \sqrt[3]{\text{س}^5 - \text{س}^3} \,.\, \text{د س} = \int \sqrt[3]{\text{س}^3(\text{س}^2 - 1)} \,.\, \text{د س} = \int \sqrt[3]{\text{س}^3}\,\sqrt[3]{\text{س}^2 - 1} \,.\, \text{د س}$$

$$= \int \text{س}\,\sqrt[3]{\text{س}^2 - 1} \,.\, \text{د س}$$

افرض $\text{ص} = \sqrt[3]{\text{س}^2 - 1} \longrightarrow \text{ص}^3 = \text{س}^2 - 1 \longrightarrow 3\,\text{ص}^2 \,.\, \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = 2\,\text{س}$

$$\longrightarrow \text{د س} = \frac{3\,\text{ص}^2 \,.\, \text{د ص}}{2\,\text{س}}$$

$$\int \text{س}\,\sqrt[3]{\text{س}^2 - 1} \,.\, \text{د س} = \int \text{س}\,\text{ص} \,.\, \frac{3\,\text{ص}^2 \,.\, \text{د ص}}{2\,\text{س}}$$

$$= \frac{3}{2}\int \text{ص}^3 \,.\, \text{د ص} = \frac{3}{8}\,\text{ص}^4 + \text{جـ} = \frac{3}{8}\left(\sqrt[3]{\text{س}^2 - 1}\right)^4 + \text{جـ}$$

مثال جد $\int \sqrt[3]{2\,\text{س}^6 - \text{س}^9} \,.\, \text{د س}$

الحل

$$\int \sqrt[3]{2\,\text{س}^6 - \text{س}^9} \,.\, \text{د س} = \int \sqrt[3]{\text{س}^6(2 - \text{س}^3)} \,.\, \text{د س} = \int \sqrt[3]{\text{س}^6}\,\sqrt[3]{2 - \text{س}^3} \,.\, \text{د س}$$

$$= \int \text{س}^2 \,.\, \sqrt[3]{2 - \text{س}^3} \,.\, \text{د س}$$

افرض $\text{ص} = \sqrt[3]{2 - \text{س}^3} \longrightarrow \text{ص}^3 = 2 - \text{س}^3 \longrightarrow 3\,\text{ص}^2 \,.\, \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = -3\,\text{س}^2$

$$\longrightarrow \text{د س} = \frac{-\text{ص}^2 \,.\, \text{د ص}}{\text{س}^2}$$

$$\int س^{٢} . \sqrt[٣]{٢ - س^{٣}} . د س = \int س^{٢} . ص . \frac{- ص^{٢} . د ص}{س^{٢}} = \int - ص^{٣} . د ص$$

$$= \frac{- ص^{٤}}{٤} + جـ = \frac{- \left(\sqrt[٣]{٢ - س^{٣}} \right)^{٤}}{٤} + جـ$$

مثال جد $\int \frac{(س + ٣)^{٧}}{س^{٩}} . د س$

الحل

$$\int \frac{(س + ٣)^{٧}}{س^{٩}} . د س = \int \frac{(س + ٣)^{٧}}{س^{٧} \, س^{٢}} . د س = \int \left(\frac{س + ٣}{س} \right)^{٧} . \frac{١}{س^{٢}} . د س$$

$$= \int \left(١ + \frac{٣}{س} \right)^{٧} . \frac{١}{س^{٢}} . د س$$

افرض $ص = ١ + \frac{٣}{س}$

$$\frac{د ص}{د س} = \frac{-٣}{س^{٢}} \longrightarrow د س = \frac{- س^{٢} . د ص}{٣}$$

$$\int \left(١ + \frac{٣}{س} \right)^{٧} . \frac{١}{س^{٢}} . د س = \int ص^{٧} . \frac{١}{س^{٢}} . \frac{- س^{٢} . د ص}{٣}$$

$$= \frac{-١}{٣} \int ص^{٧} . د ص = \frac{-١}{٢٤} ص^{٨} + جـ = \frac{-١}{٢٤} \left(١ + \frac{٣}{س} \right)^{٨} + جـ$$

مثال جد $\int \frac{\left(١ + \frac{١}{س^{٢}} \right)^{٥}}{س^{٣}} . د س$

الحل

افرض $ص = ١ + \frac{١}{س^{٢}}$

$$\frac{د ص}{د س} = \frac{- ٢ س}{س^{٤}} = \frac{-٢}{س^{٣}} \longrightarrow د س = \frac{- س^{٣} . د ص}{٢}$$

$$\int \frac{\left(١ + \frac{١}{س^{٢}} \right)^{٥}}{س^{٣}} . د س = \int \frac{ص^{٥}}{س^{٣}} . \frac{- س^{٣} . د ص}{٢} = \frac{-١}{٢} \int ص^{٥} . د ص$$

$$= \frac{-١}{١٢} ص^{٦} + جـ = \frac{-١}{١٢} \left(١ + \frac{١}{س^{٢}} \right)^{٦} + جـ$$

مثال جد $\int س^{٧} \left(١ + \frac{١}{س} \right)^{٥} . د س$

الحل

$$\int س^{٧} \left(١ + \frac{١}{س} \right)^{٥} . د س = \int س^{٧} \left(\frac{س + ١}{س} \right)^{٥} . د س = \int س^{٧} \frac{(س + ١)^{٥}}{س^{٥}} . د س$$

$$= \int س^{٢} (س + ١)^{٥} . د س$$

افرض $ص = س + ١$

$$\frac{د ص}{د س} = ١ \longrightarrow د س = د ص$$

$ص = س + ١$
$س = ص - ١$
$س^{٢} = (ص - ١)^{٢}$
$س^{٢} = ص^{٢} - ٢ ص + ١$

$\int س^{٢}(س+١)^{٥} . دس = \int (ص^{٢} - ٢ص + ١)\, ص^{٥} . دص = \int (ص^{٧} - ٢ص^{٦} + ص^{٥}) . دص$

$= \frac{ص^{٨}}{٨} - \frac{٢ص^{٧}}{٧} + \frac{ص^{٦}}{٦} + جـ = \frac{(س+١)^{٨}}{٨} - \frac{٢(س+١)^{٨}}{٧} + \frac{(س+١)^{٦}}{٦} + جـ$

مثال جد $\int س^{٩}\left(س^{٢} + \frac{١}{س}\right)^{٤} . دس$

الحل

$\int س^{٩}\left(س^{٢} + \frac{١}{س}\right)^{٤} . دس = \int س^{٩}\left(\frac{س^{٣}+١}{س}\right)^{٤} . دس = \int س^{٩}\, \frac{(س^{٣}+١)^{٤}}{س^{٤}} . دس$

$= \int س^{٥}(س^{٣}+١)^{٤} . دس$

افرض $ص = س^{٣} + ١$

$\frac{دص}{دس} = ٣س^{٢} \longrightarrow دس = \frac{دص}{٣س^{٢}}$

$ص = س^{٣} + ١$
$س^{٣} = ص - ١$

$\int س^{٥}(س^{٣}+١)^{٤} . دس = \int س^{٥}(ص)^{٤} . \frac{دص}{٣س^{٢}} = \frac{١}{٣}\int س^{٣} ص^{٤} . دص$

$= \frac{١}{٣}\int (ص - ١)\, ص^{٤} . دص = \frac{١}{٣}\int (ص^{٥} - ص^{٤}) . دص$

$= \frac{١}{٣}\left(\frac{ص^{٦}}{٦} - \frac{ص^{٥}}{٥}\right) + جـ = \frac{١}{٣}\left(\frac{(س^{٣}+١)^{٦}}{٦} - \frac{(س^{٣}+١)^{٥}}{٥}\right) + جـ$

مثال جد $\int س^{٢٢}\left(\frac{٣}{س} + \frac{٥}{س^{٣}}\right)^{٧} . دس$

الحل

$\int س^{٢٢}\left(\frac{٣}{س} + \frac{٥}{س^{٣}}\right)^{٧} . دس = \int س^{٢٢}\left(\frac{١}{س^{٣}}(٣س^{٢}+٥)\right)^{٧} . دس$

$= \int س^{٢٢} . \frac{١}{س^{٢١}}(٣س^{٢}+٥)^{٧} . دس = \int س\,(٣س^{٢}+٥)^{٧} . دس$

افرض $ص = ٣س^{٢} + ٥$

$\frac{دص}{دس} = ٦س \longrightarrow دس = \frac{دص}{٦س}$

$\int س\,(٣س^{٢}+٥)^{٧} . دس = \int س\, ص^{٧} . \frac{دص}{٦س} = \frac{١}{٦}\int ص^{٧} . دص = \frac{١}{٤٨} ص^{٨} + جـ$

$= \frac{١}{٤٨}(٣س^{٢}+٥)^{٨} + جـ$

مثال جد $\int \frac{١}{س^{٢}}\sqrt{\frac{٢س+٣}{س}} . دس$

الحل

$\int \frac{١}{س^{٢}}\sqrt{\frac{٢س+٣}{س}} . دس = \int \frac{١}{س^{٢}}\sqrt{٢ + \frac{٣}{س}} . دس$

افرض $ص = \sqrt{٢ + \frac{٣}{س}} \longrightarrow ص^{٢} = ٢ + \frac{٣}{س} \longrightarrow ٢ص\, \frac{دص}{دس} = \frac{-٣}{س^{٢}}$

$\longleftarrow$ $د س = \frac{-2}{3} س^2 ص \,.\, د ص$

$\int \frac{1}{س^2} \sqrt{2 + \frac{3}{س}} \,.\, د س = \int \frac{1}{س^2} ص \,.\, \frac{-2}{3} س^2 ص \,.\, د ص = \frac{-2}{3} \int ص^2 \,.\, د ص = \frac{-2}{9} ص^3 + جـ$

$= \frac{-2}{9} \left(\sqrt{2 + \frac{3}{س}} \right)^3 + جـ$

مثال جد $\int \frac{\sqrt[3]{س - س^3}}{س^4} \,.\, د س$

الحل

$\int \frac{\sqrt[3]{س - س^3}}{س^4} \,.\, د س = \int \frac{\sqrt[3]{س^3 (س^{-2} - 1)}}{س^4} \,.\, د س = \int \frac{\sqrt[3]{س^3} \sqrt[3]{س^{-2} - 1}}{س^4} \,.\, د س$

$= \int \frac{س \sqrt[3]{س^{-2} - 1}}{س^4} \,.\, د س = \int \frac{\sqrt[3]{س^{-2} - 1}}{س^3} \,.\, د س$

افرض $ص = \sqrt[3]{س^{-2} - 1}$ $\longleftarrow$ $ص^3 = س^{-2} - 1$ $\longleftarrow$ $3 ص^2 \frac{د ص}{د س} = -2 س^{-3}$

$\longleftarrow$ $د س = \frac{-3}{2} س^3 ص^2 \,.\, د ص$

$\int \frac{\sqrt[3]{س^{-2} - 1}}{س^3} \,.\, د س = \int \frac{ص}{س^3} \,.\, \frac{-3}{2} س^3 ص^2 \,.\, د ص = \frac{-3}{2} \int ص^3 \,.\, د ص$

$= \frac{-3}{8} ص^4 + جـ = \frac{-3}{8} \left(\sqrt[3]{س^{-2} - 1} \right)^4 + جـ$

مثال جد $\int \frac{د س}{س^3 \sqrt[3]{س^3 + 1}}$

الحل

$\int \frac{د س}{س^3 \sqrt[3]{س^3 + 1}} = \int \frac{د س}{س^3 \sqrt[3]{س^3 (1 + س^{-3})}} = \int \frac{د س}{س^4 \sqrt[3]{1 + س^{-3}}}$

افرض $ص = \sqrt[3]{1 + س^{-3}}$ $\longleftarrow$ $ص^3 = 1 + س^{-3}$ $\longleftarrow$ $3 ص^2 \frac{د ص}{د س} = -3 س^{-4}$

$\longleftarrow$ $د س = - س^4 ص^2 \,.\, د ص$

$\int \frac{د س}{س^4 \sqrt[3]{1 + س^{-3}}} = \int \frac{- س^4 ص^2 \,.\, د ص}{س^4 \, ص} = - \int ص \,.\, د ص = \frac{- ص^2}{2} + جـ$

$= \frac{- \left(\sqrt[3]{1 + س^{-3}} \right)^2}{2} + جـ$

مثال جد $\int س^6 \sqrt{س - \frac{1}{س^4}} \,.\, د س$

الحل

$\int س^{٦} \sqrt{س - \frac{١}{س^{٤}}} \,.\, د س = \int س^{٦} \sqrt{\frac{١}{س^{٤}} (س^{٥} - ١)} \,.\, د س = \int س^{٦} \sqrt{\frac{١}{س^{٤}}} \sqrt{س^{٥} - ١} \,.\, د س$

$= \int س^{٤} \sqrt{س^{٥} - ١} \,.\, د س$

افرض $ص = \sqrt{س^{٥} - ١} \leftarrow ص^{٢} = س^{٥} - ١ \leftarrow ٢ ص \,.\, \frac{د ص}{د س} = ٥ س^{٤}$

$\leftarrow د س = \frac{٢ ص \,.\, د ص}{٥ س^{٤}}$

$\int س^{٤} \sqrt{س^{٥} - ١} \,.\, د س = \int س^{٤} ص \,.\, \frac{٢ ص \,.\, د ص}{٥ س^{٤}} = \frac{٢}{٥} \int ص^{٢} \,.\, د ص = \frac{٢}{١٥} ص^{٣} + جـ$

$= \frac{٢}{١٥} \left(\sqrt{س^{٥} - ١} \right)^{٣} + جـ$

مثال جد $\int \sqrt{\frac{س - ١}{س^{٥}}} \,.\, د س$

الحل

$\int \sqrt{\frac{س - ١}{س^{٥}}} \,.\, د س = \int \sqrt{\frac{س - ١}{س \, س^{٤}}} \,.\, د س = \int \sqrt{\frac{س - ١}{س}} \sqrt{\frac{١}{س^{٤}}} \,.\, د س$

$= \int \sqrt{١ - \frac{١}{س}} \cdot \frac{١}{س^{٢}} \,.\, د س$

افرض $ص = \sqrt{١ - \frac{١}{س}} \leftarrow ص^{٢} = ١ - \frac{١}{س} \leftarrow ٢ ص \frac{د ص}{د س} = \frac{١}{س^{٢}}$

$\leftarrow د س = ٢ ص س^{٢} \,.\, د ص$

$\int \sqrt{١ - \frac{١}{س}} \cdot \frac{١}{س^{٢}} \,.\, د س = \int ص \,.\, \frac{١}{س^{٢}} \,.\, ٢ ص س^{٢} \,.\, د ص = ٢ \int ص^{٢} \,.\, د ص = \frac{٢}{٣} ص^{٣} + جـ$

$= \frac{٢}{٣} \left(\sqrt{١ - \frac{١}{س}} \right)^{٣} + جـ$

مثال جد $\int \frac{س}{\sqrt{س - ٢} \sqrt{س + ٢}} \,.\, د س$ ، حيث $س > ٢$

الحل

$\int \frac{س}{\sqrt{س - ٢} \sqrt{س + ٢}} \,.\, د س = \int \frac{س}{\sqrt{(س - ٢)(س + ٢)}} \,.\, د س = \int \frac{س}{\sqrt{س^{٢} - ٤}} \,.\, د س$

افرض $ص = \sqrt{س^{٢} - ٤} \leftarrow ص^{٢} = س^{٢} - ٤ \leftarrow ٢ ص \frac{د ص}{د س} = ٢ س$

$\leftarrow د س = \frac{ص \,.\, د ص}{س}$

$$\int \frac{\text{س}}{\sqrt{\text{س}^2 - ٤}} \,.\, \text{د س} = \int \frac{\text{س}}{\text{ص}} \,.\, \frac{\text{ص . د ص}}{\text{س}} = \int \text{د ص} = \text{ص} + \text{جـ} = \sqrt{\text{س}^2 - ٤} + \text{جـ}$$

مثال جد $\int \text{جا}^3\text{س} \,.\, \text{د س}$

الحل $\int \text{جا}^3\text{س} \,.\, \text{د س} = \int \text{جا س جا}^2\text{س} \,.\, \text{د س} = \int \text{جا س} \left(١ - \text{جتا}^2\text{س}\right) .\, \text{د س}$

$= \int \left(\text{جا س} - \text{جتا}^2\text{س جا س}\right) .\, \text{د س}$

$= -\,\text{جتا س} - \int \text{جتا}^2\text{س جا س} \,.\, \text{د س}$



افرض ص = جتا س $\longleftarrow \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = -\,\text{جا س} \longleftarrow \text{د س} = \frac{-\,\text{د ص}}{\text{جا س}}$

$\int \text{جتا}^2\text{س جا س} \,.\, \text{د س} = \int \text{ص}^2 \text{ جا س} \,.\, \frac{-\,\text{د ص}}{\text{جا س}} = -\int \text{ص}^2 \,.\, \text{د ص} = \frac{-\,\text{ص}^3}{٣} = \frac{-\,\text{جتا}^3\text{س}}{٣}$

$= -\,\text{جتا س} + \frac{\text{جتا}^3\text{س}}{٣} + \text{جـ}$

مثال جد $\int \text{جا}^3\text{س جتا}^2\text{س} \,.\, \text{د س}$

الحل افرض ص = جتا س $\longleftarrow \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = -\,\text{جا س} \longleftarrow \text{د س} = \frac{-\,\text{د ص}}{\text{جا س}}$

$\int \text{جا}^3\text{س جتا}^2\text{س} \,.\, \text{د س} = \int \text{جا}^3\text{س} \,.\, \text{ص}^2 \,.\, \frac{-\,\text{د ص}}{\text{جا س}} = -\int \text{جا}^2\text{س} \,.\, \text{ص}^2 \,.\, \text{د ص}$

$= -\int \left(١ - \text{جتا}^2\text{س}\right) .\, \text{ص}^2 \,.\, \text{د ص} = -\int \left(١ - \text{ص}^2\right) .\, \text{ص}^2 \,.\, \text{د ص} = -\int \left(\text{ص}^2 - \text{ص}^4\right) .\, \text{د ص}$

$= -\left(\frac{١}{٣}\text{ص}^3 - \frac{١}{٥}\text{ص}^5\right) + \text{جـ} = -\left(\frac{١}{٣}\text{جتا}^3\text{س} - \frac{١}{٥}\text{جتا}^5\text{س}\right) + \text{جـ}$

مثال جد $\int \text{جا}^3\text{س جتا}^3\text{س} \,.\, \text{د س}$

الحل افرض ص = جتا س $\longleftarrow \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = -\,\text{جا س} \longleftarrow \text{د س} = \frac{-\,\text{د ص}}{\text{جا س}}$

$\int \text{جا}^3\text{س جتا}^3\text{س} \,.\, \text{د س} = \int \text{جا}^3\text{س} \,.\, \text{ص}^3 \,.\, \frac{-\,\text{د ص}}{\text{جا س}} = -\int \text{جا}^2\text{س} \,.\, \text{ص}^3 \,.\, \text{د ص}$

$= -\int \left(١ - \text{جتا}^2\text{س}\right) .\, \text{ص}^3 \,.\, \text{د ص} = -\int \left(١ - \text{ص}^2\right) .\, \text{ص}^3 \,.\, \text{د ص} = -\int \left(\text{ص}^3 - \text{ص}^5\right) .\, \text{د ص}$

$= -\left(\frac{١}{٤}\text{ص}^4 - \frac{١}{٦}\text{ص}^6\right) + \text{جـ} = -\left(\frac{١}{٤}\text{جتا}^4\text{س} - \frac{١}{٦}\text{جتا}^6\text{س}\right) + \text{جـ}$

مثال جد $\int$ (جتا^{32}س جا^{30}س − جتا^{30}س جا^{32}س) . د س

الحل

$\int$ (جتا^{32}س جا^{30}س − جتا^{30}س جا^{32}س) . د س = $\int$ جتا^{30}س جا^{30}س (جتا^{2}س − جا^{2}س) . د س

= $\int$ (جا س جتا س)^{30} جتا ٢ س . د س = $\int$ ($\frac{1}{2}$ جا ٢ س)^{30} جتا ٢ س . د س

افرض ص = $\frac{1}{2}$ جا ٢ س ⟵ $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = جتا ٢ س ⟵ د س = $\frac{\text{د ص}}{\text{جتا ٢ س}}$

$\int$ ($\frac{1}{2}$ جا ٢ س)^{30} جتا ٢ س . د س = $\int$ ص^{30} جتا ٢ س . $\frac{\text{د ص}}{\text{جتا ٢ س}}$ = $\int$ ص^{30} . د ص

= $\frac{\text{ص}^{31}}{31}$ + جـ = $\frac{(\frac{1}{2}\text{ جا ٢ س})^{31}}{31}$ + جـ

مثال جد $\int$ $\frac{\text{جا}^{5}\text{س}}{\text{جتا}^{7}\text{س}}$. د س

الحل

$\int$ $\frac{\text{جا}^{5}\text{س}}{\text{جتا}^{7}\text{س}}$. د س = $\int$ $\frac{\text{جا}^{5}\text{س}}{\text{جتا}^{5}\text{س جتا}^{2}\text{س}}$. د س = $\int$ ظا^{5}س قا^{2}س . د س

افرض ص = ظا س ⟵ $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = قا^{2}س ⟵ د س = $\frac{\text{د ص}}{\text{قا}^{2}\text{س}}$

$\int$ ظا^{5}س قا^{2}س . د س = $\int$ ص^{5} قا^{2}س . $\frac{\text{د ص}}{\text{قا}^{2}\text{س}}$ = $\int$ ص^{5} . د ص

= $\frac{\text{ص}^{6}}{6}$ + جـ = $\frac{\text{ظا}^{6}\text{س}}{6}$ + جـ

مثال جد $\int$ (ظا^{7}س + ظا^{9}س) . د س

الحل

$\int$ (ظا^{7}س + ظا^{9}س) . د س = $\int$ ظا^{7}س (١ + ظا^{2}س) . د س = $\int$ ظا^{7}س قا^{2}س . د س

افرض ص = ظا س ⟵ $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = قا^{2}س ⟵ د س = $\frac{\text{د ص}}{\text{قا}^{2}\text{س}}$

$\int$ ظا^{7}س قا^{2}س . د س = $\int$ ص^{7} قا^{2}س . $\frac{\text{د ص}}{\text{قا}^{2}\text{س}}$ = $\int$ ص^{7} . د ص

= $\frac{\text{ص}^{8}}{8}$ + جـ = $\frac{\text{ظا}^{8}\text{س}}{8}$ + جـ

مثال جد $\int$ قا^{7}س ظا س . د س

الحل

$\int$ قا^{7}س ظا س . د س = $\int$ قا^{6}س . قا س ظا س . د س

افرض ص = قا س ← $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = قا س ظا س ← د س = $\frac{\text{د ص}}{\text{قا س ظا س}}$

$\int$ قا^{6}س . قا س ظا س . د س = $\int$ ص^{6} . قا س ظا س . $\frac{\text{د ص}}{\text{قا س ظا س}}$ = $\int$ ص^{6} . د ص

= $\frac{\text{ص}^{7}}{7}$ + جـ = $\frac{\text{قا}^{7}\text{س}}{7}$ + جـ

مثال جد $\int$ قا^{7}س جا س . د س

الحل $\int$ قا^{7}س جا س . د س = $\int$ قا^{6}س . قا س جا س . د س = $\int$ قا^{6}س . $\frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}}$. د س

= $\int$ قا^{6}س ظا س . د س = $\int$ قا^{5}س . قا س ظا س . د س

افرض ص = قا س ← $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = قا س ظا س ← د س = $\frac{\text{د ص}}{\text{قا س ظا س}}$

$\int$ قا^{5}س . قا س ظا س . د س = $\int$ ص^{5} . قا س ظا س . $\frac{\text{د ص}}{\text{قا س ظا س}}$ = $\int$ ص^{5} . د ص

= $\frac{\text{ص}^{6}}{6}$ + جـ = $\frac{\text{قا}^{6}\text{س}}{6}$ + جـ

مثال جد $\int$ جا^{ن}س قا$^{ن+2}$س . د س

الحل $\int$ جا^{ن}س قا$^{ن+2}$س . د س = $\int$ جا^{ن}س قا^{ن}س قا^{2}س . د س = $\int$ $\frac{\text{جا}^{ن}\text{س}}{\text{جتا}^{ن}\text{س}}$. قا^{2}س . د س

= $\int$ ظا^{ن}س . قا^{2}س . د س

افرض ص = ظا س ← $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = قا^{2}س ← د س = $\frac{\text{د ص}}{\text{قا}^{2}\text{س}}$

$\int$ ظا^{ن}س . قا^{2}س . د س = $\int$ ص^{ن} . قا^{2}س . $\frac{\text{د ص}}{\text{قا}^{2}\text{س}}$ = $\int$ ص^{ن} . د ص = $\frac{\text{ص}^{ن+1}}{ن+1}$ + جـ

= $\frac{(\text{ظا س})^{ن+1}}{ن+1}$ + جـ

مثال جد $\int$ قا س (قا س + ظا س)^{ن} . د س

الحل افرض ص = قا س + ظا س

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = قا س ظا س + قا^{2}س = قا س (ظا س + قا س)

← د س = $\frac{\text{د ص}}{\text{قا س (ظا س + قا س)}}$ = $\frac{\text{د ص}}{\text{قا س .ص}}$

$\int$ قا س (قا س + ظا س)^{ن} . د س = $\int$ قا س ص^{ن} . $\frac{\text{د ص}}{\text{قا س .ص}}$ = $\int$ ص$^{ن-1}$. د ص

$$= \frac{\text{ص}^{ن}}{ن} + \text{جـ} = \frac{(\text{قا س} + \text{ظا س})^{ن}}{ن} + \text{جـ}$$

مثال جد $\int \sqrt{\text{ظا س}}\ \text{قا}^4\text{س} \, . \, \text{د س}$

الحل افرض $\text{ص} = \sqrt{\text{ظا س}} \longrightarrow \text{ص}^2 = \text{ظا س} \longrightarrow 2\text{ص}\ \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{قا}^2\text{س}$

$$\longrightarrow \text{د س} = \frac{2\text{ص} \, . \, \text{د ص}}{\text{قا}^2\text{س}}$$

$$\int \sqrt{\text{ظا س}}\ \text{قا}^4\text{س} \, . \, \text{د س} = \int \text{ص}\ \text{قا}^4\text{س} \, . \, \frac{2\text{ص} \, . \, \text{د ص}}{\text{قا}^2\text{س}} = 2\int \text{ص}^2\ \text{قا}^2\text{س} \, . \, \text{د ص}$$

$1 + \text{ظا}^2\text{س} = \text{قا}^2\text{س}$

$1 + \text{ص}^4 = \text{قا}^2\text{س}$

$$= 2\int \text{ص}^2 (1 + \text{ص}^4) \, . \, \text{د ص} = 2\int (\text{ص}^2 + \text{ص}^6) \, . \, \text{د ص}$$

$$= 2\left(\frac{1}{3}\text{ص}^3 + \frac{1}{7}\text{ص}^7\right) + \text{جـ} = 2\left(\frac{(\sqrt{\text{ظا س}})^3}{3} + \frac{(\sqrt{\text{ظا س}})^7}{7}\right) + \text{جـ}$$

مثال جد $\int \sqrt{\text{جا س}}\ \text{ظتا س} \, . \, \text{د س}$

الحل افرض $\text{ص} = \sqrt{\text{جا س}} \longrightarrow \text{ص}^2 = \text{جا س} \longrightarrow 2\text{ص}\ \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{جتا س}$

$$\longrightarrow \text{د س} = \frac{2\text{ص} \, . \, \text{د ص}}{\text{جتا س}}$$

$$\int \sqrt{\text{جا س}}\ \text{ظتا س} \, . \, \text{د س} = \int \text{ص}\ \text{ظتا س} \, . \, \frac{2\text{ص} \, . \, \text{د ص}}{\text{جتا س}}$$

$$= \int \text{ص}\ \frac{\text{جتا س}}{\text{جا س}} \, . \, \frac{2\text{ص} \, . \, \text{د ص}}{\text{جتا س}} = 2\int \frac{\text{ص}^2}{\text{جا س}} \, . \, \text{د ص} = 2\int \frac{\text{ص}^2}{\text{ص}^2} \, . \, \text{د ص}$$

$$= 2\int \text{د ص} = 2\text{ص} + \text{جـ} = 2\sqrt{\text{جا س}} + \text{جـ}$$

مثال جد $\int \text{قا}^3\text{س}\ \text{ظا}^3\text{س} \, . \, \text{د س}$

الحل افرض $\text{ص} = \text{قا س} \longrightarrow \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{قا س ظا س} \longrightarrow \text{د س} = \frac{\text{د ص}}{\text{قا س ظا س}}$

$$\int \text{قا}^3\text{س}\ \text{ظا}^3\text{س} \, . \, \text{د س} = \int \text{ص}^3 \, . \, \text{ظا}^3\text{س} \, . \, \frac{\text{د ص}}{\text{قا س ظا س}} = \int \text{ص}^3 \, . \, \text{ظا}^2\text{س} \, . \, \frac{\text{د ص}}{\text{ص}}$$

$\text{ظا}^2\text{س} = \text{قا}^2\text{س} - 1$

$= \text{ص}^2 - 1$

$$= \int \text{ص}^2 (\text{ص}^2 - 1) \, . \, \text{د ص} = \int (\text{ص}^4 - \text{ص}^2) \, . \, \text{د ص}$$

$$= \frac{1}{5}\text{ص}^5 - \frac{1}{3}\text{ص}^3 + \text{جـ}$$

$$= \frac{1}{5}\text{قا}^5\text{س} - \frac{1}{3}\text{قا}^3\text{س} + \text{جـ}$$

مثال جد $\int \text{جتا}^{٣}\text{س} \, (\text{١} + \text{جا س})^{٧} \, . \, \text{د س}$

الحل افرض $\text{ص} = \text{١} + \text{جا س} \longleftarrow \dfrac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{جتا س} \longleftarrow \text{د س} = \dfrac{\text{د ص}}{\text{جتا س}}$

$$\int \text{جتا}^{٣}\text{س} \, (\text{١} + \text{جا س})^{٧} . \text{د س} = \int \text{جتا}^{٣}\text{س} \; \text{ص}^{٧} . \dfrac{\text{د ص}}{\text{جتا س}} = \int \text{جتا}^{٢}\text{س} \; \text{ص}^{٧} . \text{د ص}$$

$$= \int (\text{٢ص} - \text{ص}^{٢}) \, \text{ص}^{٧} . \text{د ص}$$

$$= \int (\text{٢ص}^{٨} - \text{ص}^{٩}) . \text{د ص}$$

$$= \dfrac{\text{٢ ص}^{٩}}{\text{٩}} - \dfrac{\text{ص}^{١٠}}{\text{١٠}} + \text{جـ}$$

$$= \dfrac{\text{٢} \, (\text{١} + \text{جا س})^{٩}}{\text{٩}} - \dfrac{(\text{١} + \text{جا س})^{١٠}}{\text{١٠}} + \text{جـ}$$

$\text{ص} = \text{١} + \text{جا س}$
$\text{ص} - \text{١} = \text{جا س}$
$(\text{ص} - \text{١})^{٢} = \text{جا}^{٢}\text{س}$
$\text{ص}^{٢} - \text{٢ص} + \text{١} = \text{١} - \text{جتا}^{٢}\text{س}$
$\text{٢ص} - \text{ص}^{٢} = \text{جتا}^{٢}\text{س}$

مثال جد $\int \dfrac{\text{جا}^{٣}\text{س}}{\text{٢} + \text{جتا س}} \, . \, \text{د س}$

الحل افرض $\text{ص} = \text{٢} + \text{جتا س} \longleftarrow \dfrac{\text{د ص}}{\text{د س}} = -\text{جا س} \longleftarrow \text{د س} = \dfrac{-\text{د ص}}{\text{جا س}}$

$$\int \dfrac{\text{جا}^{٣}\text{س}}{\text{٢} + \text{جتا س}} . \text{د س} = \int \dfrac{\text{جا}^{٣}\text{س}}{\text{ص}} . \dfrac{-\text{د ص}}{\text{جا س}} = -\int \dfrac{\text{جا}^{٢}\text{س}}{\text{ص}} . \text{د ص}$$

$$= \int \dfrac{\text{ص}^{٢} - \text{٤ص} + \text{٣}}{\text{ص}} . \text{د ص}$$

$$= \int \left(\text{ص} - \text{٤} + \dfrac{\text{٣}}{\text{ص}}\right) . \text{د ص}$$

$$= \dfrac{\text{ص}^{٢}}{\text{٢}} - \text{٤ ص} + \text{٣ لـوهـ} \, |\text{ص}| + \text{جـ}$$

$$= \dfrac{(\text{٢} + \text{جتا س})^{٢}}{\text{٢}} - \text{٤} \, (\text{٢} + \text{جتا س}) + \text{٣ لـوهـ} \, |\text{٢} + \text{جتا س}| + \text{جـ}$$

$\text{ص} = \text{٢} + \text{جتا س}$
$\text{ص} - \text{٢} = \text{جتا س}$
$(\text{ص} - \text{٢})^{٢} = \text{جتا}^{٢}\text{س}$
$\text{ص}^{٢} - \text{٤ص} + \text{٤} = \text{١} - \text{جا}^{٢}\text{س}$
$\text{٤ص} - \text{ص}^{٢} - \text{٣} = \text{جا}^{٢}\text{س}$

مثال جد $\int (\text{جا س} + \text{جتا س})^{٧} \, \text{جتا ٢ س} \, . \, \text{د س}$

الحل

$$\int (\text{جا س} + \text{جتا س})^{٧} \text{جتا ٢ س} . \text{د س} = \int (\text{جا س} + \text{جتا س})^{٧} (\text{جتا}^{٢}\text{س} - \text{جا}^{٢}\text{س}) . \text{د س}$$

$$= \int (\text{جا س} + \text{جتا س})^{٧} \, (\text{جتا س} + \text{جا س}) \, (\text{جتا س} - \text{جا س}) . \text{د س}$$

$$= \int (\text{جا س} + \text{جتا س})^{٨} \, (\text{جتا س} - \text{جا س}) . \text{د س}$$

افرض $\text{ص} = \text{جا س} + \text{جتا س} \longleftarrow \dfrac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{جتا س} - \text{جا س}$

$\leftarrow$ د س = $\frac{\text{د ص}}{\text{جتا س} - \text{جا س}}$

$\int$ (جا س + جتا س)^{8} (جتا س - جا س) . د س = $\int$ ص^{8} (جتا س - جا س) $\frac{\text{د ص}}{\text{جتا س} - \text{جا س}}$

= $\int$ ص^{8} . د ص = $\frac{\text{ص}^{9}}{9}$ + جـ = $\frac{(\text{جا س} + \text{جتا س})^{9}}{9}$ + جـ

مثال جد $\int$ جا س (١ + جتا ٢ س)^{5} . د س

(الحل) $\int$ جا س (١ + جتا ٢ س)^{5} . د س = $\int$ جا س (١ + ٢ جتا^{2} س − ١)^{5} . د س

= $\int$ جا س (٢ جتا^{2} س)^{5} . د س = ٣٢ $\int$ جا س جتا^{10} س . د س

افرض ص = جتا س $\leftarrow$ $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = - جا س $\leftarrow$ د س = $\frac{-\text{د ص}}{\text{جا س}}$

٣٢ $\int$ جا س جتا^{10} س . د س = ٣٢ $\int$ جا س . ص^{10} . $\frac{-\text{د ص}}{\text{جا س}}$ = -٣٢ $\int$ ص^{10} . د ص

= $\frac{-32\ \text{ص}^{11}}{11}$ + جـ = $\frac{-32\ \text{جتا}^{11}\text{س}}{11}$ + جـ

مثال جد $\int \frac{\text{جا ٢ س}}{\text{جتا}^{2}\text{س} + \text{٢ جتا س} + 1}$. د س

(الحل) $\int \frac{\text{جا ٢ س}}{\text{جتا}^{2}\text{س} + \text{٢ جتا س} + 1}$. د س = $\int \frac{\text{٢ جا س جتا س}}{(\text{جتا س} + 1)^{2}}$. د س

افرض ص = جتا س + ١ $\leftarrow$ $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = - جا س $\leftarrow$ د س = $\frac{-\text{د ص}}{\text{جا س}}$

$\int \frac{\text{٢ جا س جتا س}}{(\text{جتا س} + 1)^{2}}$. د س = $\int \frac{\text{٢ جا س جتا س}}{\text{ص}^{2}}$. $\frac{-\text{د ص}}{\text{جا س}}$ = -٢ $\int \frac{\text{جتا س}}{\text{ص}^{2}}$. د ص

ص = جتا س + ١
جتا س = ص − ١

= -٢ $\int$ ص$^{-2}$ (ص − ١) . د ص = -٢ $\int$ (ص$^{-1}$ − ص$^{-2}$) . د ص

= -٢ $\int$ ($\frac{1}{\text{ص}}$ − ص$^{-2}$) . د ص = -٢ (لـو$_{هـ}$ | ص | + ص$^{-1}$) + جـ

= -٢ (لـو$_{هـ}$ | جتا س + ١ | + (جتا س + ١)$^{-1}$) + جـ

مثال جد $\int \frac{\text{جا}^{2}\text{س}}{\sqrt{\text{٢ س} - \text{جا ٢ س}}}$. د س

(الحل) افرض ص = $\sqrt{\text{٢ س} - \text{جا ٢ س}}$ $\leftarrow$ ص^{2} = ٢ س − جا ٢ س

$\leftarrow$ ٢ ص $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = ٢ − ٢ جتا ٢ س = ٢ (١ - جتا ٢ س)

$\leftarrow \quad د س = \frac{ص . د ص}{١ - جتا ٢ س}$

$$\int \frac{جا^٢ س}{\sqrt{٢ س - جا ٢ س}} . د س = \int \frac{\frac{١}{٢}(١ - جتا ٢ س)}{ص} . \frac{ص . د ص}{١ - جتا ٢ س}$$

$$= \frac{١}{٢}\int د ص = \frac{١}{٢} ص + جـ = \frac{١}{٢}\sqrt{٢ س - جا ٢ س} + جـ$$

مثال جد $\int \frac{جا ٢ س}{\sqrt{١ + جا س}} . د س$

الحل افرض $ص = \sqrt{١ + جا س}$

$\leftarrow \quad ص^٢ = ١ + جا س \quad \leftarrow \quad ٢ ص \frac{د ص}{د س} = جتا س \quad \leftarrow \quad د س = \frac{٢ ص . د ص}{جتا س}$

$$\int \frac{جا ٢ س}{\sqrt{١ + جا س}} . د س = \int \frac{٢ جا س جتا س}{ص} . \frac{٢ ص . د ص}{جتا س} = \int ٤ جا س . د ص$$

$ص^٢ = ١ + جا س$
$جا س = ص^٢ - ١$

$$= ٤ \int (ص^٢ - ١) . د ص = ٤ \left(\frac{ص^٣}{٣} - ص\right) + جـ$$

$$= ٤ \left(\frac{(\sqrt{١ + جا س})^٣}{٣} - \sqrt{١ + جا س}\right) + جـ$$

مثال جد $\int \sqrt{جتا س}\ جا^٣ س . د س$

الحل افرض $ص = \sqrt{جتا س} \quad \leftarrow \quad ص^٢ = جتا س \quad \leftarrow \quad ٢ ص \frac{د ص}{د س} = - جا س$

$\leftarrow \quad د س = \frac{-٢ ص . د ص}{جا س}$

$$\int \sqrt{جتا س}\ جا^٣ س . د س = \int ص\ جا^٣ س . \frac{-٢ ص . د ص}{جا س} = -٢ \int ص^٢ جا^٢ س . د ص$$

$ص^٢ = جتا س$
$ص^٤ = جتا^٢ س$
$ص^٤ = ١ - جا^٢ س$
$جا^٢ س = ١ - ص^٤$

$$= -٢ \int ص^٢ جا^٢ س . د ص = -٢ \int ص^٢ (١ - ص^٤) . د ص$$

$$= -٢ \int (ص^٢ - ص^٦) . د ص = -٢ \left(\frac{ص^٣}{٣} - \frac{ص^٧}{٧}\right) + جـ$$

$$= -٢ \left(\frac{(\sqrt{جتا س})^٣}{٣} - \frac{(\sqrt{جتا س})^٧}{٧}\right) + جـ$$

مثال جد $\int ظا س \log_{هـ} جتا س . د س$

الحل افرض $ص = \log_{هـ} جتا س$

$$\longrightarrow \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{-\text{جا س}}{\text{جتا س}} = -\text{ظا س} \longrightarrow \text{د س} = \frac{\text{د ص}}{-\text{ظا س}}$$

$$\int \text{ظا س لـو}_{\text{هـ}}\text{ جتا س . د س} = \int \text{ظا س . ص .} \frac{\text{د ص}}{-\text{ظا س}} = -\int \text{ص . د ص}$$

$$= \frac{-\text{ص}^2}{2} + \text{جـ} = \frac{-(\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{ جتا س})^2}{2} + \text{جـ}$$

مثال جد $\int \frac{\text{س}}{1 + \text{س ظا س}} \text{ . د س}$

الحل

$$\int \frac{\text{س}}{1 + \text{س ظا س}} \text{ . د س} = \int \frac{\text{س د س}}{1 + \frac{\text{س جا س}}{\text{جتا س}}} = \int \frac{\text{س جتا س}}{\text{جتا س + س جا س}} \text{ . د س}$$

افرض ص = جتا س + س جا س

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = -\text{جا س + س جتا س + جا س} = \text{س جتا س} \longrightarrow \text{د س} = \frac{\text{د ص}}{\text{س جتا س}}$$

$$\int \frac{\text{س جتا س}}{\text{جتا س + س جا س}} \text{ . د س} = \int \frac{\text{س جتا س}}{\text{ص}} \cdot \frac{\text{د ص}}{\text{س جتا س}} = \int \frac{\text{د ص}}{\text{ص}}$$

$$= \text{لـو}_{\text{هـ}} |\text{ص}| + \text{جـ} = \text{لـو}_{\text{هـ}} |\text{جتا س + س جا س}| + \text{جـ}$$

مثال جد $\int \frac{1 + \text{جتا}(\text{هـ}^{-2\text{س}})}{\text{هـ}^{2\text{س}}} \text{ . د س}$

الحل

افرض $\text{ص} = \text{هـ}^{-2\text{س}}$

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = -2\,\text{هـ}^{-2\text{س}} \longrightarrow \text{د س} = \frac{\text{د ص}}{-2\,\text{هـ}^{-2\text{س}}}$$

$$\int \frac{1 + \text{جتا}(\text{هـ}^{-2\text{س}})}{\text{هـ}^{2\text{س}}} \text{ . د س} = \int \frac{1 + \text{جتا ص}}{\text{هـ}^{2\text{س}}} \cdot \frac{\text{د ص}}{-2\,\text{هـ}^{-2\text{س}}} = \frac{-1}{2} \int (1 + \text{جتا ص}) \text{. د ص}$$

$$= \frac{-1}{2} (\text{ص + جا ص}) + \text{جـ} = \frac{-1}{2} \left(\text{هـ}^{-2\text{س}} + \text{جا}(\text{هـ}^{-2\text{س}}) \right) + \text{جـ}$$

مثال جد $\int \text{هـ}^{-2\text{س}} \text{ جتا}^2(\text{هـ}^{-2\text{س}}) \text{ . د س}$

الحل

افرض $\text{ص} = \text{هـ}^{-2\text{س}}$

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = -2\,\text{هـ}^{-2\text{س}} \longrightarrow \text{د س} = \frac{\text{د ص}}{-2\,\text{هـ}^{-2\text{س}}}$$

$$\int \text{هـ}^{-2\text{س}} \text{ جتا}^2(\text{هـ}^{-2\text{س}}) \text{ . د س} = \int \text{هـ}^{-2\text{س}} \text{ جتا}^2\text{ص .} \frac{\text{د ص}}{-2\,\text{هـ}^{-2\text{س}}} = \frac{-1}{2} \int \text{جتا}^2\text{ص . د ص}$$

$$= \frac{١-}{٢} \int \frac{١}{٢} \left(١ + \text{جتا } ٢ \text{ ص} \right) . \text{ د ص} = \frac{١-}{٤} \left(\text{ص} + \frac{\text{جا } ٢ \text{ ص}}{٢} \right) + \text{جـ}$$

$$= \frac{١-}{٤} \left(\text{هـ}^{-٢\text{س}} + \frac{\text{جا} \left(٢ \text{ هـ}^{-٢\text{س}} \right)}{٢} \right) + \text{جـ}$$

مثال جد $\int \text{قا}^{٤}\text{س} . \text{ د س}$

الحل $\int \text{قا}^{٤}\text{س} . \text{ د س} = \int \text{قا}^{٢}\text{س قا}^{٢}\text{س} . \text{ د س} = \int \text{قا}^{٢}\text{س} \left(١ + \text{ظا}^{٢}\text{س} \right) . \text{ د س}$

$= \int \left(\text{قا}^{٢}\text{س} + \text{قا}^{٢}\text{س ظا}^{٢}\text{س} \right) . \text{ د س} = \int \text{قا}^{٢}\text{س} . \text{ د س} + \int \text{قا}^{٢}\text{س ظا}^{٢}\text{س} . \text{ د س}$

$= \text{ظا س} + \int \text{قا}^{٢}\text{س ظا}^{٢}\text{س} . \text{ د س}$

افرض ص = ظا س : $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{قا}^{٢}\text{س} \longrightarrow \text{د س} = \frac{\text{د ص}}{\text{قا}^{٢}\text{س}}$

$\int \text{قا}^{٢}\text{س ظا}^{٢}\text{س} . \text{ د س} = \int \text{قا}^{٢}\text{س} . \text{ ص}^{٢} . \frac{\text{د ص}}{\text{قا}^{٢}\text{س}} = \int \text{ص}^{٢} . \text{ د ص} = \frac{١}{٣} \text{ص}^{٣} = \frac{١}{٣} \text{ظا}^{٣}\text{س}$

$= \text{ظا س} + \frac{١}{٣} \text{ظا}^{٣}\text{س} + \text{جـ}$

مثال جد $\int \text{ظا}^{٤}\text{س} . \text{ د س}$

الحل $\int \text{ظا}^{٤}\text{س} . \text{ د س} = \int \text{ظا}^{٢}\text{س ظا}^{٢}\text{س} . \text{ د س} = \int \text{ظا}^{٢}\text{س} \left(\text{قا}^{٢}\text{س} - ١ \right) . \text{ د س}$

$= \int \left(\text{ظا}^{٢}\text{س قا}^{٢}\text{س} - \text{ظا}^{٢}\text{س} \right) . \text{ د س} = \int \left(\text{ظا}^{٢}\text{س قا}^{٢}\text{س} - \left(\text{قا}^{٢}\text{س} - ١ \right) \right) . \text{ د س}$

$= \int \text{ظا}^{٢}\text{س قا}^{٢}\text{س} . \text{ د س} - \int \left(\text{قا}^{٢}\text{س} - ١ \right) . \text{ د س}$

افرض ص = ظا س : $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{قا}^{٢}\text{س} \longrightarrow \text{د س} = \frac{\text{د ص}}{\text{قا}^{٢}\text{س}}$

$\int \text{ظا}^{٢}\text{س قا}^{٢}\text{س} . \text{ د س} = \int \text{ص}^{٢} \text{ قا}^{٢}\text{س} . \frac{\text{د ص}}{\text{قا}^{٢}\text{س}} = \int \text{ص}^{٢} . \text{ د ص} = \frac{١}{٣} \text{ص}^{٣} = \frac{١}{٣} \text{ظا}^{٣}\text{س}$

$= \frac{١}{٣} \text{ظا}^{٣}\text{س} - \text{ظا س} + \text{س} + \text{جـ}$

مثال جد $\int \text{ظتا}^{٤}\text{س قتا}^{٤}\text{س} . \text{ د س}$

الحل افرض ص = ظتا س : $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = -\text{ قتا}^{٢}\text{س} \longrightarrow \text{د س} = \frac{\text{د ص}}{-\text{ قتا}^{٢}\text{س}}$

$\int \text{ظتا}^{٤}\text{س قتا}^{٤}\text{س} . \text{ د س} = \int \text{ص}^{٤} \text{ قتا}^{٤}\text{س} . \frac{\text{د ص}}{-\text{ قتا}^{٢}\text{س}} = -\int \text{ص}^{٤} \text{ قتا}^{٢}\text{س} . \text{ د ص}$

$$= -\int \text{ص}^{٤}\,(١ + \text{ظتا}^{٢}\text{س})\,.\,\text{دس} = -\int \text{ص}^{٤}\,(١ + \text{ص}^{٢})\,.\,\text{دص} = -\int (\text{ص}^{٤} + \text{ص}^{٦})\,.\,\text{دص}$$

$$= -\left(\frac{\text{ص}^{٥}}{٥} + \frac{\text{ص}^{٧}}{٧}\right) + \text{جـ} = -\left(\frac{\text{ظتا}^{٥}\text{س}}{٥} + \frac{\text{ظتا}^{٧}\text{س}}{٧}\right) + \text{جـ}$$

مثال جد $\int \sqrt{١ - \text{جا س}}\,.\,\text{دس}$

الحل

$$\int \sqrt{١ - \text{جا س}}\,.\,\text{دس} = \int \sqrt{١ - \text{جا س}}\,.\,\frac{\sqrt{١ + \text{جا س}}}{\sqrt{١ + \text{جا س}}}\,.\,\text{دس} = \int \frac{\sqrt{١ - \text{جا}^{٢}\text{س}}}{\sqrt{١ + \text{جا س}}}\,.\,\text{دس}$$

$$= \int \frac{\sqrt{\text{جتا}^{٢}\text{س}}}{\sqrt{١ + \text{جا س}}}\,.\,\text{دس} = \pm \int \frac{\text{جتا س}}{\sqrt{١ + \text{جا س}}}\,.\,\text{دس}$$

افرض $\text{ص} = \sqrt{١ + \text{جا س}}$

$$\leftarrow \text{ص}^{٢} = ١ + \text{جا س} \leftarrow ٢\,\text{ص}\,\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{جتا س} \leftarrow \text{دس} = \frac{٢\,\text{ص}\,.\,\text{دص}}{\text{جتا س}}$$

$$\pm \int \frac{\text{جتا س}}{\sqrt{١ + \text{جا س}}}\,.\,\text{دس} = \pm \int \frac{\text{جتا س}}{\text{ص}}\,.\,\frac{٢\,\text{ص}\,.\,\text{دص}}{\text{جتا س}} = \pm \int ٢\,.\,\text{دص}$$

$$= \pm ٢\,\text{ص} + \text{جـ} = \pm ٢\sqrt{١ + \text{جا س}} + \text{جـ}$$

مثال جد $\int \frac{\text{س}}{\text{س}^{٤} + ٢\,\text{س}^{٢} + ١}\,.\,\text{دس}$

الحل

$$\int \frac{\text{س}}{\text{س}^{٤} + ٢\,\text{س}^{٢} + ١}\,.\,\text{دس} = \int \frac{\text{س}}{(\text{س}^{٢} + ١)^{٢}}\,.\,\text{دس}$$

افرض $\text{ص} = \text{س}^{٢} + ١ \;:\; \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٢\,\text{س} \longleftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{٢\,\text{س}}$

$$\int \frac{\text{س}}{(\text{س}^{٢} + ١)^{٢}}\,.\,\text{دس} = \int \frac{\text{س}}{\text{ص}^{٢}}\,.\,\frac{\text{دص}}{٢\,\text{س}} = \frac{١}{٢}\int \text{ص}^{-٢}\,.\,\text{دص} = \frac{-١}{٢}\,\text{ص}^{-١} + \text{جـ}$$

$$= \frac{-١}{٢}\,(\text{س}^{٢} + ١)^{-١} + \text{جـ}$$

مثال جد $\int \text{س}^{٨}\,(١ - \text{س}^{٣})^{٥}\,.\,\text{دس}$

الحل افرض $\text{ص} = ١ - \text{س}^{٣} \;:\; \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -٣\,\text{س}^{٢} \longleftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{-٣\,\text{س}^{٢}}$

$$\int \text{س}^{٨}\,(١ - \text{س}^{٣})^{٥}\,.\,\text{دس} = \int \text{س}^{٨}\,\text{ص}^{٥}\,.\,\frac{\text{دص}}{-٣\,\text{س}^{٢}} = \frac{-١}{٣}\int \text{س}^{٦}\,\text{ص}^{٥}\,.\,\text{دص}$$

$$= \frac{-١}{٣}\int (١ - ٢\,\text{ص} + \text{ص}^{٢})\,\text{ص}^{٥}\,.\,\text{دص}$$

$$= \frac{-١}{٣}\int (\text{ص}^{٥} - ٢\,\text{ص}^{٦} + \text{ص}^{٧})\,.\,\text{دص}$$

$\text{ص} = ١ - \text{س}^{٣}$
$\text{س}^{٣} = ١ - \text{ص}$
$\text{س}^{٦} = (١ - \text{ص})^{٢}$
$\text{س}^{٦} = ١ - ٢\,\text{ص} + \text{ص}^{٢}$

$= \frac{-1}{3} \left(\frac{ص^6}{6} - \frac{2ص^7}{7} + \frac{ص^8}{8} \right) + جـ$

$= \frac{-1}{3} \left(\frac{(1-س^3)^6}{6} - \frac{2(1-س^3)^7}{7} + \frac{(1-س^3)^8}{8} \right) + جـ$

مثال جد $\int \left(\frac{2+\sqrt{س}}{س} \right)^{\frac{1}{2}} .\ د س$

الحل $\int \left(\frac{2+\sqrt{س}}{س} \right)^{\frac{1}{2}} .\ د س = \int \frac{(2+\sqrt{س})^{\frac{1}{2}}}{س^{\frac{1}{2}}} .\ د س = \int \frac{\sqrt{2+\sqrt{س}}}{\sqrt{س}} .\ د س$

افرض $ص = \sqrt{2+\sqrt{س}} \longrightarrow ص^2 = 2 + \sqrt{س}$

$\longrightarrow 2ص \frac{د ص}{د س} = \frac{1}{2\sqrt{س}} \longrightarrow د س = 4 ص \sqrt{س} .\ د ص$

$\int \frac{\sqrt{2+\sqrt{س}}}{\sqrt{س}} .\ د س = \int \frac{ص}{\sqrt{س}} 4 ص \sqrt{س} .\ د ص = 4 \int ص^2 .\ د ص$

$= \frac{4}{3} ص^3 + جـ = \frac{4}{3} \left(\sqrt{2+\sqrt{س}} \right)^3 + جـ$

مثال جد $\int \frac{هـ^{4س}}{(4 - 3هـ^{2س})^2} .\ د س$

الحل

افرض $ص = 4 - 3هـ^{2س} \longrightarrow \frac{د ص}{د س} = -6 هـ^{2س} \longrightarrow د س = \frac{د ص}{-6 هـ^{2س}}$

$\int \frac{هـ^{4س}}{(4 - 3هـ^{2س})^2} .\ د س = \int \frac{هـ^{4س}}{ص^2} . \frac{د ص}{-6 هـ^{2س}} = \frac{-1}{6} \int \frac{هـ^{2س}}{ص^2} .\ د ص$

$ص = 4 - 3هـ^{2س}$
$هـ^{2س} = \frac{4 - ص}{3}$

$= \frac{-1}{18} \int (4 - ص)\ ص^{-2} .\ د ص = \frac{-1}{18} \int (4ص^{-2} - ص^{-1}) .\ د ص$

$= \frac{-1}{18} \int \left(4ص^{-2} - \frac{1}{ص}\right) .\ د ص = \frac{-1}{18} \left(-4ص^{-1} - لـو_{هـ} |ص|\right) + جـ$

$= \frac{-1}{18} \left(-4(4 - 3هـ^{2س})^{-1} - لـو_{هـ} |4 - 3هـ^{2س}|\right) + جـ$

مثال جد $\int \frac{لـو_{هـ} س}{س\sqrt{4 لـو_{هـ} س - 1}} .\ د س$

الحل افرض $ص = \sqrt{٤ لـو_هـ س - ١} \longleftarrow ص^٢ = ٤ لـو_هـ س - ١$

$\longleftarrow ٢ ص \frac{د ص}{د س} = \frac{٤}{س} \longleftarrow د س = \frac{س ص . د ص}{٢}$

$\int \frac{لـو_هـ س}{س \sqrt{٤ لـو_هـ س - ١}} . د س = \int \frac{\frac{ص^٢ + ١}{٤}}{س ص} . \frac{س ص . د ص}{٢}$

$ص^٢ = ٤ لـو_هـ س - ١$
$لـو_هـ س = \frac{ص^٢ + ١}{٤}$

$= \frac{١}{٨} \int (ص^٢ + ١) . د ص = \frac{١}{٨} \left(\frac{ص^٣}{٣} + ص \right) + جـ$

$= \frac{١}{٨} \left(\frac{\left(\sqrt{٤ لـو_هـ س - ١}\right)^٣}{٣} + \sqrt{٤ لـو_هـ س - ١} \right) + جـ$

مثال جد $\int \sqrt{١ + س^{\frac{-٢}{٣}}} . د س$ ، $س > صفر$

الحل $\int \sqrt{١ + س^{\frac{-٢}{٣}}} . د س = \int \sqrt{١ + \frac{١}{س^{\frac{٢}{٣}}}} . د س = \int \sqrt{\frac{١ + س^{\frac{٢}{٣}}}{س^{\frac{٢}{٣}}}} . د س$

$= \int \frac{١}{س^{\frac{١}{٣}}} \sqrt{١ + س^{\frac{٢}{٣}}} . د س$

افرض $ص = \sqrt{١ + س^{\frac{٢}{٣}}} \longleftarrow ص^٢ = ١ + س^{\frac{٢}{٣}}$

$\longleftarrow ٢ ص \frac{د ص}{د س} = \frac{٢}{٣} س^{\frac{-١}{٣}} \longleftarrow د س = ٣ ص س^{\frac{١}{٣}} . د ص$

$\int \frac{١}{س^{\frac{١}{٣}}} \sqrt{١ + س^{\frac{٢}{٣}}} . د س = \int \frac{١}{س^{\frac{١}{٣}}} . ص . ٣ ص س^{\frac{١}{٣}} . د ص = ٣ \int ص^٢ . د ص = ص^٣ + جـ$

$= \left(\sqrt{١ + س^{\frac{٢}{٣}}} \right)^٣ + جـ$

مثال جد $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٣}} \sqrt{جتا س - جتا^٣ س} . د س$

الحل

$\int_{٠}^{\frac{\pi}{٣}} \sqrt{جتا س - جتا^٣ س} . د س = \int_{٠}^{\frac{\pi}{٣}} \sqrt{جتا س (١ - جتا^٢ س)} . د س$

$= \int_{٠}^{\frac{\pi}{٣}} \sqrt{جتا س جا^٢ س} . د س = \int_{٠}^{\frac{\pi}{٣}} \sqrt{جتا س} جا س . د س$

افرض $ص = \sqrt{جتا س} \longleftarrow ص^٢ = جتا س$

$\longleftarrow ٢ ص \frac{د ص}{د س} = - جا س \longleftarrow د س = \frac{-٢ ص . د ص}{جا س}$

عندما س = ٠ : ص = $\sqrt{\text{جتا } ٠} = \sqrt{١} = ١$

عندما س = $\frac{\pi}{٣}$: ص = $\sqrt{\text{جتا } \frac{\pi}{٣}} = \sqrt{\frac{١}{٢}} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$

$\int_{٠}^{\frac{\pi}{٣}} \sqrt{\text{جتا س}}\ \text{جا س . د س} = \int_{١}^{\frac{١}{\sqrt{٢}}} \text{ص جا س} . \frac{-٢\ \text{ص . د ص}}{\text{جا س}} = -٢ \int_{١}^{\frac{١}{\sqrt{٢}}} \text{ص}^{٢} . \text{د ص}$

$= \frac{-٢}{٣} \left[\text{ص}^{٣}\right]_{١}^{\frac{١}{\sqrt{٢}}} = \frac{-٢}{٣} \left(\left(\frac{١}{\sqrt{٢}}\right)^{٣} - ١^{٣} \right) = \frac{-٢}{٣} \left(\frac{١}{\sqrt{٨}} - ١ \right)$

مثال جد $\int \frac{\text{د س}}{\sqrt{\text{س} \sqrt{\text{س}} + \text{س}}}$

الحل $\int \frac{\text{د س}}{\sqrt{\text{س} \sqrt{\text{س}} + \text{س}}} = \int \frac{\text{د س}}{\sqrt{\text{س} (\sqrt{\text{س}} + ١)}} = \int \frac{\text{د س}}{\sqrt{\text{س}} \sqrt{\sqrt{\text{س}} + ١}}$

افرض ص = $\sqrt{\sqrt{\text{س}} + ١}$ ← ص^{٢} = $\sqrt{\text{س}} + ١$

← ٢ ص $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}}$ ← د س = ٤ $\sqrt{\text{س}}$ ص . د ص

$\int \frac{\text{د س}}{\sqrt{\text{س}} \sqrt{\sqrt{\text{س}} + ١}} = \int \frac{٤ \sqrt{\text{س}}\ \text{ص . د ص}}{\sqrt{\text{س}}\ \text{ص}} = \int ٤ . \text{د ص} = ٤ \text{ ص} + \text{جـ} = ٤ \left(\sqrt{\sqrt{\text{س}} + ١}\right) + \text{جـ}$

مثال إذا كان ن عددا صحيحا موجبا فجد $\int_{٠}^{١} \text{س} (١ - \text{س})^{\text{ن}} . \text{د س}$

الحل افرض ص = ١ – س ← $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = -١$ ← د س = – د ص

ص = ١ – س
س = ١ – ص

عندما س = ٠ : ص = ١ - ٠ = ١ ، عندما س = ١ : ص = ١ - ١ = ٠

$\int_{٠}^{١} \text{س} (١ - \text{س})^{\text{ن}} . \text{د س} = \int_{١}^{٠} (١ - \text{ص})\ \text{ص}^{\text{ن}} . -\text{د ص} = \int_{٠}^{١} (١ - \text{ص})\ \text{ص}^{\text{ن}} . \text{د ص}$

$= \int_{٠}^{١} (\text{ص}^{\text{ن}} - \text{ص}^{\text{ن}+١}) . \text{د ص} = \left(\frac{\text{ص}^{\text{ن}+١}}{\text{ن}+١} - \frac{\text{ص}^{\text{ن}+٢}}{\text{ن}+٢} \right) \Big|_{٠}^{١} = \left(\frac{(١)^{\text{ن}+١}}{\text{ن}+١} - \frac{(١)^{\text{ن}+٢}}{\text{ن}+٢} \right) - \left(\frac{(٠)^{\text{ن}+١}}{\text{ن}+١} - \frac{(٠)^{\text{ن}+٢}}{\text{ن}+٢} \right)$

$= \frac{١}{(\text{ن}+١)(\text{ن}+٢)}$

مثال إذا كان ق اقترانا متصلا على [٠ ، أ] فاثبت أن : $\int_{٠}^{\text{أ}} \text{ق (أ – س) . د س} = \int_{٠}^{\text{أ}} \text{ق (س) . د س}$

الحل افرض ص = أ – س ← $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = -١$ ← د س = – د ص

عندما س = ٠ : ص = أ - ٠ = أ ، عندما س = أ : ص = أ - أ = ٠

$\int_{٠}^{\text{أ}} \text{ق (أ – س) . د س} = \int_{\text{أ}}^{٠} \text{ق (ص) . -د ص} = \int_{٠}^{\text{أ}} \text{ق (ص) . د ص} = \int_{٠}^{\text{أ}} \text{ق (س) . د س}$

أمثلة متنوعة « التعويض و تكامل الاقترانات النسبية »

مثال جد $\int \frac{\sqrt{\text{س}}}{\text{س} - ٩} \,.\, \text{د س}$

الحل افرض ص = $\sqrt{\text{س}}$ ⟵ $\text{ص}^{٢} = \text{س}$

$٢\,\text{ص} \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = ١$ ⟵ د س = ٢ ص . د ص

$\int \frac{\sqrt{\text{س}}}{\text{س} - ٩} \,.\, \text{د س} = \int \frac{\text{ص}}{\text{ص}^{٢} - ٩} \,.\, ٢\,\text{ص} \,.\, \text{د ص} = ٢ \int \frac{\text{ص}^{٢}}{\text{ص}^{٢} - ٩} \,.\, \text{د ص}$

(قسمة: $\text{ص}^{٢} \div (\text{ص}^{٢} - ٩) = ١$ ، $\text{ص}^{٢} \mp ٩$ ، الباقي ٩)

$= ٢ \int \left(١ + \frac{٩}{\text{ص}^{٢} - ٩}\right) \,.\, \text{د ص}$

$\frac{٩}{\text{ص}^{٢} - ٩} = \frac{٩}{(\text{ص} - ٣)(\text{ص} + ٣)} = \frac{\text{أ}}{\text{ص} - ٣} + \frac{\text{ب}}{\text{ص} + ٣} = \frac{\text{أ}(\text{ص} + ٣) + \text{ب}(\text{ص} - ٣)}{(\text{ص} - ٣)(\text{ص} + ٣)}$

⟵ ٩ = أ (ص + ٣) + ب (ص - ٣)

بوضع ص = - ٣ : ٩ = أ (- ٣ + ٣) + ب (- ٣ - ٣) ⟵ $\text{ب} = \frac{-٣}{٢}$

بوضع ص = ٣ : ٩ = أ (٣ + ٣) + ب (٣ - ٣) ⟵ $\text{أ} = \frac{٣}{٢}$

$٢ \int \left(١ + \frac{٩}{\text{ص}^{٢} - ٩}\right) \,.\, \text{د ص} = ٢ \int \left(١ + \frac{\frac{٣}{٢}}{\text{ص} - ٣} + \frac{\frac{-٣}{٢}}{\text{ص} + ٣}\right) \,.\, \text{د ص}$

$= ٢\left(\text{ص} + \frac{٣}{٢} \text{لـو}_{\text{هـ}} |\text{ص} - ٣| - \frac{٣}{٢} \text{لـو}_{\text{هـ}} |\text{ص} + ٣|\right) + \text{جـ}$

$= ٢\left(\sqrt{\text{س}} + \frac{٣}{٢} \text{لـو}_{\text{هـ}} |\sqrt{\text{س}} - ٣| - \frac{٣}{٢} \text{لـو}_{\text{هـ}} |\sqrt{\text{س}} + ٣|\right) + \text{جـ}$

مثال جد $\int \frac{\text{د س}}{٤ + ٥\sqrt{\text{س}}}$

الحل افرض ص = $\sqrt{\text{س}}$ ⟵ $\text{ص}^{٢} = \text{س}$

$٢\,\text{ص} \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = ١$ ⟵ د س = ٢ ص . د ص

(قسمة: $٢\,\text{ص} \div (٥\,\text{ص} + ٤) = \frac{٢}{٥}$ ، $\mp ٢\,\text{ص} \mp \frac{٨}{٥}$ ، الباقي $\frac{-٨}{٥}$)

$\int \frac{\text{د س}}{٤ + ٥\sqrt{\text{س}}} = \int \frac{٢\,\text{ص} \,.\, \text{د ص}}{٤ + ٥\,\text{ص}} = \int \left(\frac{٢}{٥} + \frac{\frac{-٨}{٥}}{٥\,\text{ص} + ٤}\right) \,.\, \text{د ص}$

$= \frac{٢}{٥}\,\text{ص} - \frac{٨}{٢٥} \text{لـو}_{\text{هـ}} |٥\,\text{ص} + ٤| + \text{جـ}$

$= \frac{٢}{٥}\sqrt{\text{س}} - \frac{٨}{٢٥} \text{لـو}_{\text{هـ}} |٥\sqrt{\text{س}} + ٤| + \text{جـ}$

مثال جد $\int_{٤}^{٩} \frac{\text{س} + ١}{\sqrt{\text{س}} + ٤} \,.\, \text{د س}$

الحل افرض $\text{ص} = \sqrt{\text{س}} \longrightarrow \text{ص}^{٢} = \text{س}$

$٢\,\text{ص}\,\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = ١ \longrightarrow \text{د س} = ٢\,\text{ص} \,.\, \text{د ص}$

عندما $\text{س} = ٤ \,:\, \text{ص} = \sqrt{٤} = ٢$ ، عندما $\text{س} = ٩ \,:\, \text{ص} = \sqrt{٩} = ٣$

$\int_{٤}^{٩} \frac{\text{س} + ١}{\sqrt{\text{س}} + ٤} \,.\, \text{د س} = \int_{٢}^{٣} \frac{\text{ص}^{٢} + ١}{\text{ص} + ٤} \,.\, ٢\,\text{ص} \,.\, \text{د ص} = ٢\int_{٢}^{٣} \frac{\text{ص}^{٣} + \text{ص}}{\text{ص} + ٤} \,.\, \text{د ص}$

$= ٢\int_{٢}^{٣} \left(\text{ص}^{٢} - ٤\,\text{ص} + ١٧ + \frac{-٦٨}{\text{ص} + ٤} \right) \,.\, \text{د ص}$

$= ٢\left[\frac{\text{ص}^{٣}}{٣} - ٢\,\text{ص}^{٢} + ١٧\,\text{ص} - ٦٨\,\text{لـو}_{\text{هـ}} |\text{ص} + ٤| \right]_{٢}^{٣}$

$= ٢\Big[\left(\frac{(٣)^{٣}}{٣} - ٢(٣)^{٢} + ١٧(٣) - ٦٨\,\text{لـو}_{\text{هـ}} |٣ + ٤| \right)$
$- \left(\frac{(٢)^{٣}}{٣} - ٢(٢)^{٢} + ١٧(٢) - ٦٨\,\text{لـو}_{\text{هـ}} |٢ + ٤| \right) \Big]$

$= \frac{٨٠}{٣} - ١٣٦\,\text{لـو}_{\text{هـ}} \frac{٦}{٧}$

Long division shown in the side box ($\text{ص}^{٣} + \text{ص}$ divided by $\text{ص} + ٤$):

$\text{ص}^{٢} - ٤\,\text{ص} + ١٧$
$\text{ص} + ٤ \;)\; \text{ص}^{٣} + \text{ص}$
$\mp \text{ص}^{٣} \mp ٤\,\text{ص}^{٢}$
$-٤\,\text{ص}^{٢} + \text{ص}$
$\pm ٤\,\text{ص}^{٢} \pm ١٦\,\text{ص}$
$١٧\,\text{ص}$
$\mp ١٧\,\text{ص} \mp ٦٨$
-٦٨

مثال جد $\int \frac{\text{د س}}{\text{س}\left(\sqrt[٣]{\text{س}} - ١\right)}$

الحل افرض $\text{ص} = \sqrt[٣]{\text{س}} \longrightarrow \text{ص}^{٣} = \text{س}$

$٣\,\text{ص}^{٢}\,\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = ١ \longrightarrow \text{د س} = ٣\,\text{ص}^{٢} \,.\, \text{د ص}$

$\int \frac{\text{د س}}{\text{س}\left(\sqrt[٣]{\text{س}} - ١\right)} = \int \frac{٣\,\text{ص}^{٢} \,.\, \text{د ص}}{\text{ص}^{٣}(\text{ص} - ١)} = ٣\int \frac{\text{د ص}}{\text{ص}(\text{ص} - ١)}$

$\frac{١}{\text{ص}(\text{ص} - ١)} = \frac{\text{أ}}{\text{ص}} + \frac{\text{ب}}{\text{ص} - ١} = \frac{\text{أ}(\text{ص} - ١) + \text{ب}\,\text{ص}}{\text{ص}(\text{ص} - ١)}$

$\longrightarrow ١ = \text{أ}(\text{ص} - ١) + \text{ب}\,\text{ص}$

بوضع $\text{ص} = ١ \,:\, ١ = \text{أ}(١ - ١) + \text{ب}(١) \longrightarrow \text{ب} = ١$

بوضع $\text{ص} = ٠ \,:\, ١ = \text{أ}(٠ - ١) + \text{ب}(٠) \longrightarrow \text{أ} = {}^{-}١$

$٣\int \frac{\text{د ص}}{\text{ص}(\text{ص} - ١)} = ٣\int \left(\frac{-١}{\text{ص}} + \frac{١}{\text{ص} - ١} \right) \,.\, \text{د ص} = ٣\left(-\text{لـو}_{\text{هـ}} |\text{ص}| + \text{لـو}_{\text{هـ}} |\text{ص} - ١| \right) + \text{جـ}$

$= ٣\left(-\text{لـو}_{\text{هـ}} |\sqrt[٣]{\text{س}}| + \text{لـو}_{\text{هـ}} |\sqrt[٣]{\text{س}} - ١| \right) + \text{جـ}$

مثال جد $\int_{1}^{32} \frac{د س}{س + س \sqrt[5]{س}}$

الحل افرض ص = $\sqrt[5]{س}$ ⟵ ص^5 = س

٥ ص^4 $\frac{د ص}{د س}$ = ١ ⟵ د س = ٥ ص^4. د ص

عندما س = ١ : ص = $\sqrt[5]{1}$ = ١ ، عندما س = ٣٢ : ص = $\sqrt[5]{32}$ = ٢

$\int_{1}^{32} \frac{د س}{س + س \sqrt[5]{س}} = \int_{1}^{2} \frac{٥ ص^4 . د ص}{ص^5 + ص^5 ص} = ٥ \int_{1}^{2} \frac{ص^4}{ص^5 (١ + ص)} . د ص$

$= ٥ \int_{1}^{2} \frac{د ص}{ص (ص + ١)}$

$\frac{١}{ص (ص + ١)} = \frac{أ}{ص} + \frac{ب}{ص + ١} = \frac{أ (ص + ١) + ب ص}{ص (ص + ١)}$

⟵ ١ = أ (ص + ١) + ب ص

بوضع ص = -١ : ١ = أ (-١ + ١) + ب (-١) ⟵ ب = -١

بوضع ص = ٠ : ١ = أ (٠ + ١) + ب (٠) ⟵ أ = ١

$٥ \int_{1}^{2} \frac{د ص}{ص (ص + ١)} = ٥ \int_{1}^{2} \left(\frac{١}{ص} + \frac{-١}{ص + ١} \right) . د ص = ٥ \left[لـو_هـ |ص| - لـو_هـ |ص + ١| \right]_{1}^{2}$

$= ٥ \left[\left(لـو_هـ |٢| - لـو_هـ |٢ + ١| \right) - \left(لـو_هـ |١| - لـو_هـ |١ + ١| \right) \right] = ٥ لـو_هـ \frac{٤}{٣}$

مثال جد $\int_{0}^{1} \frac{\sqrt{س}}{١ + \sqrt{س}} . د س$

الحل افرض ص = $\sqrt{س}$ ⟵ ص^2 = س

٢ ص $\frac{د ص}{د س}$ = ١ ⟵ د س = ٢ ص . د ص

عندما س = ٠ : ص = $\sqrt{0}$ = ٠ ، عندما س = ١ : ص = $\sqrt{1}$ = ١

$\int_{0}^{1} \frac{\sqrt{س}}{١ + \sqrt{س}} . د س = \int_{0}^{1} \frac{ص}{١ + ص} . ٢ ص . د ص = ٢ \int_{0}^{1} \frac{ص^2}{١ + ص} . د ص$

$= ٢ \int_{0}^{1} \left(ص - ١ + \frac{١}{ص + ١} \right) . د ص = ٢ \left(\frac{ص^2}{٢} - ص + لـو_هـ |ص + ١| \right)_{0}^{1}$

$= ٢ \left[\left(\frac{(١)^2}{٢} - ١ + لـو_هـ |١ + ١| \right) - \left(\frac{(٠)^2}{٢} - ٠ + لـو_هـ |٠ + ١| \right) \right]$

$= لـو_هـ (٤) - ١$

(القسمة المطولة: ص^2 ÷ (ص + ١) = ص − ١، بطرح ص^2 + ص يبقى − ص، بطرح − ص − ١ يبقى الباقي ١)

مثال جد $\int \frac{د س}{س - ٣ \sqrt{س} + ٢}$

(الحل) افرض ص = $\sqrt{س}$ ⟵ $ص^٢$ = س

٢ ص $\frac{د ص}{د س}$ = ١ ⟵ د س = ٢ ص . د ص

$\int \frac{د س}{س - ٣ \sqrt{س} + ٢} = \int \frac{٢ ص . د ص}{ص^٢ - ٣ ص + ٢} = ٢ \int \frac{ص . د ص}{(ص - ٢)(ص - ١)}$

$\frac{ص}{(ص - ٢)(ص - ١)} = \frac{أ}{ص - ٢} + \frac{ب}{ص - ١} = \frac{أ(ص - ١) + ب(ص - ٢)}{(ص - ٢)(ص - ١)}$

⟵ ص = أ (ص - ١) + ب (ص - ٢)

بوضع ص = ١ : ١ = أ (١ - ١) + ب (١ - ٢) ⟵ ب = - ١

بوضع ص = ٢ : ٢ = أ (٢ - ١) + ب (٢ - ٢) ⟵ أ = ٢

$٢ \int \frac{ص . د ص}{(ص - ٢)(ص - ١)} = ٢ \left(\int \frac{٢}{ص - ٢} . د ص + \int \frac{- ١}{ص - ١} . د ص \right)$

= ٢ (٢ لـوهـ |ص - ٢| - لـوهـ |ص - ١|) + جـ = ٢ (٢ لـوهـ |$\sqrt{س}$ - ٢| - لـوهـ |$\sqrt{س}$ - ١|) + جـ

مثال جد $\int \frac{د س}{\sqrt{٢ س + ١} + ٢ س - ٥}$

$ص^٢$ = ٢ س + ١
٢ س = $ص^٢$ - ١

(الحل) افرض ص = $\sqrt{٢ س + ١}$ ⟵ $ص^٢$ = ٢ س + ١

٢ ص $\frac{د ص}{د س}$ = ٢ ⟵ د س = ص . د ص

$\int \frac{د س}{\sqrt{٢ س + ١} + ٢ س - ٥} = \int \frac{ص . د ص}{ص + ص^٢ - ١ - ٥}$

$= \int \frac{ص . د ص}{ص^٢ + ص - ٦} = \int \frac{ص . د ص}{(ص - ٢)(ص + ٣)}$

$\frac{ص}{(ص - ٢)(ص + ٣)} = \frac{أ}{ص - ٢} + \frac{ب}{ص + ٣} = \frac{أ(ص + ٣) + ب(ص - ٢)}{(ص - ٢)(ص + ٣)}$

⟵ ص = أ (ص + ٣) + ب (ص - ٢)

بوضع ص = -٣ : -٣ = أ (-٣ + ٣) + ب (-٣ - ٢) ⟵ ب = $\frac{٣}{٥}$

بوضع ص = ٢ : ٢ = أ (٢ + ٣) + ب (٢ - ٢) ⟵ أ = $\frac{٢}{٥}$

$\int \frac{ص . د ص}{(ص - ٢)(ص + ٣)} = \int \frac{\frac{٢}{٥}}{ص - ٢} . د ص + \int \frac{\frac{٣}{٥}}{ص + ٣} . د ص$

= $\frac{٢}{٥}$ لـوهـ |ص - ٢| + $\frac{٣}{٥}$ لـوهـ |ص + ٣| + جـ

$$= \frac{٢}{٥}\,\text{لوهـ}\left|٢\sqrt{\text{س}+١}-١\right| + \frac{٣}{٥}\,\text{لوهـ}\left|٢\sqrt{\text{س}+١}+٣\right| + \text{جـ}$$

مثال جد $\int \frac{\sqrt{\text{س}-٢}+١}{\sqrt{٤\text{س}-٨}-٢}\,.\,\text{د س}$

الحل

$$\int \frac{\sqrt{\text{س}-٢}+١}{\sqrt{٤\text{س}-٨}-٢}\,.\,\text{د س} = \int \frac{\sqrt{\text{س}-٢}+١}{\sqrt{٤(\text{س}-٢)}-٢}\,.\,\text{د س} = \int \frac{\sqrt{\text{س}-٢}+١}{٢\left(\sqrt{\text{س}-٢}-١\right)}\,.\,\text{د س}$$

افرض $\text{ص} = \sqrt{\text{س}-٢} \longrightarrow \text{ص}^٢ = \text{س}-٢$

$$٢\,\text{ص}\,\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = ١ \longrightarrow \text{د س} = ٢\text{ص}\,\text{د ص}$$

$$\int \frac{\sqrt{\text{س}-٢}+١}{٢\left(\sqrt{\text{س}-٢}-١\right)}\,.\,\text{د س} = \int \frac{\text{ص}+١}{٢(\text{ص}-١)}\,.\,٢\,\text{ص}\,.\,\text{د ص} = \int \frac{\text{ص}^٢+\text{ص}}{\text{ص}-١}\,.\,\text{د ص}$$

Long division of $\text{ص}^٢ + \text{ص}$ by $\text{ص} - ١$:

- Quotient: $\text{ص} + ٢$
- $\text{ص}^٢ + \text{ص}$
- $\mp\text{ص}^٢ \pm \text{ص}$
- Remainder so far: $٢\,\text{ص}$
- $\mp ٢\,\text{ص} \pm ٢$
- Remainder: ٢

$$= \int \left(\text{ص}+٢+\frac{٢}{\text{ص}-١}\right)\,.\,\text{د ص} = \frac{\text{ص}^٢}{٢} + ٢\,\text{ص} + ٢\,\text{لوهـ}\left|\text{ص}-١\right| + \text{جـ}$$

$$= \frac{\text{س}-٢}{٢} + ٢\sqrt{\text{س}-٢} + ٢\,\text{لوهـ}\left|\sqrt{\text{س}-٢}-١\right| + \text{جـ}$$

مثال جد $\int \frac{\sqrt[٣]{\text{س}}-١}{\sqrt[٣]{\text{س}^٢}-٤}\,.\,\text{د س}$

الحل

$$\int \frac{\sqrt[٣]{\text{س}}-١}{\sqrt[٣]{\text{س}^٢}-٤}\,.\,\text{د س} = \int \frac{\sqrt[٣]{\text{س}}-١}{\left(\sqrt[٣]{\text{س}}\right)^٢-٤}\,.\,\text{د س}$$

افرض $\text{ص} = \sqrt[٣]{\text{س}} \longrightarrow \text{ص}^٣ = \text{س}$

$$٣\,\text{ص}^٢\,\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = ١ \longrightarrow \text{د س} = ٣\,\text{ص}^٢.\,\text{د ص}$$

$$\int \frac{\sqrt[٣]{\text{س}}-١}{\left(\sqrt[٣]{\text{س}}\right)^٢-٤}\,.\,\text{د س} = \int \frac{\text{ص}-١}{\text{ص}^٢-٤}\,٣\,\text{ص}^٢.\,\text{د ص} = ٣\int \frac{\text{ص}^٣-\text{ص}^٢}{\text{ص}^٢-٤}\,.\,\text{د ص}$$

Long division of $\text{ص}^٣ - \text{ص}^٢$ by $\text{ص}^٢ - ٤$:

- Quotient: $\text{ص} - ١$
- $\text{ص}^٣ - \text{ص}^٢$
- $\mp\text{ص}^٣ \pm ٤\,\text{ص}$
- Remainder so far: $-\text{ص}^٢ + ٤\,\text{ص}$
- $\pm\text{ص}^٢ \mp ٤$
- Remainder: $٤\,\text{ص} - ٤$

$$= ٣\int \left((\text{ص}-١) + \frac{٤\,\text{ص}-٤}{\text{ص}^٢-٤}\right)\,.\,\text{د ص}$$

$$\frac{٤\,\text{ص}-٤}{\text{ص}^٢-٤} = \frac{٤\,\text{ص}-٤}{(\text{ص}-٢)(\text{ص}+٢)}$$

$$= \frac{\text{أ}}{\text{ص}-٢} + \frac{\text{ب}}{\text{ص}+٢} = \frac{\text{أ}(\text{ص}+٢)+\text{ب}(\text{ص}-٢)}{(\text{ص}-٢)(\text{ص}+٢)}$$

$$\longrightarrow ٤\,\text{ص}-٤ = \text{أ}(\text{ص}+٢) + \text{ب}(\text{ص}-٢)$$

بوضع $\text{ص} = -٢$: $٤(-٢) - ٤ = \text{أ}(-٢+٢) + \text{ب}(-٢-٢) \longrightarrow \text{ب} = ٣$

بوضع $\text{ص} = ٢$: $٤(٢) - ٤ = \text{أ}(٢+٢) + \text{ب}(٢-٢) \longrightarrow \text{أ} = ١$

$$٣\int \left(ص - ١ + \frac{٤ ص - ٤}{ص^٢ - ٤} \right) . د ص = ٣ \int ص - ١ + \frac{١}{ص - ٢} + \frac{٣}{ص + ٢} . د ص$$

$$= ٣ \left(\frac{ص^٢}{٢} - ص + لـو_هـ |ص - ٢| + ٣ لـو_هـ |ص + ٢| \right) + جـ$$

$$= ٣ \left(\frac{(\sqrt[٣]{س})^٢}{٢} - \sqrt[٣]{س} + لـو_هـ |\sqrt[٣]{س} - ٢| + ٣ لـو_هـ |\sqrt[٣]{س} + ٢| \right) + جـ$$

مثال جد $\int \left(\frac{\sqrt{س^٢ + ٤}}{س} - \frac{س}{\sqrt{س^٢ + ٤}} \right) . د س$

الحل

افرض $ص = \sqrt{س^٢ + ٤} \longleftarrow ص^٢ = س^٢ + ٤ \longleftarrow ٢ ص \frac{د ص}{د س} = ٢ س \longleftarrow د س = \frac{ص . د ص}{س}$

$$\int \left(\frac{\sqrt{س^٢ + ٤}}{س} - \frac{س}{\sqrt{س^٢ + ٤}} \right) . د س = \int \left(\frac{ص}{س} - \frac{س}{ص} \right) . \frac{ص . د ص}{س}$$

$$= \int \left(\frac{ص^٢}{س^٢} - ١ \right) . د ص = \int \left(\frac{ص^٢}{ص^٢ - ٤} - ١ \right) . د ص$$

$ص^٢ = س^٢ + ٤$
$ص^٢ - ٤ = س^٢$

قسمة: $ص^٢ \div (ص^٢ - ٤)$: الناتج ١، $ص^٢$، $\mp ص^٢ \pm ٤$، الباقي ٤

$$= \int \left(١ + \frac{٤}{ص^٢ - ٤} - ١ \right) . د ص = \int \frac{٤}{ص^٢ - ٤} . د ص$$

$$\left[\frac{٤}{ص^٢ - ٤} = \frac{٤}{(ص - ٢)(ص + ٢)} = \frac{أ}{ص - ٢} + \frac{ب}{ص + ٢} = \frac{أ (ص + ٢) + ب (ص - ٢)}{(ص - ٢)(ص + ٢)} \right.$$

$\longleftarrow ٤ = أ (ص + ٢) + ب (ص - ٢)$

بوضع ص = - ٢ : $٤ = أ (- ٢ + ٢) + ب (- ٢ - ٢) \longleftarrow ب = -١$

بوضع ص = ٢ : $٤ = أ (٢ + ٢) + ب (٢ - ٢) \longleftarrow أ = ١$]

$$\int \frac{٤ . د ص}{ص^٢ - ٤} = \int \left(\frac{١}{ص - ٢} + \frac{-١}{ص + ٢} \right) . د ص = لـو_هـ |ص - ٢| - لـو_هـ |ص + ٢| + جـ$$

$$= لـو_هـ |\sqrt{س^٢ + ٤} - ٢| - لـو_هـ |\sqrt{س^٢ + ٤} + ٢| + جـ$$

مثال جد $\int \frac{هـ^{٢ س}}{هـ^س + ٤} . د س$

الحل

$$\int \frac{هـ^{٢ س}}{هـ^س + ٤} . د س = \int \frac{(هـ^س)^٢}{هـ^س + ٤} . د س$$

افرض $ص = هـ^س$

$$\frac{د ص}{د س} = هـ^س \longleftarrow د س = \frac{د ص}{هـ^س} = \frac{د ص}{ص}$$

$$\int \frac{(هـ^س)^٢}{هـ^س + ٤} . د س = \int \frac{ص^٢}{ص + ٤} . \frac{د ص}{ص} = \int \frac{ص}{ص + ٤} . د ص$$

قسمة: $ص \div (ص + ٤)$: الناتج ١، $ص$، $\mp ص \mp ٤$، الباقي -٤

$$= \int \left(1 + \frac{-4}{ص+4}\right) . د ص = ص - 4 \text{ لـو}_هـ |ص+4| + جـ = هـ^س - 4 \text{ لـو}_هـ |هـ^س + 4| + جـ$$

مثال جد $\int \frac{هـ^{-س}}{4 - هـ^{-2س}} . د س$

(الحل)

افرض $ص = هـ^{-س}$

$$\frac{د ص}{د س} = - هـ^{-س} \longrightarrow د س = \frac{- د ص}{هـ^{-س}} = \frac{- د ص}{ص}$$

$$\int \frac{هـ^{-س}}{4 - هـ^{-2س}} . د س = \int \frac{ص}{4 - ص^2} . \frac{- د ص}{ص} = - \int \frac{د ص}{4 - ص^2} = - \int \frac{د ص}{(2 - ص)(2 + ص)}$$

$$\frac{1}{(2 - ص)(2 + ص)} = \frac{أ}{2 - ص} + \frac{ب}{2 + ص} = \frac{أ(2 + ص) + ب(2 - ص)}{(2 - ص)(2 + ص)}$$

$$\longrightarrow 1 = أ(2 + ص) + ب(2 - ص)$$

بوضع ص = 2 : $1 = أ(2 + 2) + ب(2 - 2) \longrightarrow أ = \frac{1}{4}$

بوضع ص = -2 : $1 = أ(2 + -2) + ب(2 - -2) \longrightarrow ب = \frac{1}{4}$

$$- \int \frac{د ص}{(2 - ص)(2 + ص)} = - \left[\int \frac{\frac{1}{4}}{2 - ص} . د ص + \int \frac{\frac{1}{4}}{2 + ص} . د ص \right]$$

$$= \frac{1}{4} \text{ لـو}_هـ |2 - ص| - \frac{1}{4} \text{ لـو}_هـ |2 + ص| + جـ$$

$$= \frac{1}{4} \text{ لـو}_هـ |2 - هـ^{-س}| - \frac{1}{4} \text{ لـو}_هـ |2 + هـ^{-س}| + جـ$$

مثال جد $\int \frac{هـ^س}{هـ^{2س} + 5 هـ^س + 6} . د س$

(الحل)

$$\int \frac{هـ^س}{هـ^{2س} + 5 هـ^س + 6} . د س = \int \frac{هـ^س}{(هـ^س)^2 + 5 هـ^س + 6} . د س$$

افرض $ص = هـ^س$

$$\frac{د ص}{د س} = هـ^س \longrightarrow د س = \frac{د ص}{هـ^س} = \frac{د ص}{ص}$$

$$\int \frac{هـ^س}{(هـ^س)^2 + 5 هـ^س + 6} . د س = \int \frac{ص}{ص^2 + 5 ص + 6} . \frac{د ص}{ص} = \int \frac{د ص}{ص^2 + 5 ص + 6}$$

$$= \int \frac{د ص}{(ص + 3)(ص + 2)}$$

$$\frac{1}{(ص + 3)(ص + 2)} = \frac{أ}{ص + 3} + \frac{ب}{ص + 2} = \frac{أ(ص + 2) + ب(ص + 3)}{(ص + 3)(ص + 2)}$$

$\longleftarrow 1 = أ(ص+2) + ب(ص+3)$

بوضع ص = -2 : $1 = أ(-2+2) + ب(-2+3) \longleftarrow ب = 1$

بوضع ص = -3 : $1 = أ(-3+2) + ب(-3+3) \longleftarrow أ = -1$

$$\int \frac{د ص}{ص^2 + 5ص + 6} = \int \frac{-1}{ص+3} . د ص + \int \frac{1}{ص+2} . د ص$$

$$= -لو_هـ |ص+3| + لو_هـ |ص+2| + جـ = -لو_هـ |هـ^س + 3| + لو_هـ |هـ^س + 2| + جـ$$

مثال جد $\int \frac{هـ^{3س}}{هـ^{2س} - 3هـ^س - 4} . د س$

الحل

$$\int \frac{هـ^{3س}}{هـ^{2س} - 3هـ^س - 4} . د س = \int \frac{(هـ^س)^3}{(هـ^س)^2 - 3هـ^س - 4} . د س$$

افرض ص = $هـ^س$

$$\frac{د ص}{د س} = هـ^س \longrightarrow د س = \frac{د ص}{هـ^س} = \frac{د ص}{ص}$$

$$\int \frac{(هـ^س)^3}{(هـ^س)^2 - 3هـ^س - 4} . د س = \int \frac{ص^3}{ص^2 - 3ص - 4} . \frac{د ص}{ص} = \int \frac{ص^2 . د ص}{ص^2 - 3ص - 4}$$

$$\frac{ص^2}{ص^2 - 3ص - 4} = 1 + \frac{3ص + 4}{ص^2 - 3ص - 4}$$

$ص^2 - 3ص - 4$	1
	$ص^2$
	$\mp ص^2 \pm 3ص \pm 4$
	$3ص + 4$

$$\frac{3ص + 4}{ص^2 - 3ص - 4} = \frac{3ص + 4}{(ص-4)(ص+1)}$$

$$\frac{3ص + 4}{(ص-4)(ص+1)} = \frac{أ}{ص-4} + \frac{ب}{ص+1} = \frac{أ(ص+1) + ب(ص-4)}{(ص-4)(ص+1)}$$

$3ص + 4 = أ(ص+1) + ب(ص-4) \longleftarrow$

بوضع ص = -1 : $3(-1) + 4 = أ(-1+1) + ب(-1-4) \longrightarrow ب = \frac{-1}{5}$

بوضع ص = 4 : $3(4) + 4 = أ(4+1) + ب(4-4) \longrightarrow أ = \frac{16}{5}$

$$\int \frac{ص^2 . د ص}{ص^2 - 3ص - 4} = \int 1 . د ص + \int \frac{\frac{16}{5}}{ص-4} . د ص + \int \frac{\frac{-1}{5}}{ص+1} . د ص$$

$$= ص + \frac{16}{5} لو_هـ |ص-4| - \frac{1}{5} لو_هـ |ص+1| + جـ$$

$$= هـ^س + \frac{16}{5} لو_هـ |هـ^س - 4| - \frac{1}{5} لو_هـ |هـ^س + 1| + جـ$$

مثال جد $\int \frac{هـ^{٢س}}{هـ^{٤س} - ٣\,هـ^{٢س} - ٤} \,.\, د س$

الحل

$$\int \frac{هـ^{٢س}}{هـ^{٤س} - ٣\,هـ^{٢س} - ٤} \,.\, د س = \int \frac{هـ^{٢س}}{(هـ^{٢س})^{٢} - ٣\,هـ^{٢س} - ٤} \,.\, د س$$

افرض ص = $هـ^{٢س}$

$$\frac{د ص}{د س} = ٢\,هـ^{٢س} \longrightarrow د س = \frac{د ص}{٢هـ^{٢س}} = \frac{د ص}{٢ ص}$$

$$\int \frac{هـ^{٢س}}{(هـ^{٢س})^{٢} - ٣\,هـ^{٢س} - ٤} \,.\, د س = \int \frac{ص}{ص^{٢} - ٣ص - ٤} \,.\, \frac{د ص}{٢ ص} = \frac{١}{٢} \int \frac{د ص}{ص^{٢} - ٣ص - ٤}$$

$$= \frac{١}{٢} \int \frac{د ص}{(ص - ٤)(ص + ١)}$$

$$\frac{١}{(ص - ٤)(ص + ١)} = \frac{أ}{ص - ٤} + \frac{ب}{ص + ١} = \frac{أ(ص + ١) + ب(ص - ٤)}{(ص - ٤)(ص + ١)}$$

$\longrightarrow$ ١ = أ(ص + ١) + ب(ص - ٤)

بوضع ص = - ١ : ١ = أ(- ١ + ١) + ب(- ١ - ٤) $\longrightarrow$ ب = $\frac{-١}{٥}$

بوضع ص = ٤ : ١ = أ(٤ + ١) + ب(٤ - ٤) $\longrightarrow$ أ = $\frac{١}{٥}$

$$\frac{١}{٢} \int \frac{د ص}{(ص - ٤)(ص + ١)} = \frac{١}{٢}\left[\int \frac{\frac{١}{٥}}{ص - ٤} \,.\, د ص + \int \frac{\frac{-١}{٥}}{ص + ١} \,.\, د ص \right]$$

$$= \frac{١}{٢}\left[\frac{١}{٥} لو_{هـ} |ص - ٤| - \frac{١}{٥} لو_{هـ} |ص + ١| \right] + جـ$$

$$= \frac{١}{٢}\left[\frac{١}{٥} لو_{هـ} |هـ^{٢س} - ٤| - \frac{١}{٥} لو_{هـ} |هـ^{٢س} + ١| \right] + جـ$$

مثال جد $\int \sqrt{١ - هـ^{س}} \,.\, د س$

الحل افرض ص = $\sqrt{١ - هـ^{س}}$

$$ص^{٢} = ١ - هـ^{س} \longrightarrow ٢ص \frac{د ص}{د س} = -هـ^{س} \longrightarrow د س = \frac{-٢ ص \,.\, د ص}{هـ^{س}}$$

$$\int \sqrt{١ - هـ^{س}} \,.\, د س = \int ص \,.\, \frac{-٢ ص \,.\, د ص}{هـ^{س}} = -٢ \int \frac{ص^{٢}}{١ - ص^{٢}} \,.\, د ص$$

ص^{٢} = ١ − هـ^{س}

هـ^{س} = ١ − ص^{٢}

$$= -٢ \int \left(-١ + \frac{١}{١ - ص^{٢}}\right) . \, د ص$$

	−١
−ص^{٢} + ١	ص^{٢}
	∓ ص^{٢} ± ١
	١

$$\frac{١}{١ - ص^{٢}} = \frac{١}{(١ - ص)(١ + ص)} = \frac{أ}{١ - ص} + \frac{ب}{١ + ص}$$

$$= \frac{أ(١ + ص) + ب(١ - ص)}{(١ - ص)(١ + ص)}$$

$\longrightarrow$ ١ = أ(١ + ص) + ب(١ - ص)

$$\text{بوضع ص} = -١ : ١ = \text{أ}(١ + -١) + \text{ب}(١ - -١) \longrightarrow \text{ب} = \frac{١}{٢}$$

$$\text{بوضع ص} = ١ : ١ = \text{أ}(١ + ١) + \text{ب}(١ - ١) \longrightarrow \text{أ} = \frac{١}{٢}$$

$$-٢\int \left(-١ + \frac{١}{١ - \text{ص}^٢}\right) . \text{د ص} = -٢\int \left(-١ + \frac{\frac{١}{٢}}{١ - \text{ص}} + \frac{\frac{١}{٢}}{١ + \text{ص}}\right) . \text{د ص}$$

$$= -٢\left[-\text{ص} - \frac{١}{٢}\text{لـو}_{\text{هـ}}|١ - \text{ص}| + \frac{١}{٢}\text{لـو}_{\text{هـ}}|١ + \text{ص}|\right] + \text{جـ}$$

$$= -٢\left[-\sqrt{١ - \text{هـ}^{\text{س}}} - \frac{١}{٢}\text{لـو}_{\text{هـ}}|١ - \sqrt{١ - \text{هـ}^{\text{س}}}| + \frac{١}{٢}\text{لـو}_{\text{هـ}}|١ + \sqrt{١ - \text{هـ}^{\text{س}}}|\right] + \text{جـ}$$

مثال جد $\int \frac{\text{د س}}{\sqrt{١ + \text{هـ}^{\text{س}}}}$

الحل افرض $\text{ص} = \sqrt{١ + \text{هـ}^{\text{س}}}$

$$\text{ص}^٢ = ١ + \text{هـ}^{\text{س}} \longrightarrow ٢\text{ص}\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{هـ}^{\text{س}} \longrightarrow \text{د س} = \frac{٢\text{ص} . \text{د ص}}{\text{هـ}^{\text{س}}}$$

$$\int \frac{\text{د س}}{\sqrt{١ + \text{هـ}^{\text{س}}}} = \int \frac{١}{\text{ص}} . \frac{٢\text{ص} . \text{د ص}}{\text{هـ}^{\text{س}}} = ٢\int \frac{\text{د ص}}{\text{ص}^٢ - ١} = ٢\int \frac{\text{د ص}}{(\text{ص} - ١)(\text{ص} + ١)}$$

$\text{ص}^٢ = ١ + \text{هـ}^{\text{س}}$

$\text{هـ}^{\text{س}} = \text{ص}^٢ - ١$

$$\frac{١}{(\text{ص} - ١)(\text{ص} + ١)} = \frac{\text{أ}}{\text{ص} - ١} + \frac{\text{ب}}{\text{ص} + ١} = \frac{\text{أ}(\text{ص} + ١) + \text{ب}(\text{ص} - ١)}{(\text{ص} - ١)(\text{ص} + ١)}$$

$$\longrightarrow ١ = \text{أ}(\text{ص} + ١) + \text{ب}(\text{ص} - ١)$$

$$\text{بوضع ص} = -١ : ١ = \text{أ}(-١ + ١) + \text{ب}(-١ - ١) \longrightarrow \text{ب} = \frac{-١}{٢}$$

$$\text{بوضع ص} = ١ : ١ = \text{أ}(١ + ١) + \text{ب}(١ - ١) \longrightarrow \text{أ} = \frac{١}{٢}$$

$$٢\int \frac{\text{د ص}}{(\text{ص} - ١)(\text{ص} + ١)} = ٢\left[\int \frac{\frac{١}{٢}}{\text{ص} - ١} . \text{د ص} + \int \frac{\frac{-١}{٢}}{\text{ص} + ١} . \text{د ص}\right]$$

$$= ٢\left[\frac{١}{٢}\text{لـو}_{\text{هـ}}|\text{ص} - ١| - \frac{١}{٢}\text{لـو}_{\text{هـ}}|\text{ص} + ١|\right] + \text{جـ}$$

$$= ٢\left[\frac{١}{٢}\text{لـو}_{\text{هـ}}|\sqrt{١ + \text{هـ}^{\text{س}}} - ١| - \frac{١}{٢}\text{لـو}_{\text{هـ}}|\sqrt{١ + \text{هـ}^{\text{س}}} + ١|\right] + \text{جـ}$$

مثال جد $\int \frac{\text{د س}}{\text{س}((\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^٢ - ٣\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - ١٠)}$

الحل افرض $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \longrightarrow \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{١}{\text{س}} \longrightarrow \text{د س} = \text{س} . \text{د ص}$

$$\int \frac{\text{د س}}{\text{س}((\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^٢ - ٣\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - ١٠)} = \int \frac{\text{س} . \text{د ص}}{\text{س}(\text{ص}^٢ - ٣\text{ص} - ١٠)} = \int \frac{\text{د ص}}{(\text{ص} - ٥)(\text{ص} + ٢)}$$

$$\frac{١}{(\text{ص} - ٥)(\text{ص} + ٢)} = \frac{\text{أ}}{\text{ص} - ٥} + \frac{\text{ب}}{\text{ص} + ٢} = \frac{\text{أ}(\text{ص} + ٢) + \text{ب}(\text{ص} - ٥)}{(\text{ص} - ٢)(\text{ص} + ٥)}$$

$$\longrightarrow ١ = \text{أ}(\text{ص} + ٢) + \text{ب}(\text{ص} - ٥)$$

بوضع ص = - ٢ : $١ = أ(-٢+٢) + ب(-٢-٥)$ ⟵ $ب = \frac{-١}{٧}$

بوضع ص = ٥ : $١ = أ(٥+٢) + ب(٥-٥)$ ⟵ $أ = \frac{١}{٧}$

$$\int \frac{\text{د ص}}{(\text{ص} - ٥)(\text{ص} + ٢)} = \int \frac{\frac{١}{٧}}{\text{ص} - ٥} \,.\, \text{د ص} + \int \frac{\frac{-١}{٧}}{\text{ص} + ٢} \,.\, \text{د ص}$$

$$= \frac{١}{٧} \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{ص} - ٥| - \frac{١}{٧} \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{ص} + ٢| + \text{جـ}$$

$$= \frac{١}{٧} \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - ٥| - \frac{١}{٧} \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} + ٢| + \text{جـ}$$

مثال جد $\int \frac{\text{د س}}{\text{س} (\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^٢ - ٤\text{س}}$

الحل

$$\int \frac{\text{د س}}{\text{س} (\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^٢ - ٤\text{س}} = \int \frac{\text{د س}}{\text{س} \left((\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^٢ - ٤ \right)}$$

افرض ص = $\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$ ⟵ $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{١}{\text{س}}$ ⟵ د س = س . د ص

$$\int \frac{\text{د س}}{\text{س} \left((\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^٢ - ٤ \right)} = \int \frac{\text{س . د ص}}{\text{س} (\text{ص}^٢ - ٤)} = \int \frac{\text{د ص}}{(\text{ص} - ٢)(\text{ص} + ٢)}$$

$$\frac{١}{(\text{ص} - ٢)(\text{ص} + ٢)} = \frac{أ}{\text{ص} - ٢} + \frac{ب}{\text{ص} + ٢} = \frac{أ(\text{ص} + ٢) + ب(\text{ص} - ٢)}{(\text{ص} - ٢)(\text{ص} + ٢)}$$

⟵ $١ = أ(\text{ص} + ٢) + ب(\text{ص} - ٢)$

بوضع ص = - ٢ : $١ = أ(-٢+٢) + ب(-٢-٢)$ ⟵ $ب = \frac{-١}{٤}$

بوضع ص = ٢ : $١ = أ(٢+٢) + ب(٢-٢)$ ⟵ $أ = \frac{١}{٤}$

$$\int \frac{\text{د ص}}{(\text{ص} - ٢)(\text{ص} + ٢)} = \int \frac{\frac{١}{٤}}{\text{ص} - ٢} \,.\, \text{د ص} + \int \frac{\frac{-١}{٤}}{\text{ص} + ٢} \,.\, \text{د ص}$$

$$= \frac{١}{٤} \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{ص} - ٢| - \frac{١}{٤} \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{ص} + ٢| + \text{جـ}$$

$$= \frac{١}{٤} \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - ٢| - \frac{١}{٤} \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} + ٢| + \text{جـ}$$

مثال جد $\int \frac{\text{ظا س}}{٩ - (\text{لو}_{\text{هـ}}\text{جتا س})^٢} \,.\, \text{د س}$

الحل

افرض ص = $\text{لو}_{\text{هـ}}\text{جتا س}$

⟵ $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{-\text{جا س}}{\text{جتا س}} = -\text{ظا س}$ ⟵ $\text{د س} = \frac{\text{د ص}}{-\text{ظا س}}$

$$\int \frac{\text{ظا س}}{٩ - (\text{لو}_{\text{هـ}}\text{جتا س})^٢} \,.\, \text{د س} = \int \frac{\text{ظا س}}{٩ - \text{ص}^٢} \,.\, \frac{\text{د ص}}{-\text{ظا س}} = \int \frac{\text{د ص}}{\text{ص}^٢ - ٩} = \int \frac{\text{د ص}}{(\text{ص} - ٣)(\text{ص} + ٣)}$$

$$\frac{١}{(\text{ص}-٣)(\text{ص}+٣)} = \frac{\text{أ}}{\text{ص}-٣} + \frac{\text{ب}}{\text{ص}+٣} = \frac{\text{أ}(\text{ص}+٣)+\text{ب}(\text{ص}-٣)}{(\text{ص}-٣)(\text{ص}+٣)}$$

$$\longleftarrow \quad ١ = \text{أ}(\text{ص}+٣)+\text{ب}(\text{ص}-٣)$$

بوضع ص = - ٣ : $١ = \text{أ}(-٣+٣)+\text{ب}(-٣-٣) \longleftarrow \text{ب} = \frac{-١}{٦}$

بوضع ص = ٣ : $١ = \text{أ}(٣+٣)+\text{ب}(٣-٣) \longleftarrow \text{أ} = \frac{١}{٦}$

$$\int \frac{\text{د ص}}{(\text{ص}-٣)(\text{ص}+٣)} = \int \frac{\frac{١}{٦}}{\text{ص}-٣}\,.\,\text{د ص} + \int \frac{\frac{-١}{٦}}{\text{ص}+٣}\,.\,\text{د ص}$$

$$= \frac{١}{٦}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,|\text{ص}-٣| - \frac{١}{٦}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,|\text{ص}+٣| + \text{جـ}$$

$$= \frac{١}{٦}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,|\text{لو}_{\text{هـ}}\text{جتا س}-٣| - \frac{١}{٦}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,|\text{لو}_{\text{هـ}}\text{جتا س}+٣| + \text{جـ}$$

مثال جد $\int \frac{\text{جتا س}}{\text{جا}^٢\text{س} + ٤\,\text{جا س} - ٥}\,.\,\text{د س}$

الحل افرض ص = جا س

$$\longleftarrow \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{جتا س} \longleftarrow \text{د س} = \frac{\text{د ص}}{\text{جتا س}}$$

$$\int \frac{\text{جتا س}}{\text{جا}^٢\text{س} + ٤\,\text{جا س} - ٥}\,.\,\text{د س} = \int \frac{\text{جتا س}}{\text{ص}^٢+٤\,\text{ص}-٥}\,.\,\frac{\text{د ص}}{\text{جتا س}} = \int \frac{\text{د ص}}{(\text{ص}-١)(\text{ص}+٥)}$$

$$\frac{١}{(\text{ص}-١)(\text{ص}+٥)} = \frac{\text{أ}}{\text{ص}-١} + \frac{\text{ب}}{\text{ص}+٥} = \frac{\text{أ}(\text{ص}+٥)+\text{ب}(\text{ص}-١)}{(\text{ص}-١)(\text{ص}+٥)}$$

$$\longleftarrow \quad ١ = \text{أ}(\text{ص}+٥)+\text{ب}(\text{ص}-١)$$

بوضع ص = - ٥ : $١ = \text{أ}(-٥+٥)+\text{ب}(-٥-١) \longleftarrow \text{ب} = \frac{-١}{٦}$

بوضع ص = ١ : $١ = \text{أ}(١+٥)+\text{ب}(١-١) \longleftarrow \text{أ} = \frac{١}{٦}$

$$\int \frac{\text{د ص}}{(\text{ص}-١)(\text{ص}+٥)} = \int \frac{\frac{١}{٦}}{\text{ص}-١}\,.\,\text{د ص} + \int \frac{\frac{-١}{٦}}{\text{ص}+٥}\,.\,\text{د ص}$$

$$= \frac{١}{٦}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,|\text{ص}-١| - \frac{١}{٦}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,|\text{ص}+٥| + \text{جـ}$$

$$= \frac{١}{٦}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,|\text{جا س}-١| - \frac{١}{٦}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,|\text{جا س}+٥| + \text{جـ}$$

مثال جد $\int \frac{\text{جتا ٢س}}{\text{جا ٢س}\,(٣ - \text{جا ٢س})}\,.\,\text{د س}$

الحل افرض ص = جا ٢س

$$\longleftarrow \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = ٢\,\text{جتا ٢س} \longleftarrow \text{د س} = \frac{\text{د ص}}{٢\,\text{جتا ٢س}}$$

$$\int \frac{\text{جتا٢س}}{\text{جا٢س}\,(\text{٣} - \text{جا٢س})}\,.\,\text{دس} = \int \frac{\text{جتا٢س}}{\text{ص}\,(\text{٣} - \text{ص})}\,.\,\frac{\text{دص}}{\text{٢ جتا٢س}} = \frac{\text{١}}{\text{٢}} \int \frac{\text{دص}}{\text{ص}\,(\text{٣} - \text{ص})}$$

$$\frac{\text{١}}{\text{ص}\,(\text{٣} - \text{ص})} = \frac{\text{أ}}{\text{ص}} + \frac{\text{ب}}{\text{٣} - \text{ص}} = \frac{\text{أ}\,(\text{٣} - \text{ص}) + \text{ب ص}}{\text{ص}\,(\text{٣} - \text{ص})}$$

$\longleftarrow$ ١ = أ (٣ - ص) + ب ص

بوضع ص = ٣ : ١ = أ (٣ - ٣) + ب (٣) $\longleftarrow$ ب = $\frac{\text{١}}{\text{٣}}$

بوضع ص = ٠ : ١ = أ (٣ - ٠) + ب (٠) $\longleftarrow$ أ = $\frac{\text{١}}{\text{٣}}$

$$\frac{\text{١}}{\text{٢}} \int \frac{\text{دص}}{\text{ص}\,(\text{٣} - \text{ص})} = \frac{\text{١}}{\text{٢}} \left[\int \frac{\frac{\text{١}}{\text{٣}}}{\text{ص}}\,.\,\text{دص} + \int \frac{\frac{\text{١}}{\text{٣}}}{\text{٣} - \text{ص}}\,.\,\text{دص} \right]$$

$$= \frac{\text{١}}{\text{٢}} \left[\frac{\text{١}}{\text{٣}}\,\text{لـو}_{\text{هـ}} |\text{ص}| - \frac{\text{١}}{\text{٣}}\,\text{لـو}_{\text{هـ}} |\text{٣} - \text{ص}| \right] + \text{جـ}$$

$$= \frac{\text{١}}{\text{٦}}\,\text{لـو}_{\text{هـ}} |\text{جا٢س}| - \frac{\text{١}}{\text{٦}}\,\text{لـو}_{\text{هـ}} |\text{٣} - \text{جا٢س}| + \text{جـ}$$

مثال جد $\int \frac{\text{جتاس}\,.\,\text{دس}}{\text{جاس}\,\sqrt{\text{جا}^{\text{٢}}\text{س} + \text{١}}}$

الحل افرض ص = $\sqrt{\text{جا}^{\text{٢}}\text{س} + \text{١}}$ $\longleftarrow$ $\text{ص}^{\text{٢}} = \text{جا}^{\text{٢}}\text{س} + \text{١}$

$\longleftarrow$ $\text{٢ص}\,\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{٢ جاس جتاس}$ $\longleftarrow$ $\text{دس} = \frac{\text{ص}\,.\,\text{دص}}{\text{جاس جتاس}}$

$\text{ص}^{\text{٢}} = \text{جا}^{\text{٢}}\text{س} + \text{١}$
$\text{جا}^{\text{٢}}\text{س} = \text{ص}^{\text{٢}} - \text{١}$

$$\int \frac{\text{جتاس}\,.\,\text{دس}}{\text{جاس}\,\sqrt{\text{جا}^{\text{٢}}\text{س} + \text{١}}} = \int \frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}\,.\,\text{ص}}\,.\,\frac{\text{ص}\,.\,\text{دص}}{\text{جاس جتاس}} = \int \frac{\text{دص}}{\text{جا}^{\text{٢}}\text{س}} = \int \frac{\text{دص}}{\text{ص}^{\text{٢}} - \text{١}}$$

$$= \int \frac{\text{دص}}{(\text{ص} - \text{١})\,(\text{ص} + \text{١})}$$

$$\frac{\text{١}}{(\text{ص} - \text{١})\,(\text{ص} + \text{١})} = \frac{\text{أ}}{\text{ص} - \text{١}} + \frac{\text{ب}}{\text{ص} + \text{١}} = \frac{\text{أ}\,(\text{ص} + \text{١}) + \text{ب}\,(\text{ص} - \text{١})}{(\text{ص} - \text{١})\,(\text{ص} + \text{١})}$$

$\longleftarrow$ ١ = أ (ص + ١) + ب (ص - ١)

بوضع ص = - ١ : ١ = أ (- ١ + ١) + ب (- ١ - ١) $\longleftarrow$ ب = $\frac{\text{-١}}{\text{٢}}$

بوضع ص = ١ : ١ = أ (١ + ١) + ب (١ - ١) $\longleftarrow$ أ = $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$

$$\int \frac{\text{دص}}{(\text{ص} - \text{١})\,(\text{ص} + \text{١})} = \int \frac{\frac{\text{١}}{\text{٢}}}{\text{ص} - \text{١}}\,.\,\text{دص} + \int \frac{\frac{\text{-١}}{\text{٢}}}{\text{ص} + \text{١}}\,.\,\text{دص}$$

$$= \frac{\text{١}}{\text{٢}}\,\text{لـو}_{\text{هـ}} |\text{ص} - \text{١}| - \frac{\text{١}}{\text{٢}}\,\text{لـو}_{\text{هـ}} |\text{ص} + \text{١}| + \text{جـ}$$

$$= \frac{\text{١}}{\text{٢}}\,\text{لـو}_{\text{هـ}} \left|\sqrt{\text{جا}^{\text{٢}}\text{س} + \text{١}} - \text{١}\right| - \frac{\text{١}}{\text{٢}}\,\text{لـو}_{\text{هـ}} \left|\sqrt{\text{جا}^{\text{٢}}\text{س} + \text{١}} + \text{١}\right| + \text{جـ}$$

مثال جد $\int \frac{\text{جتا س}}{\text{٨ + جتا}^2\text{س}} \cdot \text{د س}$

(الحل)

$\int \frac{\text{جتا س}}{\text{٨ + جتا}^2\text{س}} \cdot \text{د س} = \int \frac{\text{جتا س} \cdot \text{د س}}{\text{٨ + ١ − جا}^2\text{س}} = \int \frac{\text{جتا س}}{\text{٩ − جا}^2\text{س}} \cdot \text{د س}$

افرض ص = جا س

$\leftarrow \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{جتا س} \leftarrow \text{د س} = \frac{\text{د ص}}{\text{جتا س}}$

$\int \frac{\text{جتا س}}{\text{٩ − جا}^2\text{س}} \cdot \text{د س} = \int \frac{\text{جتا س}}{\text{٩ − ص}^2} \cdot \frac{\text{د ص}}{\text{جتا س}} = \int \frac{\text{د ص}}{(\text{٣ - ص})(\text{٣ + ص})}$

$\frac{١}{(\text{٣ - ص})(\text{٣ + ص})} = \frac{\text{أ}}{\text{٣ - ص}} + \frac{\text{ب}}{\text{٣ + ص}} = \frac{\text{أ}(\text{٣ + ص}) + \text{ب}(\text{٣ - ص})}{(\text{٣ - ص})(\text{٣ + ص})}$

$\leftarrow ١ = \text{أ}(\text{٣ + ص}) + \text{ب}(\text{٣ - ص})$

بوضع ص = - ٣ : ١ = أ (٣ + -٣) + ب (٣ - -٣) $\leftarrow$ ب = $\frac{١}{٦}$

بوضع ص = ٣ : ١ = أ (٣ + ٣) + ب (٣ - ٣) $\leftarrow$ أ = $\frac{١}{٦}$

$\int \frac{\text{د ص}}{(\text{٣ - ص})(\text{٣ + ص})} = \int \frac{\frac{١}{٦}}{\text{٣ - ص}} \cdot \text{د ص} + \int \frac{\frac{١}{٦}}{\text{٣ + ص}} \cdot \text{د ص}$

$= -\frac{١}{٦} \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{٣ - ص}| + \frac{١}{٦} \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{٣ + ص}| + \text{جـ}$

$= -\frac{١}{٦} \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{٣ - جا س}| + \frac{١}{٦} \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{٣ + جا س}| + \text{جـ}$

مثال جد $\int_{0}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{\text{جا ٢ س}}{\text{٢ + جتا س}} \cdot \text{د س}$

(الحل) افرض ص = ٢ + جتا س

$\leftarrow \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{- جا س} \leftarrow \text{د س} = \frac{\text{د ص}}{\text{- جا س}}$

عندما س = ٠ : ص = ٢ + جتا (٠) = ٣

عندما س = $\frac{\pi}{٢}$: ص = ٢ + جتا ($\frac{\pi}{٢}$) = ٢

ص = ٢ + جتا س
جتا س = ص ـ ٢

$\int_{0}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{\text{جا ٢ س}}{\text{٢ + جتا س}} \cdot \text{د س} = \int_{٣}^{٢} \frac{\text{٢ جا س جتا س}}{\text{ص}} \cdot \frac{\text{د ص}}{\text{- جا س}} = -٢ \int_{٣}^{٢} \frac{\text{جتا س}}{\text{ص}} \cdot \text{د ص} = -٢ \int_{٣}^{٢} \frac{\text{ص ـ ٢}}{\text{ص}} \cdot \text{د ص}$

$= -٢ \int_{٣}^{٢} (١ - \frac{٢}{\text{ص}}) \cdot \text{د ص} = -٢ \left(\text{ص} - ٢ \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{ص}|\right) \Big|_{٣}^{٢}$

$= -٢ \left((٢ - ٢ \text{لو}_{\text{هـ}} ٢) - (٣ - ٢ \text{لو}_{\text{هـ}} ٣)\right)$

$= ٢ - \text{لو}_{\text{هـ}} \frac{٨١}{١٦}$

مثال $\int \frac{\text{جتا}\,٢\,\text{س}}{\text{جا س} + \text{جتا س} + ١}\ .\ \text{د س}$

الحل

$$\int \frac{\text{جتا}\,٢\,\text{س}}{\text{جا س} + \text{جتا س} + ١}\ .\ \text{د س}$$

$$= \int \frac{\text{جتا}^٢\text{س} - \text{جا}^٢\text{س}}{\text{جا س} + \text{جتا س} + ١}\ .\ \text{د س} = \int \frac{(\text{جتا س} - \text{جا س})(\text{جتا س} + \text{جا س})}{\text{جا س} + \text{جتا س} + ١}\ .\ \text{د س}$$

افرض $\text{ص} = \text{جا س} + \text{جتا س} + ١$

$$\longleftarrow \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{جتا س} - \text{جا س} \longrightarrow \text{د س} = \frac{\text{د ص}}{\text{جتا س} - \text{جا س}}$$

$\text{ص} = \text{جا س} + \text{جتا س} + ١$

$\text{ص} - ١ = \text{جا س} + \text{جتا س}$

$$\int \frac{(\text{جتا س} - \text{جا س})(\text{جتا س} + \text{جا س})}{\text{جا س} + \text{جتا س} + ١}\ .\ \text{د س} = \int \frac{(\text{جتا س} - \text{جا س})\,(\text{ص} - ١)}{\text{ص}} \cdot \frac{\text{د ص}}{\text{جتا س} - \text{جا س}}$$

$$= \int \frac{\text{ص} - ١}{\text{ص}}\ .\ \text{د ص} = \int \left(١ - \frac{١}{\text{ص}}\right)\ .\ \text{د ص} = \text{ص} - \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{ص}| + \text{جـ}$$

$$= \text{جا س} + \text{جتا س} + ١ - \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{جا س} + \text{جتا س} + ١| + \text{جـ}$$

مثال جد $\int \frac{\text{جتا}^٣\text{س}}{\text{جا}^٢\text{س} - ٢\,\text{جا س} - ٨}\ .\ \text{د س}$

الحل افرض $\text{ص} = \text{جا س}$

$$\longleftarrow \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{جتا س} \longrightarrow \text{د س} = \frac{\text{د ص}}{\text{جتا س}}$$

$$\int \frac{\text{جتا}^٣\text{س}}{\text{جا}^٢\text{س} - ٢\,\text{جا س} - ٨}\ .\ \text{د س} = \int \frac{\text{جتا}^٣\text{س}}{\text{ص}^٢ - ٢\,\text{ص} - ٨} \cdot \frac{\text{د ص}}{\text{جتا س}} = \int \frac{\text{جتا}^٢\text{س}}{\text{ص}^٢ - ٢\,\text{ص} - ٨}\ .\ \text{د ص}$$

$$= \int \frac{١ - \text{جا}^٢\text{س}}{\text{ص}^٢ - ٢\,\text{ص} - ٨}\ .\ \text{د ص} = \int \frac{١ - \text{ص}^٢}{\text{ص}^٢ - ٢\,\text{ص} - ٨}\ .\ \text{د ص}$$

$$\begin{array}{r|l} -١ & \\ \hline -\text{ص}^٢ \quad + ١ & \text{ص}^٢ - ٢\,\text{ص} - ٨ \\ \pm\,\text{ص}^٢ \mp ٢\,\text{ص} \mp ٨ & \\ \hline -٢\,\text{ص} - ٧ & \end{array}$$

$$\frac{١ - \text{ص}^٢}{\text{ص}^٢ - ٢\,\text{ص} - ٨} = -١ + \frac{-٢\,\text{ص} - ٧}{\text{ص}^٢ - ٢\,\text{ص} - ٨}$$

$$\frac{-٢\,\text{ص} - ٧}{\text{ص}^٢ - ٢\,\text{ص} - ٨} = \frac{-٢\,\text{ص} - ٧}{(\text{ص} - ٤)(\text{ص} + ٢)}$$

$$\frac{-٢\,\text{ص} - ٧}{(\text{ص} - ٤)(\text{ص} + ٢)} = \frac{\text{أ}}{\text{ص} - ٤} + \frac{\text{ب}}{\text{ص} + ٢} = \frac{\text{أ}\,(\text{ص} + ٢) + \text{ب}\,(\text{ص} - ٤)}{(\text{ص} - ٤)(\text{ص} + ٢)}$$

$$\longleftarrow -٢\,\text{ص} - ٧ = \text{أ}\,(\text{ص} + ٢) + \text{ب}\,(\text{ص} - ٤)$$

بوضع $\text{ص} = -٢$: $-٢(-٢) - ٧ = \text{أ}\,(-٢ + ٢) + \text{ب}\,(-٢ - ٤) \longrightarrow \text{ب} = \frac{١}{٢}$

بوضع $\text{ص} = ٤$: $-٢(٤) - ٧ = \text{أ}\,(٤ + ٢) + \text{ب}\,(٤ - ٤) \longrightarrow \text{أ} = \frac{-١٥}{٦} = \frac{-٥}{٢}$

$$\int \frac{١ - \text{ص}^٢}{\text{ص}^٢ - ٢\,\text{ص} - ٨}\ .\ \text{د ص} = \int -١\ .\ \text{د ص} + \int \frac{\frac{-٥}{٢}}{\text{ص} - ٤}\ .\ \text{د ص} + \int \frac{\frac{١}{٢}}{\text{ص} + ٢}\ .\ \text{د ص}$$

$= -ص - \frac{5}{2}\,لـو_{هـ}|ص-4| + \frac{1}{2}\,لـو_{هـ}|ص+2| + جـ$

$= -جاس - \frac{5}{2}\,لـو_{هـ}|جاس-4| + \frac{1}{2}\,لـو_{هـ}|جاس+2| + جـ$

مثال جد $\int \frac{قا^2 س \,.\, د س}{5\,ظا^2 س - 3\,ظا س - 2}$

(الحل) افرض ص = ظا س

$\longleftarrow \frac{د ص}{د س} = قا^2 س \longleftarrow د س = \frac{د ص}{قا^2 س}$

$\int \frac{قا^2 س \,.\, د س}{5\,ظا^2 س - 3\,ظا س - 2} = \int \frac{قا^2 س}{5 ص^2 - 3 ص - 2} \cdot \frac{د ص}{قا^2 س} = \int \frac{د ص}{5 ص^2 - 3 ص - 2}$

$= \int \frac{د ص}{(5 ص + 2)(ص - 1)}$

$$\frac{1}{(5 ص + 2)(ص - 1)} = \frac{أ}{5 ص + 2} + \frac{ب}{ص - 1} = \frac{أ(ص - 1) + ب(5 ص + 2)}{(5 ص + 2)(ص - 1)}$$

$\longleftarrow 1 = أ(ص - 1) + ب(5 ص + 2)$

بوضع ص $= \frac{-2}{5}$: $1 = أ(\frac{-2}{5} - 1) + ب(5(\frac{-2}{5}) + 2) \longleftarrow أ = \frac{-5}{7}$

بوضع ص = 1 : $1 = أ(1 - 1) + ب(5(1) + 2) \longleftarrow ب = \frac{1}{7}$

$\int \frac{د ص}{(5 ص + 2)(ص - 1)} = \int \frac{\frac{-5}{7}}{5 ص + 2}\,.\, د ص + \int \frac{\frac{1}{7}}{ص - 1}\,.\, د ص$

$= \frac{-1}{7}\,لـو_{هـ}|5 ص + 2| + \frac{1}{7}\,لـو_{هـ}|ص - 1| + جـ$

$= \frac{-1}{7}\,لـو_{هـ}|5\,ظاس + 2| + \frac{1}{7}\,لـو_{هـ}|ظاس - 1| + جـ$

مثال جد $\int \frac{قا^4 س \,.\, د س}{ظا^2 س - ظا س - 2}$

(الحل) افرض ص = ظا س

$\longleftarrow \frac{د ص}{د س} = قا^2 س \longleftarrow د س = \frac{د ص}{قا^2 س}$

$قا^2 س = 1 + ظا^2 س$
$= 1 + ص^2$

$\int \frac{قا^4 س \,.\, د س}{ظا^2 س - ظا س - 2} = \int \frac{قا^4 س}{ص^2 - ص - 2} \cdot \frac{د ص}{قا^2 س} = \int \frac{قا^2 س \,.\, د ص}{ص^2 - ص - 2} = \int \frac{ص^2 + 1 \,.\, د ص}{ص^2 - ص - 2}$

$\frac{ص^2 + 1}{ص^2 - ص - 2} = 1 + \frac{ص + 3}{ص^2 - ص - 2}$

$\frac{ص + 3}{ص^2 - ص - 2} = \frac{ص + 3}{(ص - 2)(ص + 1)}$

(القسمة المطولة: $ص^2 + 1$ ÷ $ص^2 - ص - 2$ = 1، $\mp ص^2 \pm ص \pm 2$، الباقي: ص + 3)

$$\frac{ص + ٣}{(ص - ٢)(ص + ١)} = \frac{أ}{ص - ٢} + \frac{ب}{ص + ١} = \frac{أ(ص + ١) + ب(ص - ٢)}{(ص - ٢)(ص + ١)}$$

$\longleftarrow$ ص + ٣ = أ (ص + ١) + ب (ص - ٢)

بوضع ص = - ١ : -١ + ٣ = أ (- ١ + ١) + ب (-١ - ٢) $\longleftarrow$ ب = $\frac{-٢}{٣}$

بوضع ص = ٢ : ٢ + ٣ = أ (٢ + ١) + ب (٢ - ٢) $\longleftarrow$ أ = $\frac{٥}{٣}$

$$\int \frac{ص^٢ + ١}{ص^٢ - ص - ٢} \, . د ص = \int ١ \, . د ص + \int \frac{\frac{٥}{٣}}{ص - ٢} \, . د ص + \int \frac{\frac{-٢}{٣}}{ص + ١} \, . د ص$$

$= ص + \frac{٥}{٣} لـو_{هـ} | ص - ٢ | - \frac{٢}{٣} لـو_{هـ} | ص + ١ | + جـ$

$= ظا س + \frac{٥}{٣} لـو_{هـ} | ظا س - ٢ | - \frac{٢}{٣} لـو_{هـ} | ظا س + ١ | + جـ$

مثال جد $\int \frac{قا^٢ س}{٢ - قا^٢ س} \, . د س$

الحل

$$\int \frac{قا^٢ س}{٢ - قا^٢ س} \, . د س = \int \frac{قا^٢ س \, . د س}{٢ - (١ + ظا^٢ س)} = \int \frac{قا^٢ س}{١ - ظا^٢ س} \, . د س$$

افرض ص = ظا س

$\longleftarrow \frac{د ص}{د س} = قا^٢ س \longleftarrow د س = \frac{د ص}{قا^٢ س}$

$$\int \frac{قا^٢ س}{١ - ظا^٢ س} \, . د س = \int \frac{قا^٢ س}{١ - ص^٢} . \frac{د ص}{قا^٢ س} = \int \frac{د ص}{١ - ص^٢} = \int \frac{د ص}{(١ - ص)(١ + ص)}$$

$$\frac{١}{(١ - ص)(١ + ص)} = \frac{أ}{١ - ص} + \frac{ب}{١ + ص} = \frac{أ(١ + ص) + ب(١ - ص)}{(١ - ص)(١ + ص)}$$

$\longleftarrow$ ١ = أ (١ + ص) + ب (١ - ص)

بوضع ص = - ١ : ١ = أ (١ + -١) + ب (١ - -١) $\longleftarrow$ ب = $\frac{١}{٢}$

بوضع ص = ١ : ١ = أ (١ + ١) + ب (١ - ١) $\longleftarrow$ أ = $\frac{١}{٢}$

$$\int \frac{د ص}{(١ - ص)(١ + ص)} = \int \frac{\frac{١}{٢}}{١ - ص} \, . د ص + \int \frac{\frac{١}{٢}}{١ + ص} \, . د ص$$

$= -\frac{١}{٢} لـو_{هـ} | ١ - ص | + \frac{١}{٢} لـو_{هـ} | ١ + ص | + جـ$

$= -\frac{١}{٢} لـو_{هـ} | ١ - ظا س | + \frac{١}{٢} لـو_{هـ} | ١ + ظا س | + جـ$

التكامل بالأجزاء

إذا كان الاقتران ق = ق (س) و م = م (س) قابلين للاشتقاق، فإن مشتقة اقتران الضرب ق م موجودة وهي حسب القاعدة :

$$\frac{\text{د}}{\text{د س}}(\text{ق م}) = \frac{\text{د ق}}{\text{د س}}\,\text{م} + \frac{\text{د م}}{\text{د س}}\,\text{ق}$$

$$\leftarrow \text{د (ق م) = د ق . م + د م . ق} \leftarrow \text{ق . د م = د (ق م) − م . د ق}$$

وعندما نكامل كل طرف نحصل على قاعدة التكامل الاتي :

$$\int \text{ق . د م} = \text{ق م} - \int \text{م . د ق}$$

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق . د م} = \Big[\text{ق م}\Big]_{\text{أ}}^{\text{ب}} - \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{م . د ق}$$

لاحظ أن ق . د م عبارة عن حاصل ضرب مقدارين ليس أحدهما مشتقة للاخر وأن المقدار (د م) يجب أن يكون قابلا للتكامل .

مثال جد $\int \text{س هـ}^{\text{س}} \text{ . د س}$

الحل افرض ق = س ، د م = هـ$^{\text{س}}$. د س

د ق = د س ، م = هـ$^{\text{س}}$

$$\int \text{س هـ}^{\text{س}}\text{ . د س} = \text{س هـ}^{\text{س}} - \int \text{هـ}^{\text{س}}\text{ . د س} = \text{س هـ}^{\text{س}} - \text{هـ}^{\text{س}} + \text{جـ}$$

مثال جد $\int \text{هـ}^{\text{س}} \text{ جا س . د س}$

الحل افرض ق = جا س ، د م = هـ$^{\text{س}}$. د س

د ق = جتا س . د س ، م = هـ$^{\text{س}}$

$$\int \text{هـ}^{\text{س}}\text{ جا س . د س} = \text{هـ}^{\text{س}}\text{ جا س} - \int \text{هـ}^{\text{س}}\text{ جتا س . د س}$$

نطبق قاعدة التكامل بالأجزاء مرة أخرى

افرض و = جتا س ، د ل = هـ$^{\text{س}}$. د س

د و = − جا س . د س ، ل = هـ$^{\text{س}}$

$$\int \text{هـ}^{\text{س}}\text{ جتا س . د س} = \text{هـ}^{\text{س}}\text{ جتا س} - \int \text{هـ}^{\text{س}}\text{ . -جا س . د س}$$

$$\int \text{هـ}^{\text{س}}\text{ جا س . د س} = \text{هـ}^{\text{س}}\text{ جا س} - \text{هـ}^{\text{س}}\text{ جتا س} - \int \text{هـ}^{\text{س}}\text{ جا س . د س}$$

$$٢\int \text{هـ}^{\text{س}}\text{ جا س . د س} = \text{هـ}^{\text{س}}\text{ جا س} - \text{هـ}^{\text{س}}\text{ جتا س}$$

$$\int \text{هـ}^{\text{س}}\text{ جا س . د س} = \frac{١}{٢}\left(\text{هـ}^{\text{س}}\text{ جا س} - \text{هـ}^{\text{س}}\text{ جتا س}\right) + \text{جـ}$$

مثال جد ∫ س^{٢} جتا (٢س + ١) . د س

الحل افرض ق = س^{٢} ، د م = جتا (٢س + ١) . د س

د ق = ٢ س د س ، م = $\frac{١}{٢}$ جا (٢س + ١)

∫ س^{٢} جتا (٢س + ١) . د س = $\frac{١}{٢}$ س^{٢} جا (٢س + ١) − ∫ س جا (٢س + ١) . د س

افرض و = س ، د ل = جا (٢س + ١) . د س

د و = د س ، ل = $\frac{-١}{٢}$ جتا (٢س + ١)

∫ س جا (٢س + ١) . د س = $\frac{-١}{٢}$ س جتا (٢س + ١) − ∫ $\frac{-١}{٢}$ جتا (٢س + ١) . د س

= $\frac{-١}{٢}$ س جتا (٢س + ١) + $\frac{١}{٤}$ جا (٢س + ١)

∫ س^{٢} جتا (٢س + ١) . د س

= $\frac{١}{٢}$ س^{٢} جا (٢س + ١) + $\frac{١}{٢}$ س جتا (٢س + ١) − $\frac{١}{٤}$ جا (٢س + ١) + جـ

مثال جد ∫ لـوهـ س . د س

الحل افرض ق = لـوهـ س ، د م = د س

د ق = $\frac{١}{س}$. د س ، م = س

∫ لـوهـ س . د س = س لـوهـ س − ∫ س $\frac{١}{س}$. د س = س لـوهـ س − س + جـ

مثال جد ∫ لـوهـ (س $\sqrt{س}$) . د س

الحل ∫ لـوهـ (س $\sqrt{س}$) . د س = ∫ لـوهـ س$^{\frac{٣}{٢}}$. د س = $\frac{٣}{٢}$ ∫ لـوهـ س . د س

افرض ق = لـوهـ س ، د م = د س

د ق = $\frac{١}{س}$. د س ، م = س

$\frac{٣}{٢}$ ∫ لـوهـ س . د س = $\frac{٣}{٢}$ (س لـوهـ س − ∫ س $\frac{١}{س}$. د س) = $\frac{٣}{٢}$ (س لـوهـ س − س) + جـ

مثال جد ∫ لـوهـ ($\frac{هـ^{س}}{س}$) . د س

الحل ∫ لـوهـ ($\frac{هـ^{س}}{س}$) . د س = ∫ (لـوهـ هـ^{س} − لـوهـ س) . د س = ∫ (س − لـوهـ س) . د س

= ∫ س . د س − ∫ لـوهـ س . د س = $\frac{١}{٢}$ س^{٢} − ∫ لـوهـ س . د س

$$\int \text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س} \,.\, \text{د س}$$

افرض $\text{ق} = \text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}$ ، $\text{د م} = \text{د س}$

$\text{د ق} = \frac{1}{\text{س}}\,\text{د س}$ ، $\text{م} = \text{س}$

$$\int \text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س} \,.\, \text{د س} = \text{س}\,\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س} - \text{س}$$

$$\therefore \int \text{لـو}_{\text{هـ}}\left(\frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{س}}\right) .\, \text{د س} = \frac{1}{2}\text{س}^2 - \text{س}\,\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س} + \text{س} + \text{جـ}$$

مثال جد $\int \text{لـو}_{\text{هـ}}\sqrt{\text{س}+1} \,.\, \text{د س}$

الحل $\int \text{لـو}_{\text{هـ}}\sqrt{\text{س}+1} \,.\, \text{د س} = \int \text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{س}+1)^{\frac{1}{2}} .\, \text{د س} = \frac{1}{2}\int \text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{س}+1) \,.\, \text{د س}$

افرض $\text{ق} = \text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{س}+1)$ ، $\text{د م} = \text{د س}$

$\text{د ق} = \frac{1}{\text{س}+1} \,.\, \text{د س}$ ، $\text{م} = \text{س}$

$$\int \text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{س}+1) \,.\, \text{د س} = \text{س}\,\text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{س}+1) - \int \frac{\text{س}}{\text{س}+1} \,.\, \text{د س}$$

$$= \text{س}\,\text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{س}+1) - \int \left(1 + \frac{-1}{\text{س}+1}\right) .\, \text{د س}$$

(القسمة المطولة: $\text{س} \div (\text{س}+1)$: الناتج 1 ، $\text{س} \mp 1$ ، الباقي -1)

$$\therefore \frac{1}{2}\int \text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{س}+1) \,.\, \text{د س} = \frac{1}{2}\left(\text{س}\,\text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{س}+1) - \text{س} + \text{لـو}_{\text{هـ}}|\text{س}+1|\right) + \text{جـ}$$

مثال جد $\int \frac{\text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{س}+1)}{\sqrt{\text{س}+1}} \,.\, \text{د س}$

الحل $\int \frac{\text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{س}+1)}{\sqrt{\text{س}+1}} \,.\, \text{د س} = \int (\text{س}+1)^{-\frac{1}{2}} .\, \text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{س}+1) \,.\, \text{د س}$

افرض $\text{ق} = \text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{س}+1)$ ، $\text{د م} = (\text{س}+1)^{-\frac{1}{2}} .\, \text{د س}$

$\text{د ق} = \frac{1}{\text{س}+1} \,.\, \text{د س}$ ، $\text{م} = 2\,(\text{س}+1)^{\frac{1}{2}}$

$$\int (\text{س}+1)^{-\frac{1}{2}} .\, \text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{س}+1) \,.\, \text{د س} = 2\,(\text{س}+1)^{\frac{1}{2}} .\, \text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{س}+1) - \int 2\,(\text{س}+1)^{\frac{1}{2}} .\, \frac{1}{\text{س}+1} \,.\, \text{د س}$$

$$= 2\,(\text{س}+1)^{\frac{1}{2}} .\, \text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{س}+1) - \int 2\,(\text{س}+1)^{-\frac{1}{2}} .\, \text{د س}$$

$$= 2\,(\text{س}+1)^{\frac{1}{2}} .\, \text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{س}+1) - 4\,(\text{س}+1)^{\frac{1}{2}} + \text{جـ} = 2\sqrt{\text{س}+1} \,.\, \text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{س}+1) - 4\sqrt{\text{س}+1} + \text{جـ}$$

مثال جد $\int (2\text{س}-1)\,\text{لـو}_{\text{هـ}}(2\text{س}-1) \,.\, \text{د س}$

الحل افرض $\text{ق} = \text{لـو}_{\text{هـ}}(2\text{س}-1)$ ، $\text{د م} = (2\text{س}-1) \,.\, \text{د س}$

$$د ق = \frac{٢}{٢س - ١} . د س \quad ، \quad م = \frac{(٢س - ١)^٢}{٤}$$

$$\int (٢س - ١) \text{ لـو}_هـ (٢س - ١) . د س = \frac{(٢س - ١)^٢}{٤} . \text{لـو}_هـ (٢س - ١) - \int \frac{(٢س - ١)^٢}{٤} . \frac{٢}{٢س - ١} . د س$$

$$= \frac{(٢س - ١)^٢}{٤} . \text{لـو}_هـ (٢س - ١) - \int \frac{(٢س - ١)}{٢} . د س$$

$$= \frac{(٢س - ١)^٢}{٤} . \text{لـو}_هـ (٢س - ١) - \frac{(٢س - ١)^٢}{٨} + جـ$$

مثال جد $\int \frac{\text{لـو}_هـ س^٣}{س^٧} . د س$

(الحل)

$$\int \frac{\text{لـو}_هـ س^٣}{س^٧} . د س = ٣ \int س^{-٧} \text{ لـو}_هـ س . د س$$

افرض ق = لـو$_هـ$ س ، د م = س$^{-٧}$. د س

$$د ق = \frac{د س}{س} \quad ، \quad م = \frac{س^{-٦}}{-٦}$$

$$\int س^{-٧} \text{ لـو}_هـ س . د س = \frac{س^{-٦}}{-٦} \text{لـو}_هـ س - \int \frac{س^{-٦}}{-٦} . \frac{د س}{س} = \frac{س^{-٦}}{-٦} \text{لـو}_هـ س - \frac{س^{-٦}}{٣٦}$$

$$\therefore ٣ \int س^{-٧} \text{ لـو}_هـ س . د س = ٣ \left(\frac{س^{-٦}}{-٦} \text{لـو}_هـ س - \frac{س^{-٦}}{٣٦} \right) + جـ$$

مثال جد $\int س^ن \text{ لـو}_هـ س . د س$ ، ن $\neq$ - ١

(الحل)

افرض ق = لـو$_هـ$ س ، د م = س^ن . د س

$$د ق = \frac{د س}{س} \quad ، \quad م = \frac{س^{ن+١}}{ن + ١}$$

$$\int س^ن \text{ لـو}_هـ س . د س = \frac{س^{ن+١}}{ن + ١} \text{لـو}_هـ س - \int \frac{س^{ن+١}}{ن + ١} . \frac{د س}{س}$$

$$= \frac{س^{ن+١}}{ن + ١} \text{لـو}_هـ س - \frac{١}{ن + ١} \int س^ن . د س = \frac{س^{ن+١}}{ن + ١} \text{لـو}_هـ س - \frac{س^{ن+١}}{(ن + ١)^٢} + جـ$$

مثال جد $\int (س \text{ لـو}_هـ س)^٢ . د س$

(الحل)

$$\int (س \text{ لـو}_هـ س)^٢ . د س = \int س^٢ (\text{لـو}_هـ س)^٢ . د س$$

افرض ق = (لـو$_هـ$ س)^٢ ، د م = س^٢ . د س

$$د ق = ٢ \text{ لـو}_هـ س . \frac{د س}{س} \quad ، \quad م = \frac{س^٣}{٣}$$

$$\int \text{س}^2 (\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^2 \,.\, \text{د س} = \frac{\text{س}^3}{3} (\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^2 - \int \frac{\text{س}^3}{3}\, 2\, \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \,.\, \frac{\text{د س}}{\text{س}}$$

$$= \frac{\text{س}^3}{3} (\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^2 - \frac{2}{3} \int \text{س}^2\, \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \,.\, \text{د س}$$

افرض $\text{و} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$ ، $\text{د ل} = \text{س}^2 \,.\, \text{د س}$

$\text{د و} = \frac{\text{د س}}{\text{س}}$ ، $\text{ل} = \frac{\text{س}^3}{3}$

$$\int \text{س}^2\, \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \,.\, \text{د س} = \frac{\text{س}^3}{3} \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \int \frac{\text{س}^3}{3} \,.\, \frac{\text{د س}}{\text{س}} = \frac{\text{س}^3}{3} \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \frac{\text{س}^3}{9}$$

$$\int \text{س}^2 (\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^2 \,.\, \text{د س} = \frac{\text{س}^3}{3} (\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{\text{س}^3}{3} \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \frac{\text{س}^3}{9} \right) + \text{جـ}$$

مثال جد $\int \text{س جتا}^2\text{س} \,.\, \text{د س}$

الحل

$$\int \text{س جتا}^2\text{س} \,.\, \text{د س} = \int \text{س} \,.\, \frac{1}{2} (1 + \text{جتا ٢س}) \,.\, \text{د س} = \frac{1}{2} \int (\text{س} + \text{س جتا ٢س}) \,.\, \text{د س}$$

افرض $\text{ق} = \text{س}$ ، $\text{د م} = \text{جتا ٢س} \,.\, \text{د س}$

$\text{د ق} = \text{د س}$ ، $\text{م} = \frac{1}{2} \text{جا ٢س}$

$$\int \text{س جتا ٢س} \,.\, \text{د س} = \frac{1}{2} \text{س جا ٢س} - \int \frac{1}{2} \text{جا ٢س} \,.\, \text{د س}$$

$$= \frac{1}{2} \text{س جا ٢س} + \frac{1}{4} \text{جتا ٢س}$$

$$\therefore \frac{1}{2} \int (\text{س} + \text{س جتا ٢س}) \,.\, \text{د س} = \frac{1}{2} \left(\frac{\text{س}^2}{2} + \frac{1}{2} \text{س جا ٢س} + \frac{1}{4} \text{جتا ٢س} \right) + \text{جـ}$$

مثال جد $\int \frac{\text{س}}{\text{جتا}^2\text{س}} \,.\, \text{د س}$

الحل

$$\int \frac{\text{س}}{\text{جتا}^2\text{س}} \,.\, \text{د س} = \int \text{س قا}^2\text{س} \,.\, \text{د س}$$

افرض $\text{ق} = \text{س}$ ، $\text{د م} = \text{قا}^2\text{س} \,.\, \text{د س}$

$\text{د ق} = \text{د س}$ ، $\text{م} = \text{ظا س}$

$$\int \text{س قا}^2\text{س} \,.\, \text{د س} = \text{س ظا س} - \int \text{ظا س} \,.\, \text{د س} = \text{س ظا س} - \int \frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}} \,.\, \text{د س}$$

$$= \text{س ظا س} + \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{جتا س}| + \text{جـ}$$

مثال جد $\int \text{س ظا}^2\text{س} \,.\, \text{د س}$

الحل

$$\int \text{س ظا}^2\text{س} \,.\, \text{د س} = \int \text{س} (\text{قا}^2\text{س} - 1) \,.\, \text{د س} = \int \text{س قا}^2\text{س} \,.\, \text{د س} - \int \text{س} \,.\, \text{د س}$$

$$= \text{س ظا س} + \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{جتا س}| - \frac{\text{س}^2}{2} + \text{جـ}$$

محلول في المثال السابق

مثال جد $\int \frac{\text{٢ س}}{\text{١ – جتا ٢ س}}$. د س

الحل

$\int \frac{\text{٢ س}}{\text{١ – جتا ٢ س}}$. د س = $\int \frac{\text{٢ س}}{\text{١ – (١ – ٢ جا}^{2}\text{س)}}$. د س = $\int \frac{\text{س}}{\text{جا}^{2}\text{س}}$. د س = $\int$ س قتا^{2}س . د س

افرض ق = س ، د م = قتا^{2}س . د س

د ق = د س ، م = - ظتا س

$\int$ س قتا^{2}س . د س = - س ظتا س – $\int$ - ظتا س . د س = - س ظتا س + $\int \frac{\text{جتا س}}{\text{جا س}}$. د س

= - س ظتا س + لوهـ | جا س | + جـ

مثال جد $\int \frac{\text{١ – ٢ س}}{\text{قا ٢ س}}$. د س

الحل

$\int \frac{\text{١ – ٢ س}}{\text{قا ٢ س}}$. د س = $\int$ (١ – ٢ س) جتا ٢ س . د س

افرض ق = ١ – ٢ س ، د م = جتا ٢ س . د س

د ق = - ٢ . د س ، م = $\frac{1}{2}$ جا ٢ س

$\int$ (١ – ٢ س) جتا ٢ س . د س = $\frac{1}{2}$ (١ – ٢ س) جا ٢ س – $\int \frac{1}{2}$ جا ٢ س . - ٢ د س

= $\frac{1}{2}$ (١ – ٢ س) جا ٢ س – $\frac{1}{2}$ جتا ٢ س + جـ

مثال جد $\int$ (س + جا س)^{2} . د س

الحل

$\int$ (س + جا س)^{2} . د س = $\int$ (س^{2} + ٢ س جا س + جا^{2}س) . د س

= $\int$ س^{2} . د س + $\int$ ٢ س جا س . د س + $\int \frac{1}{2}$ (١ – جتا ٢ س) . د س

افرض ق = ٢ س ، د م = جا س . د س

د ق = ٢ . د س ، م = - جتا س

$\int$ ٢ س جا س . د س = - ٢ س جتا س – $\int$ - جتا س . ٢ د س = - ٢ س جتا س + ٢ جا س

$\int$ (س + جا س)^{2} . د س = $\frac{\text{س}^{3}}{3}$ – ٢ س جتا س + ٢ جا س + $\frac{1}{2}$ (س – $\frac{1}{2}$ جا ٢ س) + جـ

مثال جد $\int$ جا س (س + قتا^{3}س) . د س

الحل

$\int$ جا س (س + قتا^{3}س) . د س = $\int$ س جا س . د س + $\int$ قتا^{2}س . د س

افرض ق = س ، د م = جا س . د س

د ق = د س ، م = - جتا س

$\int$ س جا س . د س = - س جتا س – $\int$ - جتا س . د س = - س جتا س + جا س

∫ جاس (س + قتا^{3}س) . د س = - س جتاس + جاس − ظتاس + جـ

مثال جد ∫ س (جاس + جتاس)^{2} . د س

الحل ∫ س (جاس + جتاس)^{2} . د س = ∫ س (جا^{2}س + ٢ جاس جتاس + جتا^{2}س) . د س

(جا^{2}س + جتا^{2}س = ١ ، ٢ جاس جتاس = جا٢س)

= ∫ (س + س جا٢س) . د س

> افرض ق = س ، د م = جا٢س . د س
>
> د ق = د س ، م = $\frac{-١}{٢}$ جتا٢س
>
> ∫ س جا٢س . د س = $\frac{-١}{٢}$ س جتا٢س − ∫ $\frac{-١}{٢}$ جتا٢س . د س
>
> = $\frac{-١}{٢}$ س جتا٢س + $\frac{١}{٤}$ جا٢س

∫ (س + س جا٢س) . د س = $\frac{\text{س}^{2}}{٢}$ − $\frac{١}{٢}$ س جتا٢س + $\frac{١}{٤}$ جا٢س + جـ

مثال جد ∫ (هـ$^{\text{س}}$ + ٢س)^{2} . د س

الحل ∫ (هـ$^{\text{س}}$ + ٢س)^{2} . د س = ∫ (هـ$^{\text{٢س}}$ + ٤ س هـ$^{\text{س}}$ + ٤ س^{2}) . د س

> افرض ق = ٤س ، د م = هـ$^{\text{س}}$. د س
>
> د ق = ٤ . د س ، م = هـ$^{\text{س}}$
>
> ∫ ٤ س هـ$^{\text{س}}$. د س = ٤ س هـ$^{\text{س}}$ − ∫ ٤ هـ$^{\text{س}}$. د س = ٤ س هـ$^{\text{س}}$ − ٤ هـ$^{\text{س}}$

∫ (هـ$^{\text{٢س}}$ + ٤ س هـ$^{\text{س}}$ + ٤ س^{2}) . د س = $\frac{\text{هـ}^{\text{٢س}}}{٢}$ + ٤ س هـ$^{\text{س}}$ − ٤ هـ$^{\text{س}}$ + $\frac{٤}{٣}$ س^{3} + جـ

مثال جد ∫ هـ$^{\text{س}}$ (لوهـ س + $\frac{١}{\text{س}}$) . د س

الحل ∫ هـ$^{\text{س}}$ (لوهـ س + $\frac{١}{\text{س}}$) . د س = ∫ هـ$^{\text{س}}$ لوهـ س . د س + ∫ هـ$^{\text{س}}$. $\frac{١}{\text{س}}$. د س

> افرض ق = لوهـ س ، د م = هـ$^{\text{س}}$. د س
>
> د ق = $\frac{\text{د س}}{\text{س}}$ ، م = هـ$^{\text{س}}$
>
> ∫ هـ$^{\text{س}}$ لوهـ س . د س = هـ$^{\text{س}}$ لوهـ س − ∫ هـ$^{\text{س}}$. $\frac{١}{\text{س}}$. د س

∫ هـ$^{\text{س}}$ (لوهـ س + $\frac{١}{\text{س}}$) . د س = هـ$^{\text{س}}$ لوهـ س − ~~∫ هـ$^{\text{س}}$. $\frac{١}{\text{س}}$. د س + ∫ هـ$^{\text{س}}$. $\frac{١}{\text{س}}$. د س~~

= هـ$^{\text{س}}$ لوهـ س + جـ

مثال جد $\int \text{٤س} \sqrt{\text{هـ}^{\text{س}}} \,.\, \text{د س}$

الحل

$\int \text{٤س} \sqrt{\text{هـ}^{\text{س}}} \,.\, \text{د س} = \int \text{٤س هـ}^{\frac{\text{س}}{\text{٢}}} \,.\, \text{د س}$

افرض $\text{ق} = \text{٤س}$	$\text{د م} = \text{هـ}^{\frac{\text{س}}{\text{٢}}} \,.\, \text{د س}$ ،
$\text{د ق} = \text{٤} \,.\, \text{د س}$	$\text{م} = \text{٢ هـ}^{\frac{\text{س}}{\text{٢}}}$ ،

$\int \text{٤س هـ}^{\frac{\text{س}}{\text{٢}}} \,.\, \text{د س} = \text{٨ س هـ}^{\frac{\text{س}}{\text{٢}}} - \int \text{٨ هـ}^{\frac{\text{س}}{\text{٢}}} \,.\, \text{د س} = \text{٨ س هـ}^{\frac{\text{س}}{\text{٢}}} - \text{١٦ هـ}^{\frac{\text{س}}{\text{٢}}} + \text{جـ}$

مثال جد $\int \text{هـ}^{\text{٣س} + \text{لـو س}} \,.\, \text{د س}$

الحل

$\int \text{هـ}^{\text{٣س} + \text{لـو س}} \,.\, \text{د س} = \int \text{س هـ}^{\text{٣س}} \,.\, \text{د س}$

افرض $\text{ق} = \text{س}$	$\text{د م} = \text{هـ}^{\text{٣س}} \,.\, \text{د س}$ ،
$\text{د ق} = \text{د س}$	$\text{م} = \frac{\text{هـ}^{\text{٣س}}}{\text{٣}}$ ،

$\int \text{س هـ}^{\text{٣س}} \,.\, \text{د س} = \text{س} \,.\, \frac{\text{هـ}^{\text{٣س}}}{\text{٣}} - \int \frac{\text{هـ}^{\text{٣س}}}{\text{٣}} \,.\, \text{د س} = \text{س} \,.\, \frac{\text{هـ}^{\text{٣س}}}{\text{٣}} - \frac{\text{هـ}^{\text{٣س}}}{\text{٩}} + \text{جـ}$

مثال جد $\int \text{جتا} \sqrt{\text{س}} \,.\, \text{د س}$

الحل بما أن الزاوية $\sqrt{\text{س}}$ ليست خطية افرض $\text{ص} = \sqrt{\text{س}}$

$\text{ص} = \sqrt{\text{س}} \longleftarrow \text{ص}^{\text{٢}} = \text{س}$

$\text{٢ ص} \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{١} \longleftarrow \text{د س} = \text{٢ ص} \,.\, \text{د ص}$

$\int \text{جتا} \sqrt{\text{س}} \,.\, \text{د س} = \int \text{٢ص جتا ص} \,.\, \text{د ص}$

افرض $\text{ق} = \text{٢ ص}$ ، $\text{د م} = \text{جتا ص} \,.\, \text{د ص}$

$\text{د ق} = \text{٢} \,.\, \text{د ص}$ ، $\text{م} = \text{جا ص}$

$\int \text{٢ص جتا ص} \,.\, \text{د ص} = \text{٢ ص جا ص} - \int \text{جا ص} \,.\, \text{٢ د ص} = \text{٢ ص جا ص} + \text{٢ جتا ص} + \text{جـ}$

$= \text{٢} \sqrt{\text{س}} \; \text{جا} \sqrt{\text{س}} + \text{٢ جتا} \sqrt{\text{س}} + \text{جـ}$

مثال جد $\int \text{س}^{\text{٣}} \text{جتا س}^{\text{٢}} \,.\, \text{د س}$

الحل افرض $\text{ص} = \text{س}^{\text{٢}} \longleftarrow \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{٢ س} \longleftarrow \text{د س} = \frac{\text{د ص}}{\text{٢ س}}$

$\int \text{س}^{\text{٣}} \text{جتا س}^{\text{٢}} \,.\, \text{د س} = \int \text{س}^{\text{٣}} \text{جتا ص} \,.\, \frac{\text{د ص}}{\text{٢ س}} = \frac{\text{١}}{\text{٢}} \int \text{ص جتا ص} \,.\, \text{د ص}$

افرض $\text{ق} = \text{ص}$ ، $\text{د م} = \text{جتا ص} \,.\, \text{د ص}$

$\text{د ق} = \text{د ص}$ ، $\text{م} = \text{جا ص}$

$\frac{1}{2}\int$ ص جتا ص . د ص $= \frac{1}{2}$ (ص جا ص $- \int$ جا ص . د ص)

$= \frac{1}{2}$ (ص جا ص + جتا ص) + جـ $= \frac{1}{2}$ (س^2 جا س^2 + جتا س^2) + جـ

مثال جد $\int$ س^8 جتا (س^3 + 1) . د س

الحل افرض ص = س^3 + 1 ⟵ $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = 3 س^2 ⟵ د س = $\frac{\text{د ص}}{3\ \text{س}^2}$

ص = س^3 + 1
س^3 = ص − 1
س^6 = (ص − 1)^2

$\int$ س^8 جتا (س^3 + 1) . د س = $\int$ س^8 جتا ص . $\frac{\text{د ص}}{3\ \text{س}^2}$

$= \frac{1}{3}\int$ س^6 جتا ص . د ص $= \frac{1}{3}\int$ (ص − 1)^2 جتا ص . د ص

افرض ق = (ص − 1)^2 ، د م = جتا ص . د ص
د ق = 2 (ص − 1) د ص ، م = جا ص

$\frac{1}{3}\int$ (ص − 1)^2 جتا ص . د ص $= \frac{1}{3}$ ((ص − 1)^2 جا ص $- \int$ 2 (ص − 1) جا ص . د ص)

افرض و = 2 (ص − 1) ، د ل = جا ص . د ص
د و = 2 . د ص ، ل = −جتا ص

$\int$ 2 (ص − 1) جا ص . د ص = −2 (ص − 1) جتا ص $- \int$ −2 جتا ص . د ص
= −2 (ص − 1) جتا ص + 2 جا ص

$\frac{1}{3}\int$ (ص − 1)^2 جتا ص . د ص $= \frac{1}{3}$ ((ص − 1)^2 جا ص + 2 (ص − 1) جتا ص − 2 جا ص) + جـ

$= \frac{1}{3}$ (س^6 جا (س^3 + 1) + 2 س^3 جتا (س^3 + 1) − 2 جا (س^3 + 1)) + جـ

مثال جد $\int$ س ظتا^2 $\sqrt{\text{س}^2 + 1}$. د س

الحل

افرض ص = $\sqrt{\text{س}^2 + 1}$ ⟵ ص^2 = س^2 + 1 ⟵ 2 ص $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = 2 س ⟵ د س = $\frac{\text{ص . د ص}}{\text{س}}$

$\int$ س ظتا^2 $\sqrt{\text{س}^2 + 1}$. د س = $\int$ س ظتا^2 ص $\frac{\text{ص . د ص}}{\text{س}}$ = $\int$ ص ظتا^2 ص . د ص

$= \int$ ص (قتا^2 ص − 1) . د ص $= \int$ (ص قتا^2 ص − ص) . د ص

افرض ق = ص ، د م = قتا^2 ص . د ص
د ق = د ص ، م = −ظتا ص

$\int$ ص قتا^2 ص . د ص = −ص ظتا ص $- \int$ −ظتا ص . د ص = −ص ظتا ص + $\int \frac{\text{جتا ص}}{\text{جا ص}}$. د ص
= −ص ظتا ص + لـــو$_{هـ}$ | جا ص |

$\int$ (ص قتا^2 ص − ص) . د ص = −ص ظتا ص + لـــو$_{هـ}$ | جا ص | $- \frac{\text{ص}^2}{2}$ + جـ

= − $\sqrt{\text{س}^2 + 1}$ ظتا $\sqrt{\text{س}^2 + 1}$ + لـــو$_{هـ}$ | جا $\sqrt{\text{س}^2 + 1}$ | $- \frac{\text{س}^2 + 1}{2}$ + جـ

مثال جد $\int$ قا$^2 \sqrt{س}$. د س

الحل افرض ص = $\sqrt{س}$ ⟵ ص^2 = س

2 ص $\frac{د ص}{د س}$ = 1 ⟵ د س = 2 ص . د ص

$\int$ قا$^2 \sqrt{س}$. د س = 2 $\int$ ص قا^{2}ص . د ص

افرض ق = ص ، د م = قا^{2}ص . د ص

د ق = د ص ، م = ظا ص

$\int$ ص قا^{2}ص . د ص = ص ظا ص − $\int$ ظا ص . د ص = ص ظا ص − $\int \frac{جا ص}{جتا ص}$. د ص

= ص ظا ص + لـو$_{هـ}$ |جتا ص|

2 $\int$ ص قا^{2}ص . د ص = 2 (ص ظا ص + لـو$_{هـ}$ |جتا ص|) + جـ

= 2 ($\sqrt{س}$ ظا $\sqrt{س}$ + لـو$_{هـ}$ |جتا $\sqrt{س}$ |) + جـ

مثال جد $\int$ هـ^{2س} جتا هـ^{س} . د س

الحل افرض ص = هـ^{س} ⟵ $\frac{د ص}{د س}$ = هـ^{س} ⟵ د س = $\frac{د ص}{هـ^{س}}$ = $\frac{د ص}{ص}$

$\int$ هـ^{2س} جتا هـ^{س} . د س = $\int$ ص^2 جتا ص . $\frac{د ص}{ص}$ = $\int$ ص جتا ص . د ص

افرض ق = ص ، د م = جتا ص . د ص

د ق = د ص ، م = جا ص

$\int$ ص جتا ص . د ص = ص جا ص − $\int$ جا ص . د ص = ص جا ص + جتا ص + جـ

= هـ^{س} جا هـ^{س} + جتا هـ^{س} + جـ

مثال جد $\int \frac{هـ^{\sqrt[3]{س}}}{\sqrt[3]{س}}$. د س

الحل بما أن الأس $\sqrt[3]{س}$ غير خطي افرض ص = $\sqrt[3]{س}$

ص = $\sqrt[3]{س}$ ⟵ ص^3 = س ⟵ 3 ص^2 $\frac{د ص}{د س}$ = 1 ⟵ د س = 3 ص^2 . د ص

$\int \frac{هـ^{\sqrt[3]{س}}}{\sqrt[3]{س}}$. د س = $\int \frac{هـ^{ص}}{ص}$. 3 ص^2 . د ص = 3 $\int$ ص هـ^{ص} . د ص

افرض ق = ص ، د م = هـ^{ص} . د ص

د ق = د ص ، م = هـ^{ص}

3 $\int$ ص هـ^{ص} . د ص = 3 (ص هـ^{ص} − $\int$ هـ^{ص} . د ص) = 3 (ص هـ^{ص} − هـ^{ص}) + جـ

= 3 ($\sqrt[3]{س}$ هـ$^{\sqrt[3]{س}}$ − هـ$^{\sqrt[3]{س}}$) + جـ

مثال جد $\int \frac{س^{3}}{هـ^{س^{2}}} \,.\, د\,س$

(الحل) $\int \frac{س^{3}}{هـ^{س^{2}}} \,.\, د\,س = \int س^{3}\, هـ^{-س^{2}} \,.\, د\,س$

افرض $ص = -س^{2} \longrightarrow \frac{د\,ص}{د\,س} = -2\,س \longrightarrow د\,س = -\frac{د\,ص}{2\,س}$

$\int س^{3}\, هـ^{-س^{2}} \,.\, د\,س = \int س^{3}\, هـ^{ص} \,.\, \frac{-د\,ص}{2\,س} = \frac{1}{2} \int ص\, هـ^{ص} \,.\, د\,ص$

افرض $ق = ص$ ، $د\,م = هـ^{ص} \,.\, د\,ص$

$د\,ق = د\,ص$ ، $م = هـ^{ص}$

$\frac{1}{2} \int ص\, هـ^{ص} \,.\, د\,ص = \frac{1}{2} \left(ص\, هـ^{ص} - \int هـ^{ص} \,.\, د\,ص\right) = \frac{1}{2} \left(ص\, هـ^{ص} - هـ^{ص}\right) + جـ$

$= \frac{1}{2} \left(-س^{2}\, هـ^{-س^{2}} - هـ^{-س^{2}}\right) + جـ$

مثال جد $\int س^{4}\, هـ^{س^{3} + لو\,س} \,.\, د\,س$

(الحل) $\int س^{4}\, هـ^{س^{3} + لو\,س} \,.\, د\,س = \int س^{4}\, هـ^{س^{3}}\, هـ^{لو\,س} \,.\, د\,س = \int س^{5}\, هـ^{س^{3}} \,.\, د\,س$

افرض $ص = س^{3} \longrightarrow \frac{د\,ص}{د\,س} = 3\,س^{2} \longrightarrow د\,س = \frac{د\,ص}{3\,س^{2}}$

$\int س^{5}\, هـ^{س^{3}} \,.\, د\,س = \int س^{5}\, هـ^{ص} \,.\, \frac{د\,ص}{3\,س^{2}} = \frac{1}{3} \int س^{3}\, هـ^{ص} \,.\, د\,ص = \frac{1}{3} \int ص\, هـ^{ص} \,.\, د\,ص$

افرض $ق = ص$ ، $د\,م = هـ^{ص} \,.\, د\,ص$

$د\,ق = د\,ص$ ، $م = هـ^{ص}$

$\frac{1}{3} \int ص\, هـ^{ص} \,.\, د\,ص = \frac{1}{3} \left(ص\, هـ^{ص} - \int هـ^{ص} \,.\, د\,ص\right) = \frac{1}{3} \left(ص\, هـ^{ص} - هـ^{ص}\right) + جـ$

$= \frac{1}{3} \left(س^{3}\, هـ^{س^{3}} - هـ^{س^{3}}\right) + جـ$

مثال جد $\int قا^{2}س\, هـ^{\sqrt{ظا\,س}} \,.\, د\,س$

(الحل) افرض $ص = \sqrt{ظا\,س} \longrightarrow ص^{2} = ظا\,س \longrightarrow 2\,ص\, \frac{د\,ص}{د\,س} = قا^{2}س$

$\longrightarrow د\,س = \frac{2\,ص \,.\, د\,ص}{قا^{2}س}$

$\int قا^{2}س\, هـ^{\sqrt{ظا\,س}} \,.\, د\,س = \int قا^{2}س\, هـ^{ص} \,.\, \frac{2\,ص \,.\, د\,ص}{قا^{2}س} = 2 \int ص\, هـ^{ص} \,.\, د\,ص$

افرض $ق = ص$ ، $د\,م = هـ^{ص} \,.\, د\,ص$

$د\,ق = د\,ص$ ، $م = هـ^{ص}$

$$2\int ص\, هـ^{ص} . د ص = 2 \left(ص\, هـ^{ص} - \int هـ^{ص} . د ص \right) = 2 \left(ص\, هـ^{ص} - هـ^{ص} \right) + جـ$$

$$= 2 \left(ظا س\, هـ^{ظا س} - هـ^{ظا س} \right) + جـ$$

مثال جد $\int جا 2س\, هـ^{جا س} . د س$

الحل افرض ص = جا س

$$\frac{د ص}{د س} = جتا س \longrightarrow د س = \frac{د ص}{جتا س}$$

$$\int جا 2س\, هـ^{جا س} . د س = 2 \int جا س\, جتا س\, هـ^{ص} . \frac{د ص}{جتا س} = 2 \int \underset{ق}{ص}\, \underset{د م}{هـ^{ص} . د ص}$$

$$2\int ص\, هـ^{ص} . د ص = 2 \left(ص\, هـ^{ص} - \int هـ^{ص} . د ص \right) = 2 \left(ص\, هـ^{ص} - هـ^{ص} \right) + جـ$$

$$= 2 \left(جا س\, هـ^{جا س} - هـ^{جا س} \right) + جـ$$

مثال جد $\int \frac{س\, هـ^{س}}{(1 + س)^2} . د س$

الحل

$$\int \frac{س\, هـ^{س}}{(1 + س)^2} . د س = \int س\, هـ^{س} (1 + س)^{-2} . د س$$

افرض ق = س هـ^س — د م = (1 + س)^-2 . د س

$د ق = (س\, هـ^{س} + هـ^{س} (1)) . د س$ — $م = \frac{-1}{1 + س}$

$د ق = هـ^{س} (س + 1) . د س$

$$\int س\, هـ^{س} (1 + س)^{-2} . د س = س\, هـ^{س} . \frac{-1}{1 + س} - \int \frac{-1}{1 + س} هـ^{س} (س + 1) . د س$$

$$= \frac{- س\, هـ^{س}}{1 + س} + هـ^{س} + جـ$$

مثال جد $\int \frac{س^3\, هـ^{س^2}}{(س^2 + 1)^2} . د س$

الحل افرض ص = س² لتبسيط التكامل

$$ص = س^2 \longrightarrow \frac{د ص}{د س} = 2 س \longrightarrow د س = \frac{د ص}{2 س}$$

$$\int \frac{س^3\, هـ^{س^2}}{(س^2 + 1)^2} . د س = \int \frac{س^3\, هـ^{ص}}{(ص + 1)^2} . \frac{د ص}{2 س} = \frac{1}{2} \int \frac{ص\, هـ^{ص}}{(ص + 1)^2} . د ص$$

افرض ق = ص هـ^ص — د م = (ص + 1)^-2 . د ص

$د ق = (ص\, هـ^{ص} + هـ^{ص} (1)) . د ص$ — $م = \frac{-1}{ص + 1}$

$د ق = هـ^{ص} (ص + 1) . د ص$

$\frac{1}{2}\int \frac{ص\, هـ^{ص}}{(ص+1)^2}\, د ص = \frac{1}{2}\left(ص\, هـ^{ص} \cdot \frac{-1}{ص+1} - \int \frac{-1}{ص+1}\, هـ^{ص}(ص+1)\, د ص \right)$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{-ص\, هـ^{ص}}{ص+1} + هـ^{ص} \right) + جـ = \frac{1}{2}\left(\frac{-س^2\, هـ^{س^2}}{س^2+1} + هـ^{س^2} \right) + جـ$

مثال جد $\int \frac{هـ^{س}(س-1)}{س^2}\, د س$

(الحل)

$\int \frac{هـ^{س}(س-1)}{س^2}\, د س = \int هـ^{س}(س-1)\, س^{-2}\, د س$

افرض ق = $هـ^{س}(س-1)$	د م = $س^{-2}$. د س
د ق = $(هـ^{س}(1) + (س-1)\, هـ^{س})$. د س	م = $\frac{-1}{س}$
د ق = $س\, هـ^{س}$. د س	

$\int هـ^{س}(س-1)\, س^{-2}\, د س = هـ^{س}(س-1) \cdot \frac{-1}{س} - \int \frac{-1}{س}\, س\, هـ^{س}\, د س$

$= \frac{هـ^{س}(1-س)}{س} + هـ^{س} + جـ$

مثال جد $\int جتا^3 س\, لو_{هـ} جا س\, .\, د س$

(الحل) افرض ص = جا س

$\frac{د ص}{د س} = جتا س \longrightarrow د س = \frac{د ص}{جتا س}$

$\int جتا^3 س\, لو_{هـ} جا س\, .\, د س = \int جتا^3 س\, لو_{هـ} ص \cdot \frac{د ص}{جتا س} = \int جتا^2 س\, لو_{هـ} ص\, .\, د ص$

$= \int (1 - جا^2 س)\, لو_{هـ} ص\, .\, د ص = \int (1 - ص^2)\, لو_{هـ} ص\, .\, د ص$

افرض ق = $لو_{هـ} ص$	، د م = $(1 - ص^2)$. د ص
د ق = $\frac{د ص}{ص}$	، م = $ص - \frac{ص^3}{3}$

$\int (1-ص^2)\, لو_{هـ} ص\, .\, د ص = (ص - \frac{ص^3}{3})\, لو_{هـ} ص - \int (ص - \frac{ص^3}{3}) \cdot \frac{د ص}{ص}$

$= (ص - \frac{ص^3}{3})\, لو_{هـ} ص - \int (1 - \frac{ص^2}{3})\, .\, د ص = (ص - \frac{ص^3}{3})\, لو_{هـ} ص - (ص - \frac{ص^3}{9}) + جـ$

$= (جا س - \frac{جا^3 س}{3})\, لو_{هـ} جا س - (جا س - \frac{جا^3 س}{9}) + جـ$

مثال جد $\int قا^4 س\, لو_{هـ} ظا س\, .\, د س$

(الحل) افرض ص = ظا س $\longrightarrow \frac{د ص}{د س} = قا^2 س \longrightarrow د س = \frac{د ص}{قا^2 س}$

$\int \text{قا}^{٤}\text{س}\ \text{لـو}_{\text{هـ}}\ \text{ظاس}\ .\ \text{دس} = \int \text{قا}^{٤}\text{س}\ \text{لـو}_{\text{هـ}}\ \text{ص}\ \frac{\text{دص}}{\text{قا}^{٢}\text{س}} = \int \text{قا}^{٢}\text{س}\ \text{لـو}_{\text{هـ}}\ \text{ص}\ .\ \text{دص}$

$= \int (١ + \text{ظا}^{٢}\text{س})\ \text{لـو}_{\text{هـ}}\ \text{ص}\ .\ \text{دص} = \int (١ + \text{ص}^{٢})\ \text{لـو}_{\text{هـ}}\ \text{ص}\ .\ \text{دص}$

افرض $\text{ق} = \text{لـو}_{\text{هـ}}\ \text{ص}$	$\text{دم} = (١ + \text{ص}^{٢})\ .\ \text{دص}$
$\text{دق} = \frac{\text{دص}}{\text{ص}}$	$\text{م} = \text{ص} + \frac{\text{ص}^{٣}}{٣}$

$\int (١ + \text{ص}^{٢})\ \text{لـو}_{\text{هـ}}\ \text{ص}\ .\ \text{دص} = (\text{ص} + \frac{\text{ص}^{٣}}{٣})\ \text{لـو}_{\text{هـ}}\ \text{ص} - \int (\text{ص} + \frac{\text{ص}^{٣}}{٣})\ .\ \frac{\text{دص}}{\text{ص}}$

$= (\text{ص} + \frac{\text{ص}^{٣}}{٣})\ \text{لـو}_{\text{هـ}}\ \text{ص} - \int (١ + \frac{\text{ص}^{٢}}{٣})\ .\ \text{دص} = (\text{ص} + \frac{\text{ص}^{٣}}{٣})\ \text{لـو}_{\text{هـ}}\ \text{ص} - (\text{ص} + \frac{\text{ص}^{٣}}{٩}) + \text{جـ}$

$= (\text{ظاس} + \frac{\text{ظا}^{٣}\text{س}}{٣})\ \text{لـو}_{\text{هـ}}\ \text{ظاس} - (\text{ظاس} + \frac{\text{ظا}^{٣}\text{س}}{٩}) + \text{جـ}$

مثال جد $\int \text{جا}٢\text{س}\ \text{لـو}_{\text{هـ}}\ \text{جاس}\ .\ \text{دس}$

الحل افرض $\text{ص} = \text{جاس}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{جتاس} \longrightarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{جتاس}}$

$\int \text{جا}٢\text{س}\ \text{لـو}_{\text{هـ}}\ \text{جاس}\ .\ \text{دس} = \int ٢\ \text{جاس}\ .\ \text{جتاس}\ .\ \text{لـو}_{\text{هـ}}\ \text{ص}\ .\ \frac{\text{دص}}{\text{جتاس}} = ٢\int \text{ص}\ \text{لـو}_{\text{هـ}}\ \text{ص}\ .\ \text{دص}$

افرض $\text{ق} = \text{لـو}_{\text{هـ}}\ \text{ص}$	$\text{دم} = \text{ص}\ .\ \text{دص}$
$\text{دق} = \frac{\text{دص}}{\text{ص}}$	$\text{م} = \frac{\text{ص}^{٢}}{٢}$

$٢\int \text{ص}\ \text{لـو}_{\text{هـ}}\ \text{ص}\ .\ \text{دص} = ٢\left(\frac{\text{ص}^{٢}}{٢}\ \text{لـو}_{\text{هـ}}\ \text{ص} - \int \frac{\text{ص}^{٢}}{٢}\ .\ \frac{\text{دص}}{\text{ص}}\right) = ٢\left(\frac{\text{ص}^{٢}}{٢}\ \text{لـو}_{\text{هـ}}\ \text{ص} - \frac{\text{ص}^{٢}}{٤}\right) + \text{جـ}$

$= ٢\left(\frac{\text{جا}^{٢}\text{س}}{٢}\ \text{لـو}_{\text{هـ}}\ \text{جاس} - \frac{\text{جا}^{٢}\text{س}}{٤}\right) + \text{جـ}$

مثال جد $\int \text{هـ}^{-\text{س}}\ \text{لـو}_{\text{هـ}}(١ + \text{هـ}^{-\text{س}})\ .\ \text{دس}$

الحل افرض $\text{ص} = ١ + \text{هـ}^{-\text{س}} \longrightarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -\text{هـ}^{-\text{س}} \longrightarrow \text{دس} = \frac{-\text{دص}}{\text{هـ}^{-\text{س}}}$

$\int \text{هـ}^{-\text{س}}\ \text{لـو}_{\text{هـ}}(١ + \text{هـ}^{-\text{س}})\ .\ \text{دس} = \int \text{هـ}^{-\text{س}}\ \text{لـو}_{\text{هـ}}\ \text{ص}\ .\ \frac{-\text{دص}}{\text{هـ}^{-\text{س}}} = -\int \text{لـو}_{\text{هـ}}\ \text{ص}\ .\ \text{دص}$

افرض $\text{ق} = \text{لـو}_{\text{هـ}}\ \text{ص}$ ، $\text{دم} = \text{دص}$	$\int \text{لـو}_{\text{هـ}}\ \text{ص}\ .\ \text{دص} = \text{ص}\ \text{لـو}_{\text{هـ}}\ \text{ص} - \int \text{ص}\ \frac{١}{\text{ص}}\ .\ \text{دص}$
$\text{دق} = \frac{١}{\text{ص}}\ \text{دص}$ ، $\text{م} = \text{ص}$	$= \text{ص}\ \text{لـو}_{\text{هـ}}\ \text{ص} - \text{ص}$

$-\int \text{لـو}_{\text{هـ}}\ \text{ص}\ .\ \text{دص} = -(\text{ص}\ \text{لـو}_{\text{هـ}}\ \text{ص} - \text{ص}) + \text{جـ}$

$$= -\left((1+\text{هـ}^{-\text{س}})\ \text{لـو}_{\text{هـ}}(1+\text{هـ}^{-\text{س}}) - (1+\text{هـ}^{-\text{س}})\right) + \text{جـ}$$

مثال جد $\int \text{س}^{5}\ \text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{س}^{3} - 4)\ .\ \text{د س}$

الحل افرض $\text{ص} = \text{س}^{3} - 4 \longrightarrow \dfrac{\text{د ص}}{\text{د س}} = 3\,\text{س}^{2} \longrightarrow \text{د س} = \dfrac{\text{د ص}}{3\,\text{س}^{2}}$

$$\int \text{س}^{5}\ \text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{س}^{3}-4)\ .\ \text{د س} = \int \text{س}^{5}\ \text{لـو}_{\text{هـ}}\text{ص}\ .\ \frac{\text{د ص}}{3\,\text{س}^{2}} = \frac{1}{3}\int \text{س}^{3}\ \text{لـو}_{\text{هـ}}\text{ص}\ .\ \text{د ص}$$

$$= \frac{1}{3}\int (\text{ص}+4)\ \text{لـو}_{\text{هـ}}\text{ص}\ .\ \text{د ص}$$

افرض $\text{ق} = \text{لـو}_{\text{هـ}}\text{ص}$ ، $\text{د م} = \text{ص} + 4\ .\ \text{د ص}$

$\text{د ق} = \dfrac{\text{د ص}}{\text{ص}}$ ، $\text{م} = \dfrac{\text{ص}^{2}}{2} + 4\,\text{ص}$

$$\frac{1}{3}\int (\text{ص}+4)\ \text{لـو}_{\text{هـ}}\text{ص}\ .\ \text{د ص} = \frac{1}{3}\left(\left(\frac{\text{ص}^{2}}{2}+4\,\text{ص}\right)\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{ص} - \int\left(\frac{\text{ص}^{2}}{2}+4\,\text{ص}\right).\frac{\text{د ص}}{\text{ص}}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\left(\frac{\text{ص}^{2}}{2}+4\,\text{ص}\right)\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{ص} - \int\left(\frac{\text{ص}}{2}+4\right).\ \text{د ص}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\left(\frac{\text{ص}^{2}}{2}+4\,\text{ص}\right)\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{ص} - \left(\frac{\text{ص}^{2}}{4}+4\,\text{ص}\right)\right) + \text{جـ}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\left(\frac{(\text{س}^{3}-4)^{2}}{2} + 4(\text{س}^{3}-4)\right)\text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{س}^{3}-4) - \left(\frac{(\text{س}^{3}-4)^{2}}{4} + 4(\text{س}^{3}-4)\right)\right) + \text{جـ}$$

مثال جد $\int \text{قا}^{2}\text{س}\ \text{لـو}_{\text{هـ}}\ \text{جا س}\ .\ \text{د س}$

الحل

افرض $\text{ق} = \text{لـو}_{\text{هـ}}\ \text{جا س}$ ، $\text{د م} = \text{قا}^{2}\text{س}\ .\ \text{د س}$

$\text{د ق} = \text{ظتا س}\ .\ \text{د س}$ ، $\text{م} = \text{ظا س}$

$$\int \text{قا}^{2}\text{س}\ \text{لـو}_{\text{هـ}}\ \text{جا س}\ .\ \text{د س} = \text{ظا س}\ \text{لـو}_{\text{هـ}}\ \text{جا س} - \int \text{ظا س}\ \text{ظتا س}\ .\ \text{د س}$$

(شُطب على ظا س ظتا س وكُتب فوقها 1)

$$= \text{ظا س}\ \text{لـو}_{\text{هـ}}\ \text{جا س} - \text{س} + \text{جـ}$$

مثال جد $\int \text{قا}^{2}\text{س}\ \text{لـو}_{\text{هـ}}\ \text{جتا س}\ .\ \text{د س}$

الحل

افرض $\text{ق} = \text{لـو}_{\text{هـ}}\ \text{جتا س}$ ، $\text{د م} = \text{قا}^{2}\text{س}\ .\ \text{د س}$

$\text{د ق} = -\,\text{ظا س}\ .\ \text{د س}$ ، $\text{م} = \text{ظا س}$

$$\int \text{قا}^{2}\text{س}\ \text{لـو}_{\text{هـ}}\ \text{جتا س}\ .\ \text{د س} = \text{ظا س}\ \text{لـو}_{\text{هـ}}\ \text{جتا س} - \int -\,\text{ظا س}\ \text{ظا س}\ .\ \text{د س}$$

$$= \text{ظا س}\ \text{لـو}_{\text{هـ}}\ \text{جتا س} + \int (\text{قا}^{2}\text{س} - 1)\ .\ \text{د س}$$

$$= \text{ظا س}\ \text{لـو}_{\text{هـ}}\ \text{جتا س} + \text{ظا س} - \text{س} + \text{جـ}$$

مثال جد $\displaystyle\int \frac{\text{س جا س}}{\text{جتا}^{3}\text{س}}\ .\ \text{د س}$

$\int س \frac{جا س}{جتا^3 س} . د س = \int س \ ظا س \ قا^2 س \ . د س$

افرض $ق = س$ ، $د م = ظا س \ قا^2 س \ . د س$

$د ق = د س$ ، $م = \int ظا س \ قا^2 س \ . د س$ بالتعويض

افرض $ص = ظا س \longrightarrow \frac{د ص}{د س} = قا^2 س \longrightarrow د س = \frac{د ص}{قا^2 س}$

$\int ظا س \ قا^2 س \ . د س = \int ص \ قا^2 س . \frac{د ص}{قا^2 س} = \int ص \ . د ص = \frac{ص^2}{2} = \frac{ظا^2 س}{2}$

$\int س \ ظا س \ قا^2 س \ . د س = س \frac{ظا^2 س}{2} - \int \frac{ظا^2 س}{2} \ . د س$

$= س \frac{ظا^2 س}{2} - \frac{1}{2} \int (قا^2 س - 1) . د س = س \frac{ظا^2 س}{2} - \frac{1}{2} (ظا س - س) + جـ$

مثال جد $\int س (جتا س + جتا 3 س) \ . د س$

الحل
افرض $ق = س$ ، $د م = (جتا س + جتا 3 س) . د س$

$د ق = د س$ ، $م = جا س + \frac{جا 3 س}{3}$

$\int س (جتا س + جتا 3 س) \ . د س = س (جا س + \frac{جا 3 س}{3}) - \int (جا س + \frac{جا 3 س}{3}) \ . د س$

$= س (جا س + \frac{جا 3 س}{3}) + جتا س + \frac{جتا 3 س}{9} + جـ$

مثال جد $\int جا \sqrt{س} \ جتا^3 \sqrt{س} \ . د س$

الحل
افرض $ص = \sqrt{س} \longrightarrow ص^2 = س \longrightarrow 2 ص \frac{د ص}{د س} = 1 \longrightarrow د س = 2 ص . د ص$

$\int جا \sqrt{س} \ جتا^3 \sqrt{س} \ . د س = \int 2 ص \ جا ص \ جتا^3 ص . د ص$

$= \int 2 ص \ جا ص \ جتا ص . جتا^2 ص . د ص = \int 2 ص \ جا ص \ جتا ص . \frac{1}{2} (1 + جتا 2 ص) \ . د ص$

$= \frac{1}{2} \int ص \ (جا 2 ص + جا 2 ص \ جتا 2 ص) \ . د ص = \frac{1}{2} \int ص \ (جا 2 ص + \frac{جا 4 ص}{2}) \ . د ص$

افرض $ق = ص$ ، $د م = (جا 2 ص + \frac{جا 4 ص}{2}) . د ص$

$د ق = د ص$ ، $م = (\frac{- جتا 2 ص}{2} - \frac{جتا 4 ص}{8})$

$= \frac{1}{2} (ص (\frac{- جتا 2 ص}{2} - \frac{جتا 4 ص}{8}) - \int (\frac{- جتا 2 ص}{2} - \frac{جتا 4 ص}{8}) \ . د ص)$

$= \frac{1}{2} (ص (\frac{- جتا 2 ص}{2} - \frac{جتا 4 ص}{8}) + (\frac{جا 2 ص}{4} + \frac{جا 4 ص}{32}) + جـ$

$= \frac{1}{2} (\sqrt{س} (\frac{- جتا 2 \sqrt{س}}{2} - \frac{جتا 4 \sqrt{س}}{8}) + (\frac{جا 2 \sqrt{س}}{4} + \frac{جا 4 \sqrt{س}}{32}) + جـ$

مثال جد $\int$ س جا س جا ٢س . د س

(جا س جا ٢س = $\frac{١}{٢}$ (جتا س ـ جتا ٣س))

الحل

$\int$ س جا س جا ٢س . د س = $\frac{١}{٢}$ $\int$ س (جتا س ـ جتا ٣س) . د س

افرض ق = س ، د م = (جتا س ـ جتا ٣س) . د س

د ق = د س ، م = جا س ـ $\frac{\text{جا ٣س}}{٣}$

$\frac{١}{٢}$ $\int$ س (جتا س ـ جتا ٣س) . د س = $\frac{١}{٢}$(س (جا س ـ $\frac{\text{جا ٣س}}{٣}$) ـ $\int$ (جا س ـ $\frac{\text{جا ٣س}}{٣}$) . د س)

= $\frac{١}{٢}$ (س (جا س ـ $\frac{\text{جا ٣س}}{٣}$) + جتا س ـ $\frac{\text{جتا ٣س}}{٩}$) + جـ

مثال جد $\int$ لـوهـ (س^{٢} ـ ١) . د س

الحل

افرض ق = لـوهـ (س^{٢} ـ ١) ، د م = د س

د ق = $\frac{٢س}{س^{٢} - ١}$. د س ، م = س

٢	
٢س^{٢}	س^{٢} ـ ١
∓ ٢س^{٢} ± ٢	
٢	

$\int$ لـوهـ (س^{٢} ـ ١) . د س = س لـوهـ (س^{٢} ـ ١) ـ $\int$ ($\frac{٢س^{٢}}{س^{٢} - ١}$) . د س

= س لـوهـ (س^{٢} ـ ١) ـ $\int$ (٢ + $\frac{٢}{س^{٢} - ١}$) . د س

$\frac{٢}{س^{٢} - ١}$ = $\frac{٢}{(س - ١)(س + ١)}$ = $\frac{أ}{س - ١}$ + $\frac{ب}{س + ١}$ = $\frac{أ (س + ١) + ب (س - ١)}{(س - ١)(س + ١)}$

← ٢ = أ (س + ١) + ب (س - ١)

بوضع س = - ١ : ٢ = أ (- ١ + ١) + ب (- ١ - ١) ← ب = - ١

بوضع س = ١ : ٢ = أ (١ + ١) + ب (١ - ١) ← أ = ١

$\int$ لـوهـ (س^{٢} ـ ١) . د س = س لـوهـ (س^{٢} ـ ١) ـ $\int$ (٢ + $\frac{١}{س - ١}$ + $\frac{- ١}{س + ١}$) . د س

$\int$ لـوهـ (س^{٢} ـ ١) . د س = س لـوهـ (س^{٢} ـ ١) ـ (٢س + لـوهـ |س - ١| ـ لـوهـ |س + ١|) + جـ

مثال جد $\int$ جتا (لـوهـ س) . د س

الحل

افرض ق = جتا (لـوهـ س) ، د م = د س

د ق = $\frac{-١}{س}$ جا (لـوهـ س) . د س ، م = س

$\int$ جتا (لـوهـ س) . د س = س جتا (لـوهـ س) ـ $\int$ س $\frac{-١}{س}$ جا (لـوهـ س) . د س

= س جتا (لـوهـ س) + $\int$ جا (لـوهـ س) . د س

افرض و = جا (لوهـ س) ، د ل = د س

د و = $\frac{1}{\text{س}}$ جتا (لوهـ س) . د س ، ل = س

$\int$ جا (لوهـ س) . د س = س جا (لوهـ س) − $\int$ س . $\frac{1}{\text{س}}$. جتا (لوهـ س) . د س

= س جا (لوهـ س) − $\int$ جتا (لوهـ س) . د س

$2\int$ جتا (لوهـ س) . د س = س جتا (لوهـ س) + س جا (لوهـ س)

$\int$ جتا (لوهـ س) . د س = $\frac{\text{س}}{2}$ جتا (لوهـ س) + $\frac{\text{س}}{2}$ جا (لوهـ س) + جـ

مثال جد $\int (2\text{س}+1)(3\text{س}-2)^{9}$. د س

الحل

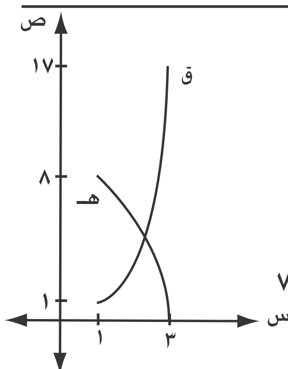
افرض ق = ٢ س + ١ ، د م = $(3\text{س}-2)^{9}$. د س

د ق = ٢ . د س ، م = $\frac{(3\text{س}-2)^{10}}{30}$

$\int (2\text{س}+1)(3\text{س}-2)^{9}$. د س = $(2\text{س}+1)\frac{(3\text{س}-2)^{10}}{30} - \int \frac{(3\text{س}-2)^{10}}{30}$. ٢ . د س

= $\frac{(2\text{س}+1)(3\text{س}-2)^{10}}{30} - \frac{(3\text{س}-2)^{11}}{495}$ + جـ

مثال الشكل المجاور يمثل بياني الاقترانين ق ، هـ



إذا علمت أن $\int_{1}^{3}$ ق . د هـ = −٧٢ ، فجد $\int_{1}^{3}$ هـ . د ق

الحل

$\int_{1}^{3}$ ق . د هـ = ق هـ $\Big|_{1}^{3}$ − $\int_{1}^{3}$ هـ . د ق = −٧٢

← ق (٣) هـ (٣) − ق (١) هـ (١) − $\int_{1}^{3}$ هـ . د ق = −٧٢

← (١٧) (٠) − (١) (٨) − $\int_{1}^{3}$ هـ . د ق = −٧٢

← $\int_{1}^{3}$ هـ . د ق = ٦٤

مثال إذا كان $\int_{\pi}^{3}$ ٢ ق (س) . د س = ٦ ، $\int_{0}^{3}$ ق (س) . د س = −٢

فجد $\int_{0}^{\pi}$ (ق (س) − س جتا س) . د س

الحل

$\int_{0}^{\pi}$ (ق (س) − س جتا س) . د س = $\int_{0}^{\pi}$ ق (س) . د س − $\int_{0}^{\pi}$ س جتا س . د س

$\int_{\pi}^{٣}$ ٢ ق (س) . د س = ٦ ← $\int_{٣}^{\pi}$ ق (س) . د س = -٣

$\int_{٠}^{\pi}$ ق (س) . د س = $\int_{٠}^{٣}$ ق (س) . د س + $\int_{٣}^{\pi}$ ق (س) . د س = -٢ + -٣ = -٥

$\int_{٠}^{\pi}$ س جتا س . د س

افرض و = س ، د م = جتا س . د س

د و = د س ، م = جا س

$\int_{٠}^{\pi}$ س جتا س . د س = س جا س $\Big]_{٠}^{\pi}$ − $\int_{٠}^{\pi}$ جا س . د س

= (π جا π) − (٠ . جا ٠) + جتا س $\Big]_{٠}^{\pi}$ = جتا π − جتا ٠ = -٢

صفر

∴ $\int_{٠}^{\pi}$ (ق (س) − س جتا س) . د س = -٥ − -٢ = -٣

مثال إذا علمت أن : $\int$ س^{٣} هـ^{س} . د س = أ س^{٣} هـ^{س} + ب س^{٢} هـ^{س} + جـ س هـ^{س} + د هـ^{س} + ك

١ جد قيم الثوابت : أ ، ب ، جـ ، د

٢ جد $\int_{٠}^{١}$ س^{٣} هـ^{س} . د س

الحل ١ باشتقاق الطرفين

س^{٣} هـ^{س} = أ س^{٣} هـ^{س} + هـ^{س} (٣ أ س^{٢}) + ب س^{٢} هـ^{س} + هـ^{س} (٢ ب س) + جـ س هـ^{س} + جـ هـ^{س} + د هـ^{س}

← س^{٣} هـ^{س} = (أ س^{٣} + (٣ أ + ب) س^{٢} + (٢ ب + جـ) س + (جـ + د)) هـ^{س}

← أ = ١

٣ أ + ب = ٠ ← ب = -٣

٢ ب + جـ = ٠ ← جـ = ٦

جـ + د = ٠ ← د = -٦

٢ $\int_{٠}^{١}$ س^{٣} هـ^{س} . د س = (س^{٣} هـ^{س} − ٣ س^{٢} هـ^{س} + ٦ س هـ^{س} − ٦ هـ^{س}) $\Big|_{٠}^{١}$

= ((١)^{٣} هـ − ٣ (١)^{٢} هـ + ٦ (١) هـ − ٦ هـ) − ((٠)^{٣} هـ^{٠} − ٣ (٠)^{٢} هـ^{٠} + ٦ (٠) هـ^{٠} − ٦ هـ^{٠})

= − ٢ هـ + ٦

مثال إذا كان ق قابلا للاشتقاق ، $\int_{١}^{٢}$ ق (س) . د س = ٣ ، ق (١) = ٢ ، ق (٢) = -١ ، ق$'$ (١) = ٤ ، ق$'$ (٢) = -١ ، فجد $\int_{١}^{٢}$ س ق$'$ (س) . د س

الحل

افرض و = س ، د م = ق$'$ (س) . د س

د و = د س ، م = ق (س)

$\int_{١}^{٢}$ س ق$'$ (س) . د س = (س ق (س)) $\Big|_{١}^{٢}$ − $\int_{١}^{٢}$ ق (س) . د س

$= ٢ ق(٢) - ١ ق(١) - ٣ = -٧$

مثال إذا علمت أن: $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$ جتا ٢س . ق(س) . دس = ١٠ ، $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$ جا ٢س . قَ(س) . دس = ٤

فجد ق$(\frac{\pi}{4})$

الحل

افرض و = جا ٢س ، دم = قَ(س) . دس

دو = ٢ جتا ٢س . دس ، م = ق(س)

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\text{جا ٢س}}_{\text{و}} . \underbrace{\text{قَ(س) . دس}}_{\text{دم}}$ = جا ٢س . ق(س) $\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$ − ٢ $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$ جتا ٢س . ق(س) . دس = ٤

جا$(\frac{٢\pi}{٢})$ ق$(\frac{\pi}{٢})$ − جا$(\frac{٢\pi}{٤})$ ق$(\frac{\pi}{٤})$ − ٢٠ = ٤ ⟵ ق$(\frac{\pi}{٤})$ = −٢٤

مثال إذا كان $\int_{-١}^{٥}$ ق(س) . دس = ٤ ، ق(٥) = ٣ ، ق(−١) = ٤

فجد $\int_{٢}^{-١}$ س قَ(٣ − ٢س) . دس

الحل

ص = ٣ − ٢س

س = $\frac{٣ - ص}{٢}$

افرض ص = ٣ − ٢س ⟵ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = −٢ ⟵ دس = $\frac{\text{دص}}{-٢}$

عندما س = ٢ : ص = ٣ − ٢(٢) = −١ ، عندما س = −١ : ص = ٣ − ٢(−١) = ٥

$\int_{٢}^{-١}$ س قَ(٣ − ٢س) . دس = $\int_{-١}^{٥}$ $\frac{٣ - ص}{٢}$. قَ(ص) . $\frac{\text{دص}}{-٢}$ = $\frac{-١}{٤}\int_{-١}^{٥}$ (٣ − ص) قَ(ص) . دص

افرض و = ٣ − ص ، دم = قَ(ص) . دص

دو = −دص ، م = ق(ص)

$\frac{-١}{٤}\int_{-١}^{٥}$ (٣ − ص) قَ(ص) . دص = $\frac{-١}{٤}$ ((٣ − ص) ق(ص)) $\Big|_{-١}^{٥}$ − $\int_{-١}^{٥}$ ق(ص) . −دص)

= $\frac{-١}{٤}$ ((٣ − ٥) ق(٥) − (٣ − −١) ق(−١) + ٤) = $\frac{٩}{٢}$

مثال يتحرك جسيم على محور السينات بسرعة مقدارها ع(ن) = ن^{٢} هـ$^{-ن}$

احسب المسافة الكلية التي يقطعها الجسيم في الفترة الزمنية [٠ ، ٥]

الحل

المسافة الكلية = $\int_{٠}^{٥}$ |ن^{٢} هـ$^{-ن}$| . دن = $\int_{٠}^{٥}$ ن^{٢} هـ$^{-ن}$. دن

افرض ق = ن^{٢} ، دم = هـ$^{-ن}$. دن

دق = ٢ن . دن ، م = −هـ$^{-ن}$

$\int$ ن^{٢} هـ$^{-ن}$. دن = −ن^{٢} هـ$^{-ن}$ − $\int$ −هـ$^{-ن}$. ٢ن . دن = −ن^{٢} هـ$^{-ن}$ + ٢ $\int$ ن هـ$^{-ن}$. دن

افرض و = ن ، دل = هـ$^{-ن}$. دن

دو = دن ، ل = −هـ$^{-ن}$

$\int$ ن^{٢} هـ$^{-ن}$. دن = −ن^{٢} هـ$^{-ن}$ + ٢(−ن هـ$^{-ن}$ − $\int$ −هـ$^{-ن}$. دن)

$$\int_{0}^{5} ن^2 هـ^{-ن} \, دن = \left(-ن^2 هـ^{-ن} + 2(-ن هـ^{-ن} - هـ^{-ن})\right)\Big|_{0}^{5}$$

$$= -(5)^2 هـ^{-5} + 2(-5 هـ^{-5} - هـ^{-5}) - \left(-(0)^2 هـ^{0} + 2(0 هـ^{0} - هـ^{0})\right)$$

$= -37 هـ^{-5} + 2$ وحدة مسافة

مثال إذا كان ق قابلا للاشتقاق على ح ، ق(2) = 13 ، ن > 0

وكان $\int_{0}^{2} س^{ن-1} (س ق'(س) + ن ق(س)) \, دس = 208$ ، فجد قيمة ن .

الحل

$$\int_{0}^{2} س^{ن-1} (س ق'(س) + ن ق(س)) \, دس = \int_{0}^{2} س^{ن} ق'(س) \, دس + ن \int_{0}^{2} س^{ن-1} ق(س) \, دس$$

افرض و = $س^{ن}$ ، دم = ق′(س) . دس

دو = ن $س^{ن-1}$. دس ، م = ق(س)

$$= (س^{ن} ق(س))\Big|_{0}^{2} - \int_{0}^{2} ق(س) . ن س^{ن-1} . دس + ن \int_{0}^{2} س^{ن-1} ق(س) . دس = 208$$

$\longrightarrow (2)^{ن} ق(2) - (0)^{ن} ق(0) = 208 \longrightarrow (2)^{ن} = 16 \longrightarrow ن = 4$

مثال إذا كان ق″(س) متصلا على [0 ، 1] وكان ق′(1) = 2ق(1)

فجد $\int_{0}^{1} س^2 ق''(س) . دس$ بدلالة $أ = \int_{0}^{1} ق(س) . دس$

الحل

افرض و = $س^2$ ، دم = ق″(س) . دس

دو = 2س . دس ، م = ق′(س)

$$\int س^2 ق''(س) . دس = س^2 ق'(س) - \int 2س ق'(س) . دس$$

افرض ن = 2 س ، دل = ق′(س) . دس

دن = 2 . دس ، ل = ق(س)

$$\int س^2 ق''(س) . دس = س^2 ق'(س) - \left(2س ق(س) - 2\int ق(س) . دس\right)$$

$$\int_{0}^{1} س^2 ق''(س) . دس = (س^2 ق'(س))\Big|_{0}^{1} - \left((2س ق(س))\Big|_{0}^{1} - 2\int_{0}^{1} ق(س) . دس\right)$$

$$= \left((1)^2 ق'(1) - (0)^2 ق'(0)\right) - \left(2(1) ق(1) - 2(0) ق(0) - 2أ\right) = 2أ$$

مثال بالاستعانة بالجدول المجاور ، وإذا علمت أن كلا من ق ، هـ قابل للاشتقاق مرتين

فجد $\int_{-1}^{1} (هـ'(س) - س ق''(س)) . دس$

الحل

افرض و = س ، دم = ق″(س) . دس

دو = دس ، م = ق′(س)

س	ق	ق′	هـ	هـ′
-1	1	-3	-2	1
0	2	-1	3	9
1	4	-2	-10	6

$$\int \left(\text{هـَ}(\text{س}) - \text{س}\ \text{قَ}''(\text{س})\right).\text{د س} = \text{هـ}(\text{س}) - \left(\text{س}\ \text{قَ}(\text{س}) - \int \text{قَ}(\text{س}).\text{د س}\right)$$

$$\int_{-1}^{1} \left(\text{هـَ}(\text{س}) - \text{س}\ \text{قَ}''(\text{س})\right).\text{د س} = \left(\text{هـ}(\text{س}) - (\text{س}\ \text{قَ}(\text{س}) - \text{ق}(\text{س}))\right)\Big|_{-1}^{1}$$

$$= \left(\text{هـ}(1) - (1\ \text{قَ}(1) - \text{ق}(1))\right) - \left(\text{هـ}(-1) - (-1\ \text{قَ}(-1) - \text{ق}(-1))\right) = \text{صفرا}$$

مثال إذا كان ق قابلا للاشتقاق مرتين ، $\text{ق}(0) = 3$ ، $\text{قَ}(0) = -5$ ، $\text{قَ}''(0) = 2$ ، $\text{ق}(1) = 7$ ، $\text{قَ}(1) = 4$ ، $\text{قَ}''(1) = -1$ ، فجد $\int_{0}^{1} \text{س}\left(\text{ق}(\text{س})\ \text{قَ}''(\text{س}) + (\text{قَ}(\text{س}))^2\right).\text{د س}$

الحل

$$\int \text{س}\left(\text{ق}(\text{س})\ \text{قَ}''(\text{س}) + (\text{قَ}(\text{س}))^2\right).\text{د س} = \int \text{س}\ \text{ق}(\text{س})\ \text{قَ}''(\text{س}).\text{د س} + \int \text{س}\left(\text{قَ}(\text{س})\right)^2.\text{د س}$$

افرض $\text{و} = \text{س}\ \text{ق}(\text{س})$ ، $\text{د م} = \text{قَ}''(\text{س}).\text{د س}$

$\text{د و} = (\text{س}\ \text{قَ}(\text{س}) + \text{ق}(\text{س})).\text{د س}$ ، $\text{م} = \text{قَ}(\text{س})$

$$= \text{س}\ \text{ق}(\text{س})\ \text{قَ}(\text{س}) - \int \left(\text{س}(\text{قَ}(\text{س}))^2 + \text{ق}(\text{س})\ \text{قَ}(\text{س})\right).\text{د س} + \int \text{س}\left(\text{قَ}(\text{س})\right)^2.\text{د س}$$

$$= \text{س}\ \text{ق}(\text{س})\ \text{قَ}(\text{س}) - \int \text{ق}(\text{س})\ \text{قَ}(\text{س}).\text{د س}$$

افرض $\text{ص} = \text{ق}(\text{س}) \longrightarrow \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{قَ}(\text{س}) \longrightarrow \text{د س} = \frac{\text{د ص}}{\text{قَ}(\text{س})}$

$$\int \text{ق}(\text{س})\ \text{قَ}(\text{س}).\text{د س} = \int \text{ص}\ \text{قَ}(\text{س}) \frac{\text{د ص}}{\text{قَ}(\text{س})} = \frac{\text{ص}^2}{2} = \frac{(\text{ق}(\text{س}))^2}{2}$$

$$\int_{0}^{1} \text{س}\left(\text{ق}(\text{س})\ \text{قَ}''(\text{س}) + (\text{قَ}(\text{س}))^2\right).\text{د س} = \text{س}\ \text{ق}(\text{س})\ \text{قَ}(\text{س}) - \frac{(\text{ق}(\text{س}))^2}{2}\Big|_{0}^{1}$$

$$= \left(1\ \text{ق}(1)\ \text{قَ}(1) - \frac{(\text{ق}(1))^2}{2}\right) - \left(0\ \text{ق}(0)\ \text{قَ}(0) - \frac{(\text{ق}(0))^2}{2}\right) = 8$$

نستطيع أن نستخدم قاعدة التكامل بالأجزاء للحصول على بعض قواعد الاختزال فإذا كان المُكامل على هيئة تعبير ذي أس (ن) فإن التكامل بالأجزاء يحوله إلى تكامل اخر ذي أس أقل من ن .

مثال إذا كان $\text{ع}_{\text{ن}} = \int (\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^{\text{ن}}.\text{د س}$ ، $\text{ن} \in \text{ط}$ ، فاثبت أن $\text{ع}_{\text{ن}} = \text{س}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^{\text{ن}} - \text{ن}\ \text{ع}_{\text{ن}-1}$

الحل

افرض $\text{ق} = (\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^{\text{ن}}$ ، $\text{د م} = \text{د س}$

$\text{د ق} = \text{ن}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^{\text{ن}-1}.\frac{1}{\text{س}}.\text{د س}$ ، $\text{م} = \text{س}$

$$\text{ع}_{\text{ن}} = \text{س}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^{\text{ن}} - \int \text{س}.\text{ن}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^{\text{ن}-1}.\frac{1}{\text{س}}.\text{د س}$$

$$= \text{س}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^{\text{ن}} - \text{ن}\int (\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^{\text{ن}-1}.\text{د س} = \text{س}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^{\text{ن}} - \text{ن}\ \text{ع}_{\text{ن}-1}$$

مثال إذا كان $\text{ع}_{\text{ن}} = \int \text{س}^{\text{أ}} (\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^{\text{ن}} . \text{دس}$ ، ن ∈ ط ، أ ≠ - ١

فاثبت أن $\text{ع}_{\text{ن}} = \frac{\text{س}^{\text{أ}+١}}{\text{أ}+١} (\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^{\text{ن}} - \frac{\text{ن}}{\text{أ}+١} \text{ع}_{\text{ن}-١}$

الحل

افرض $\text{ق} = (\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^{\text{ن}}$ ، $\text{دم} = \text{س}^{\text{أ}} . \text{دس}$

$\text{دق} = \text{ن} (\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^{\text{ن}-١} . \frac{١}{\text{س}} . \text{دس}$ ، $\text{م} = \frac{\text{س}^{\text{أ}+١}}{\text{أ}+١}$

$$\text{ع}_{\text{ن}} = \frac{\text{س}^{\text{أ}+١}}{\text{أ}+١} (\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^{\text{ن}} - \int \frac{\text{س}^{\text{أ}+١}}{\text{أ}+١} . \text{ن} (\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^{\text{ن}-١} . \frac{١}{\text{س}} . \text{دس}$$

$$= \frac{\text{س}^{\text{أ}+١}}{\text{أ}+١} (\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^{\text{ن}} - \frac{\text{ن}}{\text{أ}+١} \int \text{س}^{\text{أ}} (\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^{\text{ن}-١} . \text{دس} = \frac{\text{س}^{\text{أ}+١}}{\text{أ}+١} (\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^{\text{ن}} - \frac{\text{ن}}{\text{أ}+١} \text{ع}_{\text{ن}-١}$$

مثال إذا كان $\text{ع}_{\text{ن}} = \int \text{س}^{\text{ن}} \text{هـ}^{\text{س}} . \text{دس}$ ، ن ∈ ط ، فاثبت أن $\text{ع}_{\text{ن}} = \text{س}^{\text{ن}} \text{هـ}^{\text{س}} - \text{ن} \, \text{ع}_{\text{ن}-١}$

الحل

افرض $\text{ق} = \text{س}^{\text{ن}}$ ، $\text{دم} = \text{هـ}^{\text{س}} . \text{دس}$

$\text{دق} = \text{ن} \, \text{س}^{\text{ن}-١} . \text{دس}$ ، $\text{م} = \text{هـ}^{\text{س}}$

$$\text{ع}_{\text{ن}} = \text{س}^{\text{ن}} \text{هـ}^{\text{س}} - \int \text{هـ}^{\text{س}} . \text{ن} \, \text{س}^{\text{ن}-١} . \text{دس} = \text{س}^{\text{ن}} \text{هـ}^{\text{س}} - \text{ن} \int \text{هـ}^{\text{س}} \text{س}^{\text{ن}-١} . \text{دس}$$

$$= \text{س}^{\text{ن}} \text{هـ}^{\text{س}} - \text{ن} \, \text{ع}_{\text{ن}-١}$$

مثال إذا كان $\text{ع}_{\text{ن}} = \int \text{قا}^{\text{ن}}\text{س} . \text{دس}$ ، ن ∈ ط ، ن > ١ ،

فاثبت أن $\text{ع}_{\text{ن}} = \frac{١}{\text{ن}-١} \text{قا}^{\text{ن}-٢}\text{س} \; \text{ظاس} + \frac{\text{ن}-٢}{\text{ن}-١} \text{ع}_{\text{ن}-٢}$

الحل

$$\text{ع}_{\text{ن}} = \int \text{قا}^{\text{ن}}\text{س} . \text{دس} = \int \text{قا}^{\text{ن}-٢}\text{س} \; \text{قا}^{٢}\text{س} . \text{دس}$$

افرض $\text{ق} = \text{قا}^{\text{ن}-٢}\text{س}$ ، $\text{دم} = \text{قا}^{٢}\text{س} . \text{دس}$

$\text{دق} = (\text{ن}-٢) \, \text{قا}^{\text{ن}-٣}\text{س} \; \text{قاس} \; \text{ظاس} . \text{دس}$ ، $\text{م} = \text{ظاس}$

$\text{دق} = (\text{ن}-٢) \, \text{قا}^{\text{ن}-٢}\text{س} \; \text{ظاس} . \text{دس}$

$$\text{ع}_{\text{ن}} = \text{ظاس} \; \text{قا}^{\text{ن}-٢}\text{س} - (\text{ن}-٢) \int \text{قا}^{\text{ن}-٢}\text{س} \; \text{ظا}^{٢}\text{س} . \text{دس}$$

$$= \text{ظاس} \; \text{قا}^{\text{ن}-٢}\text{س} - (\text{ن}-٢) \int \text{قا}^{\text{ن}-٢}\text{س} \; (\text{قا}^{٢}\text{س} - ١) . \text{دس}$$

$$= \text{ظاس} \; \text{قا}^{\text{ن}-٢}\text{س} + (\text{ن}-٢) \int \text{قا}^{\text{ن}-٢}\text{س} . \text{دس} - (\text{ن}-٢) \int \text{قا}^{\text{ن}}\text{س} . \text{دس}$$

($\int \text{قا}^{\text{ن}}\text{س} . \text{دس}$ ← $\text{ع}_{\text{ن}}$)

$$\leftarrow (١ + (\text{ن}-٢)) \text{ع}_{\text{ن}} = \text{ظاس} \; \text{قا}^{\text{ن}-٢}\text{س} + (\text{ن}-٢) \int \text{قا}^{\text{ن}-٢}\text{س} . \text{دس}$$

($\int \text{قا}^{\text{ن}-٢}\text{س} . \text{دس}$ ← $\text{ع}_{\text{ن}-٢}$)

$$\leftarrow \text{ع}_{\text{ن}} = \frac{١}{\text{ن}-١} \text{قا}^{\text{ن}-٢}\text{س} \; \text{ظاس} + \frac{\text{ن}-٢}{\text{ن}-١} \text{ع}_{\text{ن}-٢}$$

مثال إذا كان $\text{ع}_{\text{ن}} = \int \text{ظا}^{\text{ن}}\text{س} . \text{دس}$ ، ن ∈ ط ، ن > ١ ،

فاثبت أن $\text{ع}_{\text{ن}} = \frac{١}{\text{ن}-١} \text{ظا}^{\text{ن}-١}\text{س} - \text{ع}_{\text{ن}-٢}$

الحل ع$_{ن}$ = $\int$ ظا^{ن}س . د س = $\int$ ظا$^{ن-٢}$س ظا^{٢}س . د س = $\int$ ظا$^{ن-٢}$س (قا^{٢}س − ١) . د س

= $\int$ ظا$^{ن-٢}$س قا^{٢}س . د س − $\int$ ظا$^{ن-٢}$س . د س

افرض ص = ظا س

$\frac{د ص}{د س}$ = قا^{٢}س ⟵ د س = $\frac{د ص}{قا^{٢}س}$

$\int$ ظا$^{ن-٢}$س قا^{٢}س . د س = $\int$ ص$^{ن-٢}$ قا^{٢}س $\frac{د ص}{قا^{٢}س}$ = $\int$ ص$^{ن-٢}$. د ص = $\frac{ص^{ن-١}}{ن-١}$ = $\frac{ظا^{ن-١}س}{ن-١}$

∴ ع$_{ن}$ = $\frac{ظا^{ن-١}س}{ن-١}$ − $\int$ ظا$^{ن-٢}$س . د س = $\frac{١}{ن-١}$ ظا$^{ن-١}$س − ع$_{ن-٢}$

مثال إذا كان ع$_{ن}$ = $\int$ جتا^{ن}س . د س ، ن ∈ ط ، ن ≥ ٢

فاثبت أن ع$_{ن}$ = $\frac{١}{ن}$ جتا$^{ن-١}$س.جا س + $\frac{ن-١}{ن}$ ع$_{ن-٢}$

الحل ع$_{ن}$ = $\int$ جتا^{ن}س . د س = $\int$ جتا$^{ن-١}$س.جتا س . د س

افرض ق = جتا$^{ن-١}$س ، د م = جتا س . د س

د ق = (ن − ١) جتا$^{ن-٢}$س . -جا س . د س ، م = جا س

ع$_{ن}$ = جتا$^{ن-١}$س .جا س − $\int$ جا س.(ن − ١) جتا$^{ن-٢}$س . -جا س . د س

= جتا$^{ن-١}$س .جا س + (ن − ١) $\int$ جتا$^{ن-٢}$س (١ − جتا^{٢}س) . د س

= جتا$^{ن-١}$س جا س + (ن − ١) $\int$ جتا$^{ن-٢}$س . د س − (ن − ١) $\int$ جتا^{ن}س . د س ← ع$_{ن}$

⟵ (١ + (ن − ١)) ع$_{ن}$ = جتا$^{ن-١}$س .جا س + (ن − ١) $\int$ جتا$^{ن-٢}$س . د س ← ع$_{ن-٢}$

⟵ ع$_{ن}$ = $\frac{١}{ن}$ جتا$^{ن-١}$س.جا س + $\frac{ن-١}{ن}$ ع$_{ن-٢}$

مثال إذا كان ع$_{ن}$ = $\int$ س^{ن}جا س . د س ، ن ∈ ط ، ن ≥ ٢

فاثبت أن ع$_{ن}$ = − س^{ن}جتا س + ن س$^{ن-١}$ جا س − ن (ن − ١) ع$_{ن-٢}$

الحل

افرض ق = س^{ن} ، د م = جا س . د س

د ق = ن س$^{ن-١}$. د س ، م = -جتا س

ع$_{ن}$ = -س^{ن} جتا س − $\int$ ن س$^{ن-١}$. -جتا س . د س

افرض و = ن س$^{ن-١}$ ، د ل = جتا س . د س

د و = ن (ن − ١) س$^{ن-٢}$. د س ، ل = جا س

ع$_{ن}$ = -س^{ن}جتا س + ن س$^{ن-١}$ جا س − ن (ن − ١) $\int$ جا س س$^{ن-٢}$. د س

= − س^{ن}جتا س + ن س$^{ن-١}$ جا س − ن (ن − ١) ع$_{ن-٢}$

تكامل اقترانات مثلثية مضروبة ببعضها أو مرفوعة لأس

١ حساب التكامل $\int$ جا^{م}س جتا^{ن}س . د س

(أ) الحالة الأولى : أحد الأسين م أو ن فرديا موجبا >١ , ولنفرض أنه العدد م .

← م – ١ عدد زوجي ← م – ١ = ٢ أ باستعمال عدد طبيعي أ .

وبناء على ذلك فإن : $\int$ جا^{م}س جتا^{ن}س . د س = $\int$ جا$^{م-١}$س جتا^{ن}س جا س . د س

= $\int$ (جا^{٢}س)^{أ} جتا^{ن}س جا س . د س

= $\int$ (١ – جتا^{٢}س)^{أ} جتا^{ن}س جا س . د س

= $\int$ (١ – ص^{٢})^{أ} ص^{ن} . د ص

حيث نحصل على الصيغة الأخيرة باستخدام التعويض ص = جتا س

- وإذا كان ن عددا فرديا موجبا > ١ وباستخدام أسلوب مشابه مع وضع ص = جا س

نحصل على : $\int$ جا^{م}س جتا^{ن}س . د س = $\int$ جا^{م}س جتا$^{ن-١}$س جتا س . د س

= $\int$ جا^{م}س (جتا^{٢}س)^{أ} جتا س . د س

= $\int$ جا^{م}س (١ – جا^{٢}س)^{أ} جتا س . د س

= $\int$ ص^{م} (١ – ص^{٢})^{أ} . د ص

(ب) الحالة الثانية عندما يكون كلا العددين م و ن زوجيا موجبا .

نستخدم في هذه الحالة المتطابقتين :

جتا^{٢}س = $\frac{١}{٢}$ (١ + جتا ٢س)	جا^{٢}س = $\frac{١}{٢}$ (١ – جتا ٢س)

من أجل تنقيص أس كل من اقتراني الجيب والجتا . ونكرر هذه العملية إذا احتجنا إلى ذلك إلى أن نصل إلى صيغة يمكن تكاملها بالقواعد المتوفرة لدينا .

٢ حساب التكامل $\int$ ظا^{م}س قا^{ن}س . د س

(أ)	ن زوجي موجب	▪ اكتب قا^{ن}س = قا$^{ن-٢}$س قا^{٢}س ▪ استخدم المتطابقة قا^{٢}س = ظا^{٢}س + ١ ▪ افرض ص = ظا س
(ب)	م فردي موجب أكبر من ١	▪ اكتب ظا^{م}س قا^{ن}س = ظا$^{م-١}$س قا$^{ن-١}$س ظا س قا س ▪ استخدم المتطابقة ظا^{٢}س = قا^{٢}س – ١ ▪ افرض ص = قا س

* وبنفس الطريقة وباستخدام المتطابقة ١ + ظتا^{٢}س = قتا^{٢}س نحسب التكامل $\int$ ظتا^{م}س قتا^{ن}س . د س

مثال جد $\int$ جا^{٤}س جتا^{٥}س . د س

الحل في هذا المثال م = ٤ ، ن = ٥

$\int$ جا^{٤}س جتا^{٥}س . د س = $\int$ جا^{٤}س جتا^{٤}س . جتا س . د س = $\int$ جا^{٤}س (١ − جا^{٢}س)^{٢} جتا س . د س

افرض ص = جا س

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = جتا س ⟵ د س = $\frac{\text{د ص}}{\text{جتا س}}$

= $\int$ ص^{٤} (١ − ص^{٢})^{٢} جتا س . $\frac{\text{د ص}}{\text{جتا س}}$ = $\int$ (ص^{٤} − ٢ص^{٦} + ص^{٨}) . د ص

= $\frac{١}{٥}$ ص^{٥} − $\frac{٢}{٧}$ ص^{٧} + $\frac{١}{٩}$ ص^{٩} + جـ = $\frac{١}{٥}$ جا^{٥}س − $\frac{٢}{٧}$ جا^{٧}س + $\frac{١}{٩}$ جا^{٩}س + جـ

مثال جد $\int$ جا^{٣}س جتا^{٥}س . د س

الحل في هذا المثال م = ٣ ، ن = ٥

$\int$ جا^{٣}س جتا^{٥}س . د س = $\int$ جا^{٢}س جا س جتا^{٥}س . د س = $\int$ (١ − جتا^{٢}س) جا س جتا^{٥}س . د س

افرض ص = جتا س

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = - جا س ⟵ د س = $\frac{-\text{د ص}}{\text{جا س}}$

= $\int$ (١ − ص^{٢}) جا س . ص^{٥}. $\frac{-\text{د ص}}{\text{جا س}}$ = $\int$ (ص^{٧} − ص^{٥}) . د ص = $\frac{١}{٨}$ ص^{٨} − $\frac{١}{٦}$ ص^{٦} + جـ

= $\frac{١}{٨}$ جتا^{٨}س − $\frac{١}{٦}$ جتا^{٦}س + جـ

مثال جد $\int$ جتا^{٧}س . د س

الحل في هذا المثال م = ٠ ، ن = ٧

$\int$ جتا^{٧}س . د س = $\int$ جتا^{٦}س جتا س . د س = $\int$ (١ − جا^{٢}س)^{٣} جتا س . د س

افرض ص = جا س

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = جتا س ⟵ د س = $\frac{\text{د ص}}{\text{جتا س}}$

= $\int$ (١ − ص^{٢})^{٣} جتا س . $\frac{\text{د ص}}{\text{جتا س}}$ = $\int$ (١ − ٣ص^{٢} + ٣ص^{٤} − ص^{٦}). د ص

= ص − ص^{٣} + $\frac{٣}{٥}$ ص^{٥} − $\frac{١}{٧}$ ص^{٧} + جـ

= جا س − جا^{٣}س + $\frac{٣}{٥}$ جا^{٥}س − $\frac{١}{٧}$ جا^{٧}س + جـ

مثال جد $\int$ جا^{٤}س جتا^{٢}س . د س

الحل في هذا المثال م = ٤ ، ن = ٢

$\int$ جا^{٤}س جتا^{٢}س . د س = $\int$ (جا^{٢}س)^{٢} (جتا^{٢}س) . د س

= $\int$ ($\frac{١}{٢}$ (١ − جتا ٢س))^{٢} ($\frac{١}{٢}$ (١ + جتا ٢س)) . د س

$= \frac{1}{8} \int (1 - \text{جتا } 2\text{س})^2 (1 + \text{جتا } 2\text{س}) \text{ . د س}$

$= \frac{1}{8} \int (1 - \text{جتا } 2\text{س} - \text{جتا}^2 2\text{س} + \text{جتا}^3 2\text{س}) \text{ . د س}$

$= \frac{1}{8} \int (1 - \text{جتا } 2\text{س} - \frac{1}{2}(1 + \text{جتا } 4\text{س}) + \text{جتا}^3 2\text{س}) \text{ . د س}$

$\int \text{جتا}^3 2\text{س . د س} = \int \text{جتا}^2 2\text{س جتا} 2\text{س . د س} = \int (1 - \text{جا}^2 2\text{س}) \text{ جتا} 2\text{س . د س}$

افرض $\text{ص} = \text{جا } 2\text{س}$

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = 2\text{ جتا} 2\text{س} \longrightarrow \text{د س} = \frac{\text{د ص}}{2\text{ جتا} 2\text{س}}$

$= \int (1 - \text{ص}^2) \text{ جتا} 2\text{س} . \frac{\text{د ص}}{2\text{ جتا} 2\text{س}} = \frac{1}{2} \int (1 - \text{ص}^2) \text{ . د ص}$

$= \frac{1}{2}\text{ص} - \frac{1}{6}\text{ص}^3 = \frac{1}{2}\text{ جا } 2\text{س} - \frac{1}{6}\text{ جا}^3 2\text{س}$

$= \frac{1}{8} (\text{س} - \frac{1}{2}\text{ جا } 2\text{س} - \frac{1}{2}\text{ س} - \frac{1}{8}\text{ جا } 4\text{س} + \frac{1}{2}\text{ جا } 2\text{س} - \frac{1}{6}\text{ جا}^3 2\text{س}) + \text{جـ}$

$= \frac{1}{8} (\frac{1}{2}\text{ س} - \frac{1}{8}\text{ جا } 4\text{س} - \frac{1}{6}\text{ جا}^3 2\text{س}) + \text{جـ}$

مثال جد $\int \frac{\text{جا}^5\text{س}}{\sqrt{\text{جتا س}}} \text{ . د س}$

الحل

في هذا المثال $\text{م} = 5$ ، $\text{ن} = \frac{-1}{2}$

$\int \frac{\text{جا}^5\text{س}}{\sqrt{\text{جتا س}}} \text{ . د س} = \int \frac{\text{جا}^4\text{س}}{\sqrt{\text{جتا س}}} \text{ جا س . د س} = \int \frac{(1 - \text{جتا}^2\text{س})^2}{\sqrt{\text{جتا س}}} \text{ جا س . د س}$

افرض $\text{ص} = \text{جتا س}$

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = -\text{جا س} \longrightarrow \text{د س} = \frac{-\text{د ص}}{\text{جا س}}$

$= \int \frac{(1 - \text{ص}^2)^2}{\sqrt{\text{ص}}} \text{ جا س} . \frac{-\text{د ص}}{\text{جا س}} = - \int \frac{\text{ص}^4 - 2\text{ص}^2 + 1}{\sqrt{\text{ص}}} \text{ . د ص}$

$= - \int (\text{ص}^{\frac{7}{2}} - 2\text{ص}^{\frac{3}{2}} + \text{ص}^{\frac{-1}{2}}) \text{ . د ص}$

$= \frac{-2}{9}\text{ص}^{\frac{9}{2}} + \frac{4}{5}\text{ص}^{\frac{5}{2}} - 2\text{ص}^{\frac{1}{2}} + \text{جـ} = \frac{-2}{9}(\text{جتا س})^{\frac{9}{2}} + \frac{4}{5}(\text{جتا س})^{\frac{5}{2}} - 2(\text{جتا س})^{\frac{1}{2}} + \text{جـ}$

مثال جد $\int \text{ظا}^5\text{س قا}^4\text{س . د س}$

الحل

في هذا المثال $\text{م} = 5$ ، $\text{ن} = 4$

$\int \text{ظا}^5\text{س قا}^4\text{س . د س} = \int \text{ظا}^5\text{س قا}^2\text{س قا}^2\text{س . د س} = \int \text{ظا}^5\text{س} (\text{ظا}^2\text{س} + 1) \text{ قا}^2\text{س . د س}$

افرض $\text{ص} = \text{ظا س} \longrightarrow \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{قا}^2\text{س} \longrightarrow \text{د س} = \frac{\text{د ص}}{\text{قا}^2\text{س}}$

$$= \int \text{ص}^{٥} (\text{ص}^{٢} + ١)\ \text{قا}^{٢}\text{س} \cdot \frac{\text{د ص}}{\text{قا}^{٢}\text{س}} = \int (\text{ص}^{٧} + \text{ص}^{٥}) \cdot \text{د ص} = \frac{١}{٨}\ \text{ص}^{٨} + \frac{١}{٦}\ \text{ص}^{٦} + \text{جـ}$$

$$= \frac{١}{٨}\ \text{ظا}^{٨}\text{س} + \frac{١}{٦}\ \text{ظا}^{٦}\text{س} + \text{جـ}$$

مثال جد $\int \text{ظا}^{٥}\text{س}\ \text{قا}^{٣}\text{س} \cdot \text{د س}$

الحل في هذا المثال م = ٥ ، ن = ٣

$$\int \text{ظا}^{٥}\text{س}\ \text{قا}^{٣}\text{س} \cdot \text{د س} = \int \text{ظا}^{٤}\text{س}\ \text{قا}^{٢}\text{س}\ \text{ظا س}\ \text{قا س} \cdot \text{د س}$$

$$= \int (\text{قا}^{٢}\text{س} - ١)^{٢}\ \text{قا}^{٢}\text{س}\ \text{ظا س}\ \text{قا س} \cdot \text{د س}$$

افرض ص = قا س ⟵ $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = قا س ظا س ⟵ د س = $\frac{\text{د ص}}{\text{قا س ظا س}}$

$$= \int (\text{ص}^{٢} - ١)^{٢}\ \text{ص}^{٢}\ \text{ظا س}\ \text{قا س} \cdot \frac{\text{د ص}}{\text{قا س ظا س}} = \int (\text{ص}^{٦} - ٢\ \text{ص}^{٤} + \text{ص}^{٢}) \cdot \text{د ص}$$

$$= \frac{١}{٧}\ \text{ص}^{٧} - \frac{٢}{٥}\ \text{ص}^{٥} + \frac{١}{٣}\ \text{ص}^{٣} + \text{جـ} = \frac{١}{٧}\ \text{قا}^{٧}\text{س} - \frac{٢}{٥}\ \text{قا}^{٥}\text{س} + \frac{١}{٣}\ \text{قا}^{٣}\text{س} + \text{جـ}$$

مثال جد $\int \text{قا}^{٦}\text{س} \cdot \text{د س}$

الحل في هذا المثال م = ٠ ، ن = ٦

$$\int \text{قا}^{٦}\text{س} \cdot \text{د س} = \int \text{قا}^{٤}\text{س}\ \text{قا}^{٢}\text{س} \cdot \text{د س} = \int (\text{ظا}^{٢}\text{س} + ١)^{٢}\ \text{قا}^{٢}\text{س} \cdot \text{د س}$$

افرض ص = ظا س ⟵ $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = قا^{٢}س ⟵ د س = $\frac{\text{د ص}}{\text{قا}^{٢}\text{س}}$

$$= \int (\text{ص}^{٢} + ١)^{٢}\ \text{قا}^{٢}\text{س} \cdot \frac{\text{د ص}}{\text{قا}^{٢}\text{س}} = \int (\text{ص}^{٤} + ٢\ \text{ص}^{٢} + ١) \cdot \text{د ص}$$

$$= \frac{١}{٥}\ \text{ص}^{٥} + \frac{٢}{٣}\ \text{ص}^{٣} + \text{ص} + \text{جـ} = \frac{١}{٥}\ \text{ظا}^{٥}\text{س} + \frac{٢}{٣}\ \text{ظا}^{٣}\text{س} + \text{ظا س} + \text{جـ}$$

مثال جد $\int (\text{ظا س})^{\frac{٣}{٢}}\ \text{قا}^{٤}\text{س} \cdot \text{د س}$

الحل في هذا المثال م = $\frac{٣}{٢}$ ، ن = ٤

$$\int (\text{ظا س})^{\frac{٣}{٢}}\ \text{قا}^{٤}\text{س} \cdot \text{د س} = \int (\text{ظا س})^{\frac{٣}{٢}}\ \text{قا}^{٢}\text{س}\ \text{قا}^{٢}\text{س} \cdot \text{د س}$$

$$= \int (\text{ظا س})^{\frac{٣}{٢}} (\text{ظا}^{٢}\text{س} + ١)\ \text{قا}^{٢}\text{س} \cdot \text{د س}$$

افرض ص = ظا س ⟵ $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = قا^{٢}س ⟵ د س = $\frac{\text{د ص}}{\text{قا}^{٢}\text{س}}$

$$= \int \text{ص}^{\frac{٣}{٢}} (\text{ص}^{٢} + ١)\ \text{قا}^{٢}\text{س} \cdot \frac{\text{د ص}}{\text{قا}^{٢}\text{س}} = \int (\text{ص}^{\frac{٧}{٢}} + \text{ص}^{\frac{٣}{٢}}) \cdot \text{د ص}$$

$$= \frac{٢}{٩}\ \text{ص}^{\frac{٩}{٢}} + \frac{٢}{٥}\ \text{ص}^{\frac{٥}{٢}} + \text{جـ} = \frac{٢}{٩}\ (\text{ظا س})^{\frac{٩}{٢}} + \frac{٢}{٥}\ (\text{ظا س})^{\frac{٥}{٢}} + \text{جـ}$$

المعادلات التفاضلية

تعريف المعادلة التفاضلية : هي معادلة تحتوي على مشتقات أو تفاضلات .

تعريف حل المعادلة التفاضلية : إيجاد علاقة تربط بين المتغيرات بحيث لا تحتوي هذه العلاقة على مشتقات أو تفاضلات على أن تحقق هذه العلاقة المعادلة التفاضلية والشروط المفروضة عليها .

و يكون الحل : عاما « إذا احتوى ثوابتا « جـ » . و خاصا « إذا لم يحتو ثوابتا «جـ » .

المعادلة التفاضلية القابلة للفصل

تعريف : المعادلة التفاضلية التي يمكن كتابتها على الصورة هـ (ص) $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = ل (س)

تسمى معادلة تفاضلية قابلة للفصل . وتحل هذه المعادلة بفصل كل متغير مع تفاضلته

فتصبح المعادلة على الصورة : هـ (ص) . د ص = ل (س) . د س

وبعد ذلك يكامل الطرفين الأيسر والأيمن ، وبالرموز $\int$ هـ (ص) . د ص = $\int$ ل (س) . د س

مثال جد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية : $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{\text{ص}}{\text{س} - ١} + \frac{١}{\text{س} - ١}$

الذي يحقق الشرط : ص = ٠ عندما س = ٠ « اكتب الجواب على الصورة ص = ق (س) »

الحل $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{\text{ص}}{\text{س} - ١} + \frac{١}{\text{س} - ١} \longleftarrow \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{\text{ص} + ١}{\text{س} - ١} \longleftarrow \frac{\text{د ص}}{\text{ص} + ١} = \frac{\text{د س}}{\text{س} - ١}$

$\longleftarrow \int \frac{\text{د ص}}{\text{ص} + ١} = \int \frac{\text{د س}}{\text{س} - ١} \longleftarrow$ لـو$_{\text{هـ}}$ |ص + ١| = لـو$_{\text{هـ}}$ |س − ١| + جـ

جد قيمة جـ :

ص = ٠ عندما س = ٠ ⟵ لـو$_{\text{هـ}}$ |٠ + ١| = لـو$_{\text{هـ}}$ |٠ − ١| + جـ ⟵ جـ = ٠

∴ لـو$_{\text{هـ}}$ |ص + ١| = لـو$_{\text{هـ}}$ |س − ١|

|ص + ١| = |س − ١| ⟵ ~~ص + ١ = س − ١~~ أو ص + ١ = ١ − س

⟵ ~~ص = س − ٢~~ ص = − س

مرفوض « لا يحقق الشرط الابتدائي »

∴ ص = − س

مثال جد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية : $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ + ص جتا س = جتا س

الذي يحقق الشرط : ص = ٣ عندما س = ٠ « اكتب الجواب على الصورة ص = ق (س) »

الحل $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ + ص جتا س = جتا س ⟵ $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = جتا س − ص جتا س

⟵ $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = جتا س (١ − ص) ⟵ $\frac{\text{د ص}}{١ - \text{ص}}$ = جتا س . د س

⟵ $\int \frac{\text{د ص}}{١ - \text{ص}}$ = $\int$ جتا س . د س ⟵ لـو$_{\text{هـ}}$ |١ − ص| = −جا س + جـ

جد قيمة جـ :

ص = ٣ عندما س = ٠ $\longleftarrow$ $\text{لـو}_{\text{هـ}} |١ - ٣| = -\text{جا}\,٠ + \text{جـ}$ $\longleftarrow$ $\text{جـ} = \text{لـو}_{\text{هـ}}\,٢$

$\therefore\ \text{لـو}_{\text{هـ}} |١ - \text{ص}| = -\text{جا س} + \text{لـو}_{\text{هـ}}\,٢ \longleftarrow |١ - \text{ص}| = \text{هـ}^{(-\text{جا س} + \text{لـو}_{\text{هـ}}٢)} = ٢\,\text{هـ}^{-\text{جا س}}$

$١ - \text{ص} = ٢\,\text{هـ}^{-\text{جا س}} \longleftarrow \text{ص} = ١ - ٢\,\text{هـ}^{-\text{جا س}}$ (مشطوب) مرفوض « لا يحقق الشرط الابتدائي »

$١ - \text{ص} = -٢\,\text{هـ}^{-\text{جا س}} \longleftarrow \text{ص} = ١ + ٢\,\text{هـ}^{-\text{جا س}}$

مثال جد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية : $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \sqrt{\text{س ص}}$ ، حيث س > ٠ ، ص > ٠

الذي يحقق الشرط : ص = ٢ عندما س = ١ « اكتب الجواب على الصورة ص = ق (س) »

الحل $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \sqrt{\text{س ص}} \longleftarrow \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \sqrt{\text{س}}\,\sqrt{\text{ص}} = \text{س}^{\frac{١}{٢}}\,\text{ص}^{\frac{١}{٢}} \longleftarrow \frac{\text{د ص}}{\text{ص}^{\frac{١}{٢}}} = \text{س}^{\frac{١}{٢}} .\ \text{د س}$

$\longleftarrow \text{ص}^{\frac{-١}{٢}} .\ \text{د ص} = \text{س}^{\frac{١}{٢}} .\ \text{د س} \longleftarrow \int \text{ص}^{\frac{-١}{٢}} .\ \text{د ص} = \int \text{س}^{\frac{١}{٢}} .\ \text{د س}$

$\longleftarrow ٢\,\text{ص}^{\frac{١}{٢}} = \frac{٢}{٣}\,\text{س}^{\frac{٣}{٢}} + \text{جـ}$

جد قيمة جـ :

ص = ٢ عندما س = ١ $\longleftarrow ٢\,(٢)^{\frac{١}{٢}} = \frac{٢}{٣}\,(١)^{\frac{٣}{٢}} + \text{جـ} \longleftarrow \text{جـ} = ٢\sqrt{٢} - \frac{٢}{٣}$

$\therefore\ ٢\,\text{ص}^{\frac{١}{٢}} = \frac{٢}{٣}\,\text{س}^{\frac{٣}{٢}} + ٢\sqrt{٢} - \frac{٢}{٣}$

$\text{ص}^{\frac{١}{٢}} = \frac{١}{٣}\,\text{س}^{\frac{٣}{٢}} + \sqrt{٢} - \frac{١}{٣} \longleftarrow \text{ص} = \left(\frac{١}{٣}\sqrt{\text{س}^٣} + \sqrt{٢} - \frac{١}{٣}\right)^٢$

مثال جد الحل العام للمعادلة التفاضلية : $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{\text{س}^٢\text{ص} - ٤\,\text{ص}}{\text{س} + ٢}$ ، $\text{س} \neq -٢$

« اكتب الجواب على الصورة ص = ق (س) »

الحل $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{\text{ص}\,(\text{س}^٢ - ٤)}{\text{س} + ٢} = \frac{\text{ص}\,(\text{س} - ٢)(\text{س} + ٢)}{\text{س} + ٢} = \text{ص}\,(\text{س} - ٢)$

$\longleftarrow \frac{\text{د ص}}{\text{ص}} = (\text{س} - ٢) .\ \text{د س} \longleftarrow \int \frac{\text{د ص}}{\text{ص}} = \int (\text{س} - ٢) .\ \text{د س}$

$\longleftarrow \text{لـو}_{\text{هـ}} |\text{ص}| = \frac{١}{٢}\,\text{س}^٢ - ٢\,\text{س} + \text{جـ}_١$

$\longleftarrow |\text{ص}| = \text{هـ}^{(\frac{١}{٢}\text{س}^٢ - ٢\text{س} + \text{جـ}_١)}$

$\longleftarrow |\text{ص}| = \text{جـ}_٢\,\text{هـ}^{(\frac{١}{٢}\text{س}^٢ - ٢\text{س})}$

$\longleftarrow \text{ص} = \pm\,\text{جـ}_٢\,\text{هـ}^{(\frac{١}{٢}\text{س}^٢ - ٢\text{س})} \longleftarrow \text{ص} = \text{جـ}\,\text{هـ}^{(\frac{١}{٢}\text{س}^٢ - ٢\text{س})}$

$\text{هـ}^{\text{جـ}_١} = \text{جـ}_٢$

$\pm\,\text{جـ}_٢ = \text{جـ}$

مثال جد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية : $(س^2 + 1)\frac{د ص}{د س} = س ص$

الذي يحقق الشرط : ص = ٢ عندما س = ٠ « اكتب الجواب على الصورة ص = ق (س) »

الحل $(س^2 + 1) . د ص = س ص . د س \longleftarrow \frac{د ص}{ص} = \frac{س}{س^2 + 1} . د س$

$\longleftarrow لـو_هـ |ص| = \frac{1}{2} لـو_هـ |س^2 + 1| + جـ$

جد قيمة جـ :

ص = ٢ عندما س = ٠ $\longleftarrow لـو_هـ |2| = \frac{1}{2} لـو_هـ |(0)^2 + 1| + جـ \longleftarrow جـ = لـو_هـ 2$

$\therefore لـو_هـ |ص| = \frac{1}{2} لـو_هـ |س^2 + 1| + لـو_هـ 2$

$|ص| = هـ^{(\frac{1}{2} لـو_هـ (س^2+1) + لـو_هـ 2)} = 2\sqrt{س^2 + 1}$

$ص = 2\sqrt{س^2 + 1}$ أو ~~$ص = -2\sqrt{س^2 + 1}$~~ مرفوض لا يحقق الشرط الابتدائي

مثال جد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية : $\frac{د ص}{د س} = هـ^{س - ص} + س^2 هـ^{-ص}$

الذي يحقق الشرط : ص = ١ عندما س = ١ « اكتب الجواب على الصورة ص = ق (س) »

الحل $\frac{د ص}{د س} = هـ^{س} هـ^{-ص} + س^2 هـ^{-ص} \longleftarrow \frac{د ص}{د س} = هـ^{-ص}(هـ^{س} + س^2)$

$\longleftarrow هـ^{ص} . د ص = (هـ^{س} + س^2) . د س \longleftarrow \int هـ^{ص} . د ص = \int (هـ^{س} + س^2) . د س$

$\longleftarrow هـ^{ص} = هـ^{س} + \frac{1}{3} س^3 + جـ$

جد قيمة جـ :

ص = ١ عندما س = ١ $\longleftarrow هـ^{1} = هـ^{1} + \frac{1}{3}(1)^3 + جـ \longleftarrow جـ = \frac{-1}{3}$

$\therefore هـ^{ص} = هـ^{س} + \frac{1}{3} س^3 - \frac{1}{3}$

$\therefore ص = لـو_هـ (هـ^{س} + \frac{1}{3} س^3 - \frac{1}{3})$

مثال جد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية : $س^3 \frac{د ص}{د س} = (س + 4) ص^2$

الذي يحقق الشرط : ص = ١ عندما س = ١ (اكتب الجواب على الصورة ص = ق (س))

الحل

$\longleftarrow \frac{د ص}{ص^2} = \frac{س + 4}{س^3} . د س \longleftarrow ص^{-2} . د ص = (س^{-2} + 4 س^{-3}) . د س$

$\longleftarrow \int ص^{-2} . د ص = \int (س^{-2} + 4 س^{-3}) . د س \longleftarrow \frac{-1}{ص} = \frac{-1}{س} - \frac{2}{س^2} + جـ$

جد قيمة جـ :

ص = ١ عندما س = ١ $\longleftarrow \frac{-1}{1} = \frac{-1}{1} - \frac{2}{(1)^2} + جـ \longleftarrow جـ = 2$

$\frac{-1}{ص} = \frac{-1}{س} - \frac{2}{س^2} + 2 \longleftarrow \frac{-1}{ص} = \frac{1}{س^2}(2 س^2 - س - 2)$

$\longleftarrow$ ص = $\dfrac{س^2}{2 + س - 2 س^2}$

مثال جد الحل العام للمعادلة التفاضلية : ٣ ظا ص − $\dfrac{د ص}{د س}$ قا س = ٠

الحل ٣ ظا ص = $\dfrac{د ص}{د س}$ قا س $\longleftarrow$ $\dfrac{د ص}{ظا ص}$ = $\dfrac{3}{قا س}$. د س

$\longleftarrow$ $\dfrac{جتا ص}{جا ص}$. د ص = ٣ جتا س . د س $\longleftarrow$ $\int \dfrac{جتا ص}{جا ص}$. د ص = $\int$ ٣ جتا س . د س

$\longleftarrow$ $لو_{هـ}$ | جا ص | = ٣ جا س + $جـ_1$

$\longleftarrow$ | جا ص | = $هـ^{(3 جا س + جـ_1)}$

$\longleftarrow$ | جا ص | = $جـ_2$ $هـ^{3 جا س}$ $\longleftarrow$ جا ص = جـ $هـ^{3 جا س}$

مثال جد الحل العام للمعادلة التفاضلية : $هـ^{-ص}$ جا س − صَ $جتا^2$ س = ٠

الحل $هـ^{-ص}$ جا س − $\dfrac{د ص}{د س}$ $جتا^2$ س = ٠ $\longleftarrow$ $هـ^{-ص}$ جا س = $\dfrac{د ص}{د س}$ $جتا^2$ س

$\longleftarrow$ $هـ^{ص}$. د ص = $\dfrac{جا س}{جتا^2 س}$. د س $\longleftarrow$ $هـ^{ص}$. د ص = ظا س قا س . د س

$\longleftarrow$ $\int هـ^{ص}$. د ص = $\int$ ظا س قا س . د س $\longleftarrow$ $هـ^{ص}$ = قا س + جـ

ص = $لو_{هـ}$ (قا س + جـ)

مثال جد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية : س . د ص = ص $لو_{هـ}$ ص . د س

الذي يحقق الشرط : ص = هـ عندما س = ٢ (اكتب الجواب على الصورة ص = ق (س))

الحل $\dfrac{د ص}{ص\ لو_{هـ} ص}$ = $\dfrac{د س}{س}$ $\longleftarrow$ $\dfrac{\frac{1}{ص}}{لو_{هـ} ص}$ = $\dfrac{د س}{س}$

$\longleftarrow$ $لو_{هـ}$ | $لو_{هـ}$ ص | = $لو_{هـ}$ | س | + جـ

جد قيمة جـ :

ص = هـ عندما س = ٢ $\longleftarrow$ ~~$لو_{هـ}$~~ | $لو_{هـ}$ هـ | = $لو_{هـ}$ |٢| + جـ $\longleftarrow$ جـ = −$لو_{هـ}$٢ (صفر)

$\longleftarrow$ $لو_{هـ}$ ($لو_{هـ}$ ص) = $لو_{هـ}$ س − $لو_{هـ}$٢

$\longleftarrow$ $لو_{هـ}$ ص = $هـ^{(لو_{هـ} س - لو_{هـ} 2)}$

$\longleftarrow$ $لو_{هـ}$ ص = $\dfrac{س}{2}$ $\longleftarrow$ ص = $هـ^{\frac{س}{2}}$

مثال جد الحل العام للمعادلة التفاضلية : $٢ جا^٢ س \,.\, د ص + ص^٢ \,.\, د س = ٢ \,.\, د ص$

(اكتب الجواب على الصورة ص = ق (س))

الحل $٢ جا^٢ س \,.\, د ص - ٢ \,.\, د ص = - ص^٢ \,.\, د س$

$\longleftarrow ٢ \,.\, د ص \,(جا^٢ س - ١) = - ص^٢ \,.\, د س \longleftarrow ص^{-٢} \,.\, د ص = \frac{١}{٢} \,.\, \frac{د س}{١ - جا^٢ س}$

$\longleftarrow \int ص^{-٢} \,.\, د ص = \frac{١}{٢} \int \frac{د س}{١ - جا^٢ س} = \frac{١}{٢} \int \frac{د س}{جتا^٢ س}$

$\longleftarrow \int ص^{-٢} \,.\, د ص = \frac{١}{٢} \int قا^٢ س \,.\, د س$

$\longleftarrow \frac{-١}{ص} = \frac{١}{٢} ظا س + \frac{١}{٢} جـ_١ = \frac{١}{٢} ظا س + جـ \longleftarrow ص = \frac{-١}{\frac{١}{٢} ظا س + جـ}$

مثال جد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية : $\acute{ص} = \frac{س ص^٣}{\sqrt{١ + س^٢}}$

الذي يحقق الشرط : ص = -١ عندما س = ٠

(اكتب الجواب على الصورة ص = ق (س))

الحل $\frac{د ص}{د س} = \frac{س ص^٣}{\sqrt{١ + س^٢}} \longleftarrow ص^{-٣} \,.\, د ص = \frac{س}{\sqrt{١ + س^٢}} \,.\, د س$

$\longleftarrow \int ص^{-٣} \,.\, د ص = \int \frac{س}{\sqrt{١ + س^٢}} \,.\, د س$ يكامل بالتعويض

افرض $ع = \sqrt{١ + س^٢} \longleftarrow ع^٢ = ١ + س^٢ \longleftarrow ٢ ع \frac{د ع}{د س} = ٢ س$

$\longleftarrow د س = \frac{ع}{س} \,.\, د ع$

$\int \frac{س}{\sqrt{١ + س^٢}} \,.\, د س = \int \frac{س}{ع} \,.\, \frac{ع}{س} \,.\, د ع = \int د ع = ع = \sqrt{١ + س^٢}$

$\frac{-١}{٢ ص^٢} = \sqrt{١ + س^٢} + جـ$

جد قيمة جـ :

ص = -١ عندما س = ٠ $\longleftarrow \frac{-١}{٢(-١)^٢} = \sqrt{١ + (٠)^٢} + جـ \longleftarrow جـ = \frac{-٣}{٢}$

$\therefore \frac{-١}{٢ ص^٢} = \sqrt{١ + س^٢} - \frac{٣}{٢}$

$\longleftarrow ص^٢ = \frac{١}{٣ - ٢ \sqrt{١ + س^٢}}$

اما ~~$ص = \frac{١}{\sqrt{٣ - ٢\sqrt{١ + س^٢}}}$~~ أو $ص = \frac{-١}{\sqrt{٣ - ٢\sqrt{١ + س^٢}}}$

مثال جد الحل العام للمعادلة التفاضلية : $\frac{دص}{دس} = س هـ^{س^٢ - لـوص^٢}$ ، ص $\neq$ ٠

(اكتب الجواب على الصورة ص = ق (س))

الحل

$\leftarrow \frac{دص}{دس} = س هـ^{س^٢} هـ^{-لـوص^٢} = س هـ^{س^٢} ص^{-٢}$

$\leftarrow ص^٢ . دص = س هـ^{س^٢} . دس \leftarrow \int ص^٢ . دص = \int س هـ^{س^٢} . دس$ يكامل بالتعويض

افرض ع = س^٢ $\leftarrow \frac{دع}{دس} = ٢ س \leftarrow دس = \frac{دع}{٢ س}$

$\int س هـ^{س^٢} . دس = \int س هـ^{ع} . \frac{دع}{٢ س} = \frac{١}{٢} \int هـ^{ع} . دع = \frac{١}{٢} هـ^{ع} = \frac{١}{٢} هـ^{س^٢}$

$\leftarrow \frac{١}{٣} ص^٣ = \frac{١}{٢} هـ^{س^٢} + جـ_١ \leftarrow ص^٣ = \frac{٣}{٢} هـ^{س^٢} + جـ$ (٣ جـ$_١$ = جـ)

$\leftarrow ص = \sqrt[٣]{\frac{٣}{٢} هـ^{س^٢} + جـ}$

مثال جد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية : س ص صَ = لـوس ، س > ٠

الذي يحقق الشرط : ص = ٢ عندما س = ١ (اكتب الجواب على الصورة ص = ق (س))

الحل

$س ص \frac{دص}{دس} = لـوس \leftarrow ص . دص = \frac{١}{س} لـوس . دس$

$\leftarrow \int ص . دص = \int \frac{١}{س} لـوس . دس$ يكامل بالتعويض

افرض ع = لـوس $\leftarrow \frac{دع}{دس} = \frac{١}{س} \leftarrow دس = س . دع$

$\int \frac{١}{س} لـوس . دس = \int \frac{١}{س} . ع . س . دع = \int ع . دع = \frac{ع^٢}{٢} = \frac{(لـوس)^٢}{٢}$

$\frac{ص^٢}{٢} = \frac{(لـوس)^٢}{٢} + جـ_١ \leftarrow ص^٢ = (لـوس)^٢ + جـ$ (٢ جـ$_١$ = جـ)

جد قيمة جـ : ص = ٢ عندما س = ١ $\leftarrow$ (٢)^٢ = (لـو ١)^٢ + جـ $\leftarrow$ جـ = ٤

$\therefore ص^٢ = (لـوس)^٢ + ٤$

$ص = \sqrt{(لـوس)^٢ + ٤}$ ، ~~$ص = -\sqrt{(لـوس)^٢ + ٤}$~~

مثال جد الحل العام للمعادلة التفاضلية : صَ = س هـ$^{ص - س}$

(اكتب الجواب على الصورة ص = ق (س))

الحل

$\frac{دص}{دس} = س هـ^{ص - س} = س هـ^{ص} هـ^{-س}$

$\leftarrow هـ^{-ص} . دص = س هـ^{-س} . دس \leftarrow \int هـ^{-ص} . دص = \int س هـ^{-س} . دس$ يكامل بالأجزاء

افرض ق = س ، $د م = هـ^{-س} . د س$

$د ق = د س$ ، $م = -هـ^{-س}$

$\int س هـ^{-س} . د س = -س هـ^{-س} - \int -هـ^{-س} . د س = -س هـ^{-س} - هـ^{-س}$

$\therefore -هـ^{-ص} = -س هـ^{-س} - هـ^{-س} + جـ \longrightarrow هـ^{-ص} = س هـ^{-س} + هـ^{-س} - جـ$

$\longrightarrow هـ^{ص} = \frac{1}{س هـ^{-س} + هـ^{-س} - جـ}$

$\therefore ص = -لو_{هـ}(س هـ^{-س} + هـ^{-س} - جـ)$

مثال جد الحل العام للمعادلة التفاضلية : $\frac{د ص}{د س} = (1 + هـ^{-س})(ص^2 - 1)$

الحل $\frac{د ص}{ص^2 - 1} = (1 + هـ^{-س}) . د س \longrightarrow \int \frac{د ص}{ص^2 - 1} = \int (1 + هـ^{-س}) . د س$

$\int \frac{د ص}{ص^2 - 1} = \int \frac{د ص}{(ص - 1)(ص + 1)}$

$\frac{1}{(ص - 1)(ص + 1)} = \frac{أ}{ص - 1} + \frac{ب}{ص + 1} = \frac{أ(ص + 1) + ب(ص - 1)}{(ص - 1)(ص + 1)}$

$\longrightarrow 1 = أ(ص + 1) + ب(ص - 1)$

بوضع ص = -1 : $1 = أ(-1 + 1) + ب(-1 - 1) \longrightarrow ب = \frac{-1}{2}$

بوضع ص = 1 : $1 = أ(1 + 1) + ب(1 - 1) \longrightarrow أ = \frac{1}{2}$

$\int \frac{د ص}{(ص - 1)(ص + 1)} = \left[\int \frac{\frac{1}{2}}{ص - 1} . د ص + \int \frac{\frac{-1}{2}}{ص + 1} . د ص \right]$

$= \left[\frac{1}{2} لو_{هـ} |ص - 1| - \frac{1}{2} لو_{هـ} |ص + 1| \right]$

$\longrightarrow \frac{1}{2} لو_{هـ} |ص - 1| - \frac{1}{2} لو_{هـ} |ص + 1| = س - هـ^{-س} + جـ$

$\longrightarrow لو_{هـ} \left| \frac{ص - 1}{ص + 1} \right| = 2(س - هـ^{-س} + جـ)$

أمثلة متنوعة

مثال إذا كان $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{١ - \text{جا}^٢\text{ص}}{١ - \text{جا}^٢ ٢\text{س}}$ فأوجد العلاقة بين س و ص علما بأن : $\text{ص} = \frac{٣\pi}{٤}$ عندما $\text{س} = \frac{\pi}{٨}$

الحل

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{\text{جتا}^٢\text{ص}}{\text{جتا}^٢ ٢\text{س}} \longrightarrow \frac{١}{\text{جتا}^٢\text{ص}} \,.\, \text{د ص} = \frac{١}{\text{جتا}^٢ ٢\text{س}} \,.\, \text{د س}$

$\longrightarrow \text{قا}^٢\text{ص} \,.\, \text{د ص} = \text{قا}^٢ ٢\text{س} \,.\, \text{د س} \longrightarrow \int \text{قا}^٢\text{ص} \,.\, \text{د ص} = \int \text{قا}^٢ ٢\text{س} \,.\, \text{د س}$

$\longrightarrow \text{ظا ص} = \frac{١}{٢} \text{ظا} ٢\text{س} + \text{جـ}$

$\text{ص} = \frac{٣\pi}{٤}$ عندما $\text{س} = \frac{\pi}{٨} \longrightarrow \text{ظا} \frac{٣\pi}{٤} \; (-١) = \frac{١}{٢} \text{ظا} (٢ \frac{\pi}{٨}) \; (١) + \text{جـ} \longrightarrow \text{جـ} = \frac{-٣}{٢}$

$\therefore \text{ظا ص} = \frac{١}{٢} \text{ظا} ٢\text{س} - \frac{٣}{٢}$

مثال إذا كان $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{\text{جا}^٢\text{س}}{\text{جتا}^٢ ٢\text{ص}}$ فأوجد العلاقة بين س و ص علما بأن : $\text{ص} = \pi$ عندما $\text{س} = \frac{\pi}{٢}$

الحل

$\text{جتا}^٢\text{ص} \,.\, \text{د ص} = \text{جا}^٢\text{س} \,.\, \text{د س}$

$\longrightarrow \frac{١}{٢} (١ + \text{جتا} ٤\text{ص}) \,.\, \text{د ص} = \frac{١}{٢} (١ - \text{جتا} ٢\text{س}) \,.\, \text{د س}$

$\longrightarrow \int (١ + \text{جتا} ٤\text{ص}) \,.\, \text{د ص} = \int (١ - \text{جتا} ٢\text{س}) \,.\, \text{د س}$

$\longrightarrow \text{ص} + \frac{١}{٤} \text{جا} ٤\text{ص} = \text{س} - \frac{١}{٢} \text{جا} ٢\text{س} + \text{جـ}$

$\text{ص} = \pi$ عندما $\text{س} = \frac{\pi}{٢}$

$\longrightarrow \pi + \frac{١}{٤} \text{جا} ٤\pi \; (\text{صفر}) = \frac{\pi}{٢} - \frac{١}{٢} \text{جا} (٢ \frac{\pi}{٢}) \; (\text{صفر}) + \text{جـ} \longrightarrow \text{جـ} = \frac{\pi}{٢}$

$\therefore \text{ص} + \frac{١}{٤} \text{جا} ٤\text{ص} = \text{س} - \frac{١}{٢} \text{جا} ٢\text{س} + \frac{\pi}{٢}$

مثال منحنى ميل المماس له عند أي نقطة (س ، ص) عليه يساوي $\frac{\sqrt{٢\text{ص} + ١}}{\sqrt{٣\text{س} - ٢}}$
أوجد معادلته إذا علم أنه يمر بالنقطة (١ ، ٤)

الحل

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{\sqrt{٢\text{ص} + ١}}{\sqrt{٣\text{س} - ٢}} \longrightarrow \frac{\text{د ص}}{\sqrt{٢\text{ص} + ١}} = \frac{\text{د س}}{\sqrt{٣\text{س} - ٢}}$

$\longrightarrow \int (٢\text{ص} + ١)^{\frac{-١}{٢}} \,.\, \text{د ص} = \int (٣\text{س} - ٢)^{\frac{-١}{٢}} \,.\, \text{د س}$

$\longrightarrow (٢\text{ص} + ١)^{\frac{١}{٢}} = \frac{٢}{٣} (٣\text{س} - ٢)^{\frac{١}{٢}} + \text{جـ} \longrightarrow \sqrt{٢\text{ص} + ١} = \frac{٢}{٣} \sqrt{٣\text{س} - ٢} + \text{جـ}$

المنحنى يمر بـ (١ ، ٤) ⟵ $\sqrt{2(4)+1} = \frac{2}{3}\sqrt{3(1)-2} +$ جـ ⟵ جـ $= \frac{7}{3}$

∴ $\sqrt{2ص+1} = \frac{2}{3}\sqrt{3س-2} + \frac{7}{3}$

مثال إذا كان ميل المماس لمنحنى علاقة عند النقطة (س ، ص) يساوي س $هـ^{ص}$ فجد قاعدة العلاقة علما بأن النقطة (٢ ، ٠) تقع على منحناها .

الحل

$\frac{د ص}{د س}$ = س $هـ^{ص}$ ⟵ $هـ^{-ص}$. د ص = س . د س ⟵ $\int هـ^{-ص}$. د ص = $\int$ س . د س

⟵ $-هـ^{-ص} = \frac{1}{2}س^2 +$ جـ

المنحنى يمر بـ (٢ ، ٠) ⟵ $-هـ^{-(0)} = \frac{1}{2}(2)^2 +$ جـ ⟵ جـ = ⁻٣

⟵ $-هـ^{-ص} = \frac{1}{2}س^2 - 3$ ⟵ $س^2 + 2هـ^{-ص} = 6$

مثال إذا كان ق كثير حدود من الدرجة الثانية , وكان ق (١) = ٣ ، $\int_{0}^{1}$ ق´ (س) . د س = ١

$\int_{0}^{3}$ ق´ (س) . د س = ١٥ ، فجد قاعدة الاقتران ق .

الحل

افرض ق (س) = أ $س^2$ + ب س + جـ

$\int_{0}^{1}$ ق´ (س) . د س = ١ ⟵ ق (س) $\Big|_{0}^{1}$ = ١ ⟵ ق (١) − ق (٠) = ١

⟵ (أ + ب + جـ) − جـ = ١ ⟵ أ + ب = ١ .... (١)

$\int_{0}^{3}$ ق´ (س) . د س = ١٥ ⟵ ق (س) $\Big|_{0}^{3}$ = ١٥ ⟵ ق (٣) − ق (٠) = ١٥

⟵ (٩أ + ٣ب + جـ) − جـ = ١٥ ⟵ ٩أ + ٣ب = ١٥ .... (٢)

بحل النظام المكون من (١) , (٢) ...... أ = ٢ ، ب = ⁻١

ق (١) = ٢ $(1)^2$ − (١) + جـ = ٣ ⟵ جـ = ٢

ق (س) = ٢ $س^2$ − س + ٢

مثال إذا كان ق‴ (س) = ٠ ، وكان ق (٠) = ٣ ، ق´ (١) = ٤ ، ق″ (٢) = ٦

فجد قاعدة الاقتران ق .

الحل

ق″ (س) = $\int$ ق‴ (س) . د س = $\int$ صفر . د س = $جـ_1$

لكن ق″ (٢) = ٦ ⟵ $جـ_1$ = ٦

ق´ (س) = $\int$ ق″ (س) . د س = $\int$ ٦ . د س = ٦ س + $جـ_2$

لكن ق´ (١) = ٤ ⟵ ٦ (١) + $جـ_2$ = ٤ ⟵ $جـ_2$ = ⁻٢

∴ ق´ (س) = ٦ س − ٢

ق (س) = $\int$ ق´ (س) . د س = $\int$(٦ س − ٢) . د س = ٣ $س^2$ − ٢ س + $جـ_3$

لكن ق (٠) = ٣ ⟵ ٣ $(0)^2$ − ٢ (٠) + $جـ_3$ = ٣ ⟵ $جـ_3$ = ٣

∴ ق (س) = ٣ س^2 ـ ٢ س + ٣

مثال إذا كان ق$'$ (س) = ـ٤ ق (س) فجد قاعدة الاقتران ق علما بأن : ق (٠) = ١

(الحل) $\int \frac{ق'(س)}{ق(س)} . د س = \int - ٤ . د س$

⟵ لـوهـ | ق (س) | = ـ ٤ س + جـ$_١$

⟵ | ق (س) | = هـ$^{-٤ س + جـ_١}$ = هـ$^{-٤ س}$ هـ^{جـ_١} = جـ$_٢$ هـ$^{-٤ س}$ (جـ$_٢$ = هـ^{جـ_١})

⟵ ق (س) = ± جـ$_٢$ هـ$^{-٤ س}$ = جـ هـ$^{-٤ س}$ (جـ = ± جـ$_٢$)

لكن ق (٠) = ١ ⟵ جـ هـ$^{-٤ (٠)}$ = ١ ⟵ جـ = ١

∴ ق (س) = هـ$^{-٤ س}$

مثال إذا كان $\frac{د ص}{د س}$ + أ ص = ٠ وكانت ص = ١٠ عندما س = ٠ ،

ص = ١ عندما س = ٢ ، فجد : [١] قيمة الثابت أ .

[٢] قيمة ص عندما س = ١٠ .

(الحل) $\frac{د ص}{د س}$ = ـ أ ص ⟵ $\frac{د ص}{ص}$ = ـ أ . د س ⟵ $\int \frac{د ص}{ص} = \int -$ أ . د س

⟵ لـوهـ | ص | = ـ أ س + جـ$_١$

⟵ | ص | = هـ$^{-أ س + جـ_١}$ = هـ$^{-أ س}$ هـ^{جـ_١} = جـ$_٢$ هـ$^{-أ س}$ (جـ$_٢$ = هـ^{جـ_١})

ص = ± جـ$_٢$ هـ$^{-أ س}$ = جـ هـ$^{-أ س}$

لكن ص = ١٠ عندما س = ٠ ⟵ جـ هـ$^{-أ (٠)}$ = ١٠ ⟵ جـ = ١٠

∴ ص = ١٠ هـ$^{-أ س}$

لكن ص = ١ عندما س = ٢ ⟵ ١٠ هـ$^{-أ (٢)}$ = ١ ⟵ هـ$^{-أ (٢)}$ = $\frac{١}{١٠}$

⟵ لـوهـ هـ$^{-أ (٢)}$ = لـوهـ $\frac{١}{١٠}$ ⟵ ـ ٢ أ = ـ لـوهـ ١٠ ⟵ أ = $\frac{١}{٢}$ لـوهـ ١٠ = لـوهـ $\sqrt{١٠}$

∴ ص = ١٠ هـ$^{- س\ لـوهـ \sqrt{١٠}}$

[٢] قيمة ص عندما س = ١٠ .

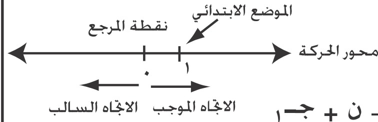
ص $|_{س = ١٠}$ = ١٠ هـ$^{-١٠\ لـوهـ \sqrt{١٠}}$ = ١٠ $\frac{١}{١٠^٥}$ = $\frac{١}{١٠^٤}$ = $\frac{١}{١٠٠٠٠}$

مثال يتحرك جسيم على خط مستقيم فإذا كان تسارعه اللحظي يعطى بالعلاقة

ت = ٢ ن ـ ١ م / ث^2 . (ن بالثواني) وكانت ف = ١ م و ع = ٢ م / ث عندما ن = ٠

جد : [١] سرعة و موضع الجسيم عندما ن = ٦ ثوان .

[٢] المسافة الكلية التي يقطعها الجسيم في الفترة الزمنية [٠ ، ٦] .



الحل

ع(ن) = $\int$ ت(ن) . د ن = $\int$ (٢ن − ١) . د ن = ن^{٢} − ن + جـ$_{١}$

لكن ع(٠) = ٢ ⟵ (٠)^{٢} − (٠) + جـ$_{١}$ = ٢ ⟵ جـ$_{١}$ = ٢

∴ ع(ن) = ن^{٢} − ن + ٢

ف(ن) = $\int$ ع(ن) . د ن = $\int$ (ن^{٢} − ن + ٢) . د ن = $\frac{١}{٣}$ ن^{٣} − $\frac{١}{٢}$ ن^{٢} + ٢ن + جـ$_{٢}$

لكن ف(٠) = ١ ⟵ $\frac{١}{٣}$ (٠)^{٣} − $\frac{١}{٢}$ (٠)^{٢} + ٢(٠) + جـ$_{٢}$ = ١ ⟵ جـ$_{٢}$ = ١

∴ ف(ن) = $\frac{١}{٣}$ ن^{٣} − $\frac{١}{٢}$ ن^{٢} + ٢ن + ١

- ع(٦) = (٦)^{٢} − ٦ + ٢ = ٣٢ م/ث
- ف(٦) = $\frac{١}{٣}$ (٦)^{٣} − $\frac{١}{٢}$ (٦)^{٢} + ٢(٦) + ١ = ٦٧ م

[٢] المسافة الكلية التي يقطعها الجسيم في الفترة الزمنية [٠ ، ٦]

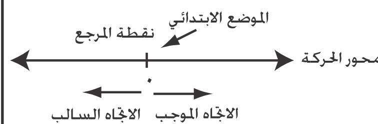
= $\int_{٠}^{٦}$ |ع(ن)| . د ن = $\int_{٠}^{٦}$ |ن^{٢} − ن + ٢| . د ن = $\int_{٠}^{٦}$ (ن^{٢} − ن + ٢) . د ن

= ($\frac{١}{٣}$ ن^{٣} − $\frac{١}{٢}$ ن^{٢} + ٢ن)$\Big|_{٠}^{٦}$ = ($\frac{١}{٣}$ (٦)^{٣} − $\frac{١}{٢}$ (٦)^{٢} + ٢(٦)) − ($\frac{١}{٣}$ (٠)^{٣} − $\frac{١}{٢}$ (٠)^{٢} + ٢(٠))

= ٦٦ م

مثال يتحرك جسيم على خط مستقيم فإذا كان تسارعه اللحظي يعطى بالعلاقة ت = ٦(ن − ١)(ن + ٢) سم/ث^{٢} ، إذا علمت أن سرعة الجسيم الابتدائية تساوي ٢٠ سم/ث وأن ف = ٠ عندما ن = ٠

فجد : سرعة و موضع الجسيم عندما ن = (٢) ثانية .



الحل

ت(ن) = ٦ن^{٢} + ٦ن − ١٢

ع(ن) = $\int$ ت(ن) . د ن = $\int$ (٦ن^{٢} + ٦ن − ١٢) . د ن

= ٢ن^{٣} + ٣ن^{٢} − ١٢ن + جـ$_{١}$

لكن ع(٠) = ٢٠ ⟵ ٢(٠)^{٣} + ٣(٠)^{٢} − ١٢(٠) + جـ$_{١}$ = ٢٠ ⟵ جـ$_{١}$ = ٢٠

∴ ع(ن) = ٢ن^{٣} + ٣ن^{٢} − ١٢ن + ٢٠

ف(ن) = $\int$ ع(ن) . د ن = $\int$ (٢ن^{٣} + ٣ن^{٢} − ١٢ن + ٢٠) . د ن = $\frac{١}{٢}$ ن^{٤} + ن^{٣} − ٦ن^{٢} + ٢٠ن + جـ$_{٢}$

لكن ف(٠) = ٠ ⟵ $\frac{١}{٢}$ (٠)^{٤} + (٠)^{٣} − ٦(٠)^{٢} + ٢٠(٠) + جـ$_{٢}$ = ٠ ⟵ جـ$_{٢}$ = ٠

∴ ف(ن) = $\frac{١}{٢}$ ن^{٤} + ن^{٣} − ٦ن^{٢} + ٢٠ن

■ $ع(٢) = ٢(٢)^{٣} + ٣(٢)^{٢} - ١٢(٢) + ٢٠ = ٢٤$ سم/ث

■ $ف(٢) = \frac{١}{٢}(٢)^{٤} + (٢)^{٣} - ٦(٢)^{٢} + ٢٠(٢) = ٣٢$ سم

مثال يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث أن سرعته ع متر/ دقيقة مرتبطة مع الزمن ن دقيقة بالعلاقة : $ع = \frac{ن}{\sqrt{ن^{٢}+٩}}$. فإذا كان الجسيم عند بدء قياس الزمن يبعد ٣ أمتار عن يمين نقطة ثابتة (و) . فأوجد بعده عن النقطة (و) عندما ن = (٣) دقائق .

الحل $ف(ن) = \int ع(ن) \, .د ن = \int \frac{ن}{\sqrt{ن^{٢}+٩}} \, .د ن$

افرض $ص = \sqrt{ن^{٢}+٩} \longleftarrow ص^{٢} = ن^{٢}+٩ \longleftarrow ٢ص \frac{د ص}{د ن} = ٢ن \longleftarrow د ن = \frac{ص \,.د ص}{ن}$

$\int \frac{ن}{\sqrt{ن^{٢}+٩}} \, .د ن = \int \frac{ن}{ص} . \frac{ص \,.د ص}{ن} = \int د ص = ص + جـ = \sqrt{ن^{٢}+٩} + جـ$

$\longleftarrow ف(ن) = \sqrt{ن^{٢}+٩} + جـ$

لكن $ف(٠) = ٣ \longleftarrow \sqrt{(٠)^{٢}+٩} + جـ = ٣ \longleftarrow جـ = ٠$

$\therefore ف(ن) = \sqrt{ن^{٢}+٩}$

$\longleftarrow ف(٣) = \sqrt{(٣)^{٢}+٩} = \sqrt{١٨}$ م

مثال انطلق جسم في خط مستقيم من النقطة أ فإذا كانت سرعته ع م/ث تعطى بالقاعدة : $ع = \begin{cases} ٣ن^{٢} & ، ٠ \leqslant ن < ٢ \\ ١٦ - ٢ن & ، ٢ \leqslant ن \leqslant ٨ \end{cases}$ ، ن : الزمن (بالثواني)

فجد إزاحة الجسم في الفترة الزمنية [٠ ، ٥]

الحل الإزاحة $= \int_{٠}^{٥} ع(ن) \, .د ن = \int_{٠}^{٢} ٣ن^{٢} \, .د ن + \int_{٢}^{٥} (١٦ - ٢ن) \, .د ن$

$= ن^{٣} \Big|_{٠}^{٢} + (١٦ن - ن^{٢}) \Big|_{٢}^{٥} = (٢)^{٣} - (٠)^{٣} + (١٦(٥) - (٥)^{٢}) - (١٦(٢) - (٢)^{٢}) = ٣٥$ م

مثال يتحرك جسيم على طول خط مستقيم بتسارع ثابت قدره ٣ م/ث^{٢} ، أوجد السرعة الابتدائية للجسيم ($ع_{٠}$) حيث $ع_{٠} > ٠$ ، علما بأن المسافة التي يقطعها الجسيم في أول ثانيتين من بدء الحركة تساوي ١٠ م .

الحل $ع(ن) = \int ت(ن) \, .د ن = \int ٣ \, .د ن = ٣ن + جـ$

عندما ن = ٠ ، $ع = ع_{٠}$ أي $جـ = ع_{٠} \longleftarrow ع(ن) = ٣ن + ع_{٠}$

لكن $\int_{٠}^{٢} |ع(ن)| \, .د ن = ١٠ \longleftarrow \int_{٠}^{٢} |٣ن + ع_{٠}| \, .د ن = ١٠$

$\longleftarrow \int_{٠}^{٢} (٣ن + ع_{٠}) \, .د ن = ١٠ \longleftarrow (\frac{٣}{٢}ن^{٢} + ع_{٠}ن) \Big|_{٠}^{٢} = ١٠$

$\longleftarrow (\frac{٣}{٢}(٢)^{٢} + ع_{٠}(٢)) - (\frac{٣}{٢}(٠)^{٢} + ع_{٠}(٠)) = ١٠ \longleftarrow ع_{٠} = ٢$ م/ث

مثال من السكون وابتداء من نقطة الأصل يتحرك الجسيمان أ ، ب على محور السينات . فإذا كان تسارع الجسيم أ يعطى بالعلاقة : $ت_{أ}$ = ٦ ن – ٣ سم/$ث^{٢}$ ، وتسارع الجسيم ب يعطى بالعلاقة : $ت_{ب}$ = ١٢ $ن^{٢}$ – ٨ سم/$ث^{٢}$ ، حيث ن الزمن بالثواني . جد بعد كل منهما عن الاخر عندما ن = ٤ ثوان .

الحل ▪ $ع_{أ}$(ن) = $\int$ $ت_{أ}$(ن) . د ن = $\int$(٦ ن – ٣) . د ن = ٣ $ن^{٢}$ – ٣ ن + $جـ_{١}$

لكن $ع_{أ}$(٠) = ٣ $(٠)^{٢}$ – ٣ (٠) + $جـ_{١}$ = ٠ ⟵ $جـ_{١}$ = ٠

$ف_{أ}$(ن) = $\int$ $ع_{أ}$(ن) . د ن = $\int$(٣ $ن^{٢}$ – ٣ ن) . د ن = $ن^{٣}$ – $\frac{٣}{٢}$ $ن^{٢}$ + $جـ_{٢}$

لكن $ف_{أ}$(٠) = $(٠)^{٣}$ – $\frac{٣}{٢}$ $(٠)^{٢}$ + $جـ_{٢}$ = ٠ ⟵ $جـ_{٢}$ = ٠

∴ $ف_{أ}$(ن) = $ن^{٣}$ – $\frac{٣}{٢}$ $ن^{٢}$ ⟵ $ف_{أ}$(٤) = $(٤)^{٣}$ – $\frac{٣}{٢}$ $(٤)^{٢}$ = ٤٠ سم.

▪ $ع_{ب}$(ن) = $\int$ $ت_{ب}$(ن) . د ن = $\int$(١٢ $ن^{٢}$ – ٨) . د ن = ٤ $ن^{٣}$ – ٨ ن + $ث_{١}$

لكن $ع_{ب}$(٠) = ٤ $(٠)^{٣}$ – ٨ (٠) + $ث_{١}$ = ٠ ⟵ $ث_{١}$ = ٠

$ف_{ب}$(ن) = $\int$ $ع_{ب}$(ن) . د ن = $\int$(٤ $ن^{٣}$ – ٨ ن) . د ن = $ن^{٤}$ – ٤ $ن^{٢}$ + $ث_{٢}$

لكن $ف_{ب}$(٠) = $(٠)^{٤}$ – ٤ $(٠)^{٢}$ + $ث_{٢}$ = ٠ ⟵ $ث_{٢}$ = ٠

∴ $ف_{ب}$(ن) = $ن^{٤}$ – ٤ $ن^{٢}$ ⟵ $ف_{ب}$(٤) = $(٤)^{٤}$ – ٤ $(٤)^{٢}$ = ١٩٢ سم .

$ف_{ب}$(٤) – $ف_{أ}$(٤) = ١٩٢ – ٤٠ = ١٥٢ سم .

مثال يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث أنه خلال فترة زمنية قصيرة :
٢ ثانية ≤ ن ≤ ٦ ثانية تعطى سرعته حسب العلاقة : ع = $\frac{٤}{ت}$ قدم/ث، حيث ع > ٠ ،
ت مقاسة بـ قدم/$ث^{٢}$. إذا علمت أن ع = ٦ قدم/ث عندما ن = ٢ ثانية . جد تسارع الجسيم عندما ن = ٣ ثوان .

الحل ع ت = ٤ ⟵ ع . $\frac{د ع}{د ن}$ = ٤ ⟵ ع . د ع = ٤ . د ن

⟵ $\int$ ع . د ع = $\int$ ٤ . د ن ⟵ $\frac{ع^{٢}}{٢}$ = ٤ ن + جـ

لكن ع = ٦ عندما ن = ٢ ⟵ $\frac{(٦)^{٢}}{٢}$ = ٤ (٢) + جـ ⟵ جـ = ١٠

⟵ $\frac{ع^{٢}}{٢}$ = ٤ ن + ١٠ ⟵ $ع^{٢}$ = ٨ ن + ٢٠ ⟵ ع = $\sqrt{٨ ن + ٢٠}$

عندما ن = ٣ : ع = $\sqrt{٨ (٣) + ٢٠}$ = ٢ $\sqrt{١١}$ قدم/ث

ت = $\frac{٤}{ع}$ = $\frac{٤}{٢ \sqrt{١١}}$ = $\frac{٢}{\sqrt{١١}}$ قدم/$ث^{٢}$

مثال يتحرك جسيم على محور السينات الموجب حسب العلاقة : ع = $\frac{٥}{٤ + ف}$ سم/ ث
حيث ف مقاسة بالـ سم . جد موضع الجسيم عندما ن = ٦ ثانية علما بأن ف = ٥ سم عندما ن = صفرا .

الحل

ع = $\frac{دف}{دن}$ = $\frac{٥}{٤ + ف}$ ⟵ ٤ + ف . دف = ٥ . دن ⟵ ∫(٤ + ف) . دف = ∫ ٥ . دن

⟵ ٤ف + $\frac{ف^٢}{٢}$ = ٥ ن + جـ

لكن ف = ٥ عندما ن = ٠ ⟵ ٤(٥) + $\frac{(٥)^٢}{٢}$ = ٥ (٠) + جـ ⟵ جـ = $\frac{٦٥}{٢}$

∴ ٤ف + $\frac{ف^٢}{٢}$ = ٥ ن + $\frac{٦٥}{٢}$

عندما ن = ٦ ⟵ ٤ف + $\frac{ف^٢}{٢}$ = ٥ (٦) + $\frac{٦٥}{٢}$ ⟵ $ف^٢$ + ٨ ف − ١٢٥ = ٠

ف = $\frac{-٨ \pm \sqrt{٦٤ - ٤ (١) (-١٢٥)}}{٢}$

ف = $\frac{-٨ + \sqrt{٥٦٤}}{٢}$ = −٤ + $\sqrt{١٤١}$ سم لأن الجسيم يتحرك على محور السينات الموجب

مثال يتحرك جسيم في خط مستقيم من نقطة ثابتة (و) حسب العلاقة :

ت = ١٠ ف قدم/$ث^٢$ ، حيث ف موقع الجسيم بالنسبة للنقطة (و) . إذا علمت أن ف = ٢ قدم عندما ع = ٤ قدم/ث . فجد ف عندما ع = ٠ .

الحل

ع = $\frac{دف}{دن}$ ، ت = $\frac{دع}{دن}$ ⟵ $\frac{ت}{ع}$ = $\frac{دع}{دف}$ ⟵ ت = ع $\frac{دع}{دف}$

⟵ ع $\frac{دع}{دف}$ = ١٠ ف ⟵ ع . دع = ١٠ ف . دف

⟵ ∫ ع . دع = ∫ ١٠ ف . دف ⟵ $\frac{ع^٢}{٢}$ = ٥ $ف^٢$ + جـ

لكن ف = ٢ عندما ع = ٤ ⟵ $\frac{(٤)^٢}{٢}$ = ٥ $(٢)^٢$ + جـ ⟵ جـ = −١٢

∴ $\frac{ع^٢}{٢}$ = ٥ $ف^٢$ − ١٢

عندما ع = ٠ : $\frac{(٠)^٢}{٢}$ = ٥ $ف^٢$ − ١٢ ⟵ ف = $\sqrt{\frac{١٢}{٥}}$ = $\sqrt{٢,٤}$ قدم

مثال يتحرك جسيم من السكون على خط مستقيم حسب العلاقة :

ت = $\frac{١}{ع}$ م/$ث^٢$ ، ع > ٠ حيث ع مقاسة بـ م/ث . إذا علمت أن موضع الجسيم ف = ١٠ $\sqrt{٢}$ م عندما ن = ٤ ثوان . فجد موضع الجسيم عندما ن = (١) ثانية .

الحل

ت = $\frac{دع}{دن}$ = $\frac{١}{ع}$ ⟵ ع . دع = دن ⟵ ∫ ع . دع = ∫ دن

⟵ $\frac{ع^٢}{٢}$ = ن + جـ

لكن ع = ٠ عندما ن = ٠ ⟵ $\frac{(٠)^٢}{٢}$ = ٠ + جـ ⟵ جـ = ٠

∴ $\frac{ع^٢}{٢}$ = ن ⟵ ع = $\sqrt{٢}\sqrt{ن}$

ع = $\frac{دف}{دن}$ = $\sqrt{٢}\sqrt{ن}$ ⟵ دف = $\sqrt{٢}\sqrt{ن}$. دن ⟵ ∫ دف = ∫ $\sqrt{٢}$ $ن^{\frac{١}{٢}}$. دن

$$\text{ف} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\,\text{ن}^{\frac{3}{2}} + \text{جـ} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{\text{ن}^{3}} + \text{جـ}$$

لكن $\text{ف} = 10\sqrt{2}$ عندما $\text{ن} = 4 \longrightarrow 10\sqrt{2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{(4)^{3}} + \text{جـ}$

$$\longrightarrow \text{جـ} = \frac{14\sqrt{2}}{3} \qquad \therefore \text{ف} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{\text{ن}^{3}} + \frac{14\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{ف}\Big|_{\text{ن}=1} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{(1)^{3}} + \frac{14\sqrt{2}}{3} = \frac{16\sqrt{2}}{3}\ \text{م}$$

مثال تكون سرعة الصوت في الهواء عند درجة حرارة 273 كلفن مساوية 1087 قدم / ث لكنها تزداد بازدياد درجة الحرارة . أظهرت التجارب أن معدل التغير في سرعة الصوت في الهواء بالنسبة لدرجة الحرارة هو : $\frac{\text{دع}}{\text{دح}} = \frac{1087}{2\sqrt{273}}\,\text{ح}^{-\frac{1}{2}}$

حيث ع سرعة الصوت بـ قدم/ث ، ح درجة الحرارة بالكلفن . جد ع بدلالة ح

(الحل)

$$\text{دع} = \frac{1087}{2\sqrt{273}}\,\text{ح}^{-\frac{1}{2}}\,.\,\text{دح} \longrightarrow \int \text{دع} = \int \frac{1087}{2\sqrt{273}}\,\text{ح}^{-\frac{1}{2}}\,.\,\text{دح}$$

$$\longrightarrow \text{ع} = \frac{1087}{\sqrt{273}}\,\text{ح}^{\frac{1}{2}} + \text{جـ} \longrightarrow \text{ع} = \frac{1087}{\sqrt{273}}\sqrt{\text{ح}} + \text{جـ}$$

لكن $\text{ع} = 1087$ عندما $\text{ح} = 273 \longrightarrow 1087 = \frac{1087}{\sqrt{273}}\sqrt{273} + \text{جـ} \longrightarrow \text{جـ} = 0$

$$\therefore \text{ع} = \frac{1087}{\sqrt{273}}\sqrt{\text{ح}}\ \text{قدم/ث}$$

مثال خزان ماء فارغ سعته 22,5 م^{3} يصب فيه الماء تدريجيا بمعدل (ن + 2) م^{3} / دقيقة حيث ن الزمن بالدقيقة . أوجد الزمن اللازم لامتلاء الخزان .

(الحل)

افرض ح حجم الماء في الخزان

$$\frac{\text{دح}}{\text{دن}} = \text{ن} + 2 \longrightarrow \text{دح} = \text{ن} + 2\,.\,\text{دن} \longrightarrow \int \text{دح} = \int (\text{ن} + 2)\,.\,\text{دن}$$

$$\longrightarrow \text{ح} = \frac{\text{ن}^{2}}{2} + 2\,\text{ن} + \text{جـ}$$

لكن ح = 0 عندما ن = 0 لأن الخزان فارغ

$$\longrightarrow 0 = \frac{(0)^{2}}{2} + 2(0) + \text{جـ} \longrightarrow \text{جـ} = 0$$

$$\therefore \text{ح} = \frac{\text{ن}^{2}}{2} + 2\,\text{ن}$$

عند امتلاء الخزان ح = 22,5

$$22{,}5 = \frac{\text{ن}^{2}}{2} + 2\,\text{ن} \longrightarrow \text{ن}^{2} + 4\,\text{ن} - 45 = 0 \longrightarrow (\text{ن} + 9)(\text{ن} - 5) = 0$$

∴ ن = 5 دقائق الزمن اللازم لامتلاء الخزان .

مثال إذا كان معدل التغير تحت تأثير الحرارة في مساحة صفيحة م من المعدن بالنسبة للزمن يتعين بالعلاقة : $\frac{د م}{د ن} = ٠٫٠١٥ ن^٢ + ٠٫٠٢ ن$ حيث م المساحة بالمتر المربع ، ن الزمن بالدقيقة . فأوجد مساحة الصفيحة قبل بدء التسخين مباشرة إذا علم أن : م = ٩٠ مترا مربعا عندما ن = ١٠ دقائق .

(الحل)

$د م = ٠٫٠١٥ ن^٢ + ٠٫٠٢ ن . د ن \longleftarrow \int د م = \int (٠٫٠١٥ ن^٢ + ٠٫٠٢ ن) . د ن$

$\longleftarrow م = ٠٫٠٠٥ ن^٣ + ٠٫٠١ ن^٢ + جـ$

لكن م = ٩٠ عندما ن = ١٠

$\longleftarrow ٩٠ = ٠٫٠٠٥ (١٠)^٣ + ٠٫٠١ (١٠)^٢ + جـ \longleftarrow جـ = ٨٤$

$\therefore م = ٠٫٠٠٥ ن^٣ + ٠٫٠١ ن^٢ + ٨٤$

مساحة الصفيحة قبل بدء التسخين مباشرة (أي م عندما ن = ٠)

$م|_{ن=٠} = ٠٫٠٠٥ (٠)^٣ + ٠٫٠١ (٠)^٢ + ٨٤ = ٨٤$ مترا مربعا .

مثال في تجربة ما كان معدل التغير في حجم كمية من الغاز ح (مقدرة بالمتر المكعب) بالنسبة للضغط الواقع عليه ض (مقدرة بالنيوتن / متر مربع) يعطى بالعلاقة :

$\frac{د ح}{د ض} = \frac{أ}{ض^٢}$ ، (أ ثابت) وكان ح = ١٢ $م^٣$ عندما ض = $\frac{١}{٢}$ نيوتن / $م^٢$ ، ح = ٨ $م^٣$ عندما ض = $\frac{٣}{٤}$ نيوتن / $م^٢$. فأوجد العلاقة بين ح و ض .

(الحل)

$\frac{د ح}{د ض} = \frac{أ}{ض^٢} \longleftarrow د ح = \frac{أ}{ض^٢} . د ض \longleftarrow \int د ح = \int \frac{أ}{ض^٢} . د ض$

$\longleftarrow \int د ح = أ \int ض^{-٢} . د ض \longleftarrow ح = \frac{-أ}{ض} + جـ$

$ح = ١٢$ عندما $ض = \frac{١}{٢} \longleftarrow ١٢ = \frac{-أ}{\frac{١}{٢}} + جـ \longleftarrow ١٢ = -٢ أ + جـ \quad ...(١)$

$ح = ٨$ عندما $ض = \frac{٣}{٤} \longleftarrow ٨ = \frac{-أ}{\frac{٣}{٤}} + جـ \longleftarrow ٨ = \frac{-٤}{٣} أ + جـ \quad ...(٢)$

بحل المعادلتين (١) و (٢) $\longleftarrow$ أ = − ٦ ، جـ = ٠

$\therefore ح = \frac{٦}{ض} م^٣$

مثال تتكاثر البكتيريا حسب العلاقة : $\frac{د ت}{د ن} = لو_{هـ} ٤ . ت$ ، حيث ت عدد البكتيريا ، ن : الزمن بالساعات ، إذا كان عددها بعد ساعة واحدة يساوي ٤٠٠ ، فجد عددها بعد ثلاث ساعات ونصف .

(الحل)

$\frac{د ت}{د ن} = لو_{هـ} ٤ . ت \longleftarrow \frac{١}{ت} . د ت = لو_{هـ} ٤ . د ن \longleftarrow \int \frac{١}{ت} . د ت = لو_{هـ} ٤ \int د ن$

$$\text{لوت} = \text{لو}٤ \cdot \text{ن} + \text{جـ}_١ \longrightarrow \text{ت} = \text{هـ}^{\text{لو}٤ \cdot \text{ن} + \text{جـ}_١}$$

$$\longrightarrow \text{ت} = \text{هـ}^{\text{جـ}_١} \text{هـ}^{(\text{لو}٤ \cdot \text{ن})} = \text{جـ} \; \text{هـ}^{\text{لو}٤^{\text{ن}}} = \text{جـ} (٤)^{\text{ن}}$$ (جـ = هـ^جـ١)

لكن ت = ٤٠٠ عندما ن = ١ $\longrightarrow$ ٤٠٠ = جـ $(٤)^١$ $\longrightarrow$ جـ = ١٠٠

∴ ت = ١٠٠ $(٤)^{\text{ن}}$

$$\text{ت}\Big|_{\text{ن} = ٣,٥} = ١٠٠ (٤)^{٣,٥} = ١٠٠ (٢)^٧ = ١٢٨٠٠$$

مثال بفرض أن تعداد سكان العالم كان ٤,٥ مليار في عام ١٩٨٠، وأنه يزداد حسب العلاقة : $\frac{\text{دع}}{\text{د ن}} = ٠,٠٤ \text{ لو}_{\text{هـ}}٢ \cdot \text{ع}$ ، حيث ع : عدد سكان العالم بالمليارات ، ن : الزمن بالأعوام . كم يصبح تعداد سكان العالم عام ٢٠٣٠ ؟

الحل

$\frac{\text{دع}}{\text{د ن}} = ٠,٠٤ \text{ لو}_{\text{هـ}}٢ \cdot \text{ع} \longrightarrow \frac{١}{\text{ع}} \cdot \text{دع} = ٠,٠٤ \text{ لو}_{\text{هـ}}٢ \cdot \text{د ن}$ نكامل الطرفين

$$\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ع} = ٠,٠٤ \text{ لو}_{\text{هـ}}٢ \cdot \text{ن} + \text{جـ}_١ \longrightarrow \text{ع} = \text{هـ}^{٠,٠٤ \text{ لو}_{\text{هـ}}٢ \cdot \text{ن} + \text{جـ}_١}$$

$$\longrightarrow \text{ع} = \text{هـ}^{\text{جـ}_١} \text{هـ}^{٠,٠٤ \text{ لو}_{\text{هـ}}٢ \cdot \text{ن}} = \text{جـ} \; \text{هـ}^{\text{لو}_{\text{هـ}}٢^{٠,٠٤ \text{ن}}} = \text{جـ} (٢)^{٠,٠٤ \text{ن}}$$ (جـ = هـ^جـ١)

على اعتبار ن = ٠ في سنة ١٩٨٠ .

ع = ٤,٥ عندما ن = ٠ $\longrightarrow$ ٤,٥ = جـ $(٢)^{٠,٠٤ (٠)}$ $\longrightarrow$ جـ = ٤,٥

∴ ع = ٤,٥ $(٢)^{٠,٠٤ \text{ن}}$

$$\text{ع}\Big|_{\text{ن} = ٥٠} = ٤,٥ (٢)^{٠,٠٤ (٥٠)} = ٤,٥ (٢)^٢ = ١٨ \text{ مليارا} .$$

مثال في الأسابيع الأولى منذ الولادة تزداد كتلة المولود بمرور الزمن وفق العلاقة :

$\frac{\text{دك}}{\text{د ن}} = ٠,٢ \sqrt{\text{ك}}$ ، حيث ك كتلة المولود (كغ) بعد ن (أسبوع) منذ الولادة . بفرض أن مولودا كتلته عند الولادة ٣,٢٤ كغ . جد كتلة هذا المولود بعد أسبوعين منذ ولادته .

الحل

$\frac{\text{دك}}{\sqrt{\text{ك}}} = ٠,٢ \cdot \text{د ن} \longrightarrow \int \frac{\text{دك}}{\sqrt{\text{ك}}} = \int ٠,٢ \cdot \text{د ن} \longrightarrow \int \text{ك}^{-\frac{١}{٢}} \cdot \text{دك} = \int ٠,٢ \cdot \text{د ن}$

$\longrightarrow ٢ \text{ك}^{\frac{١}{٢}} = ٠,٢ \text{ن} + \text{جـ} \longrightarrow ٢ \sqrt{\text{ك}} = ٠,٢ \text{ن} + \text{جـ}$

لكن ك = ٣,٢٤ عندما ن = ٠

$\longrightarrow ٢ \sqrt{٣,٢٤} = ٠,٢ (٠) + \text{جـ} \longrightarrow \text{جـ} = ٣,٦$

∴ $٢ \sqrt{\text{ك}} = ٠,٢ \text{ن} + ٣,٦ \longrightarrow \text{ك} = (٠,١ \text{ن} + ١,٨)^٢$

$$\text{ك}\Big|_{\text{ن} = ٢} = (٠,١(٢) + ١,٨)^٢ = ٤ \text{ كغم}$$

مثال بفرض أن نيزكا كروي الشكل يحترق محافظا على شكله بحيث أن معدل التغير في حجمه بالنسبة للزمن يعطى وفق العلاقة : $\frac{دح}{دن} = -٤\pi$ نق^٢ ، حيث ح : حجم النيزك (بالمتر المكعب)، ن : الزمن (بالدقائق) ، نق : نصف قطر النيزك (بالمتر) . إذا علمت أن نق = ٤ م عندما ن = صفرا .

جد [١] العلاقة بين نق و ن .

[٢] نق عندما ن = (٢) دقيقة .

الحل

ح = $\frac{٤}{٣}\pi$ نق^٣ ⟵ $\frac{دح}{دن} = \frac{٤}{٣}\pi$ (٣ نق^٢ $\frac{دنق}{دن}$) = ٤ π نق^٢ $\frac{دنق}{دن}$

لكن $\frac{دح}{دن} = -٤\pi$ نق^٢ ⟵ -٤π نق^٢ = ٤ π نق^٢ $\frac{دنق}{دن}$

⟵ $\frac{دنق}{دن} = -١$ ⟵ دنق = − دن ⟵ $\int$ دنق = $\int$ − دن

⟵ نق = − ن + جـ

لكن نق = ٤ عندما ن = ٠

⟵ ٤ = −(٠) + جـ ⟵ جـ = ٤

∴ نق = ٤ − ن

نق $|_{ن=٢}$ = ٤ − ٢ = ٢ م

مثال خزان ماء اسطواني الشكل مليء بالماء ارتفاعه ١٦ قدما وطول قطر قاعدته ٥ أقدام يتسرب منه الماء نتيجة لوجود ثقب في قاعه فينخفض ارتفاع الماء فيه وفق العلاقة : $\frac{دل}{دن} = -٢\sqrt{ل}$ ، حيث ل ارتفاع الماء (بالأقدام) ، ن الزمن (بالساعات) .

جد [١] حجم الماء في الخزان بعد ساعة من تسربه .

[٢] الزمن اللازم حتى يفرغ الماء من الخزان .

الحل

$\frac{دل}{\sqrt{ل}}$ = −٢ . دن ⟵ $\int \frac{دل}{\sqrt{ل}} = \int$ −٢ . دن ⟵ $\int$ ل$^{-\frac{١}{٢}}$. دل = $\int$ −٢ . دن

⟵ ٢ ل$^{\frac{١}{٢}}$ = −٢ ن + جـ ⟵ ٢ $\sqrt{ل}$ = −٢ ن + جـ

لكن ل = ١٦ عندما ن = ٠ ⟵ ٢ $\sqrt{١٦}$ = −٢(٠) + جـ ⟵ جـ = ٨

∴ ٢ $\sqrt{ل}$ = −٢ ن + ٨ ⟵ ل = (− ن + ٤)^٢

ل $|_{ن=١}$ = (−١ + ٤)^٢ = ٩ أقدام

ح = π نق^٢ ل

- ح $|_{ل=٩}$ = π (٢,٥)^٢ (٩) = ٥٦,٢٥ π قدم^٣ حجم الماء في الخزان بعد ساعة من تسربه .

- يفرغ الماء من الخزان عندما ل = صفرا . ⟵ ٠ = (− ن + ٤)^٢ ⟵ ن = ٤ ساعات . الزمن اللازم حتى يفرغ الماء من الخزان .

مثال الة صناعية قيمتها عند الشراء (٢٥٠٠) دينار وكانت قيمتها تتناقص بمرور الزمن وفق العلاقة $\frac{دق}{دن} = -٥٠٠ (ن+١)^{-٢}$ حيث ق قيمة الالة بعد ن سنة من شرائها ، احسب قيمة هذه الالة بعد (٣) سنوات من شرائها .

الحل $دق = -٥٠٠ (ن+١)^{-٢} . دن \longleftarrow \int دق = -٥٠٠ \int (ن+١)^{-٢} . دن$

$\longleftarrow ق = ٥٠٠ (ن+١)^{-١} + جـ \longleftarrow ق = \frac{٥٠٠}{ن+١} + جـ$

لكن ق = ٢٥٠٠ عندما ن = ٠

$\longleftarrow ٢٥٠٠ = \frac{٥٠٠}{٠+١} + جـ \longleftarrow جـ = ٢٠٠٠$

$\therefore ق = \frac{٥٠٠}{ن+١} + ٢٠٠٠$

$ق|_{ن=٣} = \frac{٥٠٠}{٣+١} + ٢٠٠٠ = ٢١٢٥$ دينار (قيمة الالة بعد ٣ سنوات من شرائها)

مثال عند الانسان، وفي الأسابيع الأولى منذ الولادة يزداد طول الرضيع بمرور الزمن وفق العلاقة $\frac{دل}{دن} = \frac{٢٥٠٠}{(٥٠+ن)^{٢}}$ إنش / اسبوع ،حيث (ل) طول الرضيع بعد (ن) أسبوع منذ الولادة .

إذا كان طول رضيع عند الولادة (٢٢) إنشا , فاحسب طوله بعد أسبوعين منذ الولادة

« أوجد الجواب لأقرب انش»

الحل $دل = ٢٥٠٠ (٥٠+ن)^{-٢} . دن \longleftarrow \int دل = ٢٥٠٠ \int (٥٠+ن)^{-٢} . دن$

$\longleftarrow ل = -٢٥٠٠ (٥٠+ن)^{-١} + جـ \longleftarrow ل = \frac{-٢٥٠٠}{٥٠+ن} + جـ$

لكن ل = ٢٢ عندما ن = ٠

$\longleftarrow ٢٢ = \frac{-٢٥٠٠}{٥٠+٠} + جـ \longleftarrow جـ = ٧٢$

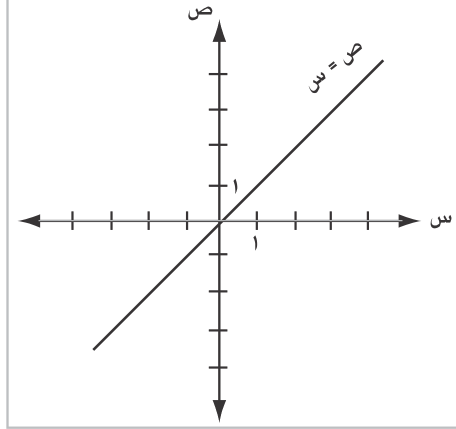
$\therefore ل = \frac{-٢٥٠٠}{٥٠+ن} + ٧٢$

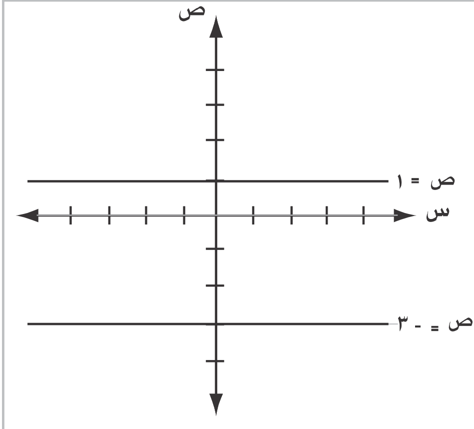
$ل|_{ن=٢} = \frac{-٢٥٠٠}{٥٠+٢} + ٧٢ = ٢٣,٩٢........$

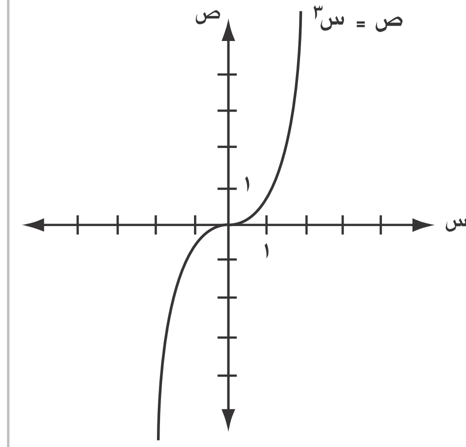
٢٤ الجواب لأقرب انش .

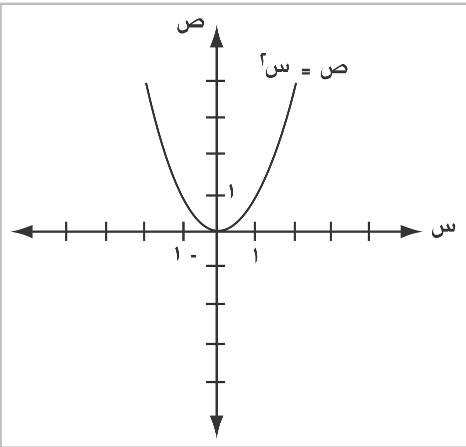
استخدام التحويلات الهندسية لرسم الاقترانات

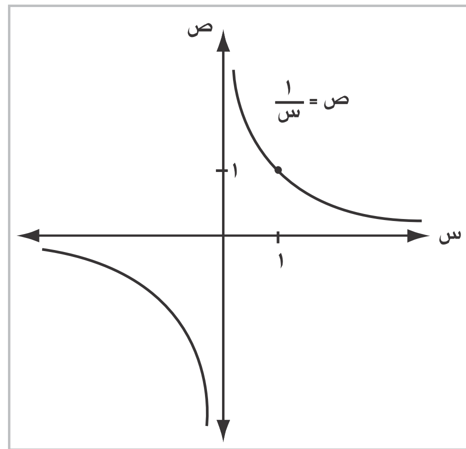
تذكر التمثيل البياني للاقترانات الاتية :

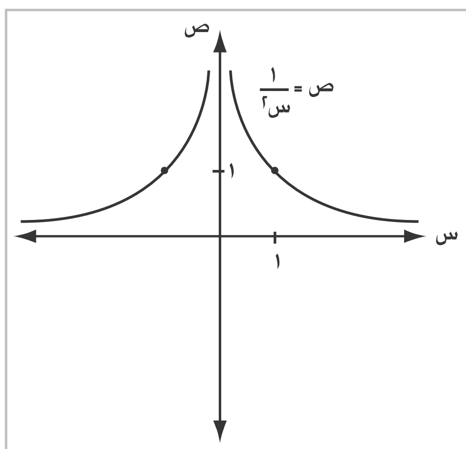


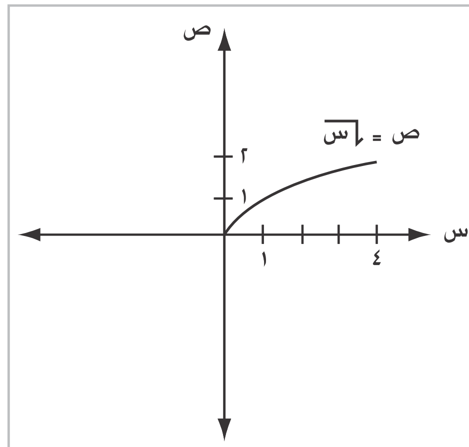


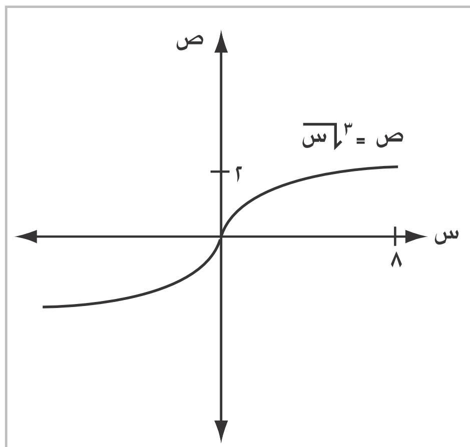


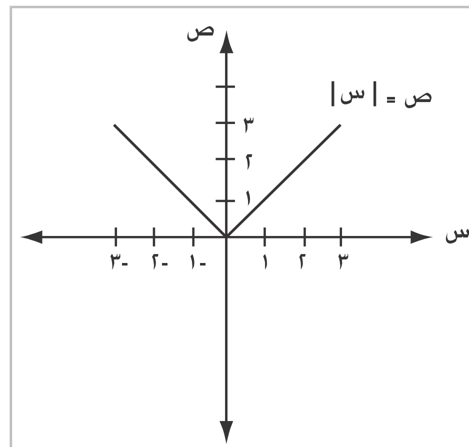


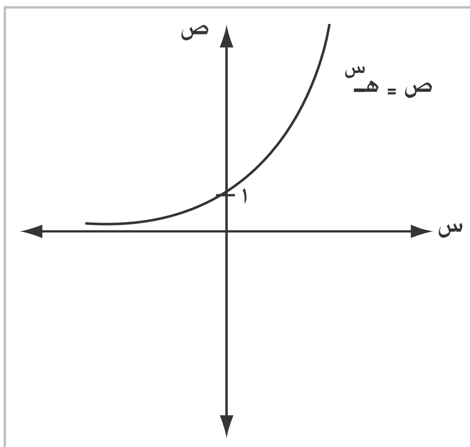


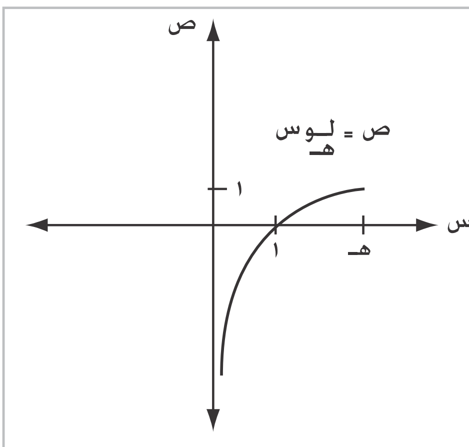


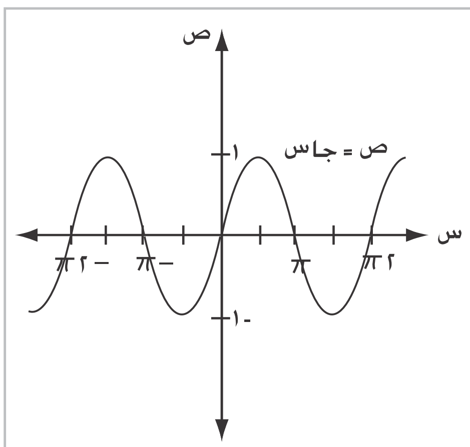

ص
ص = √س
٢
١
س
١
٤

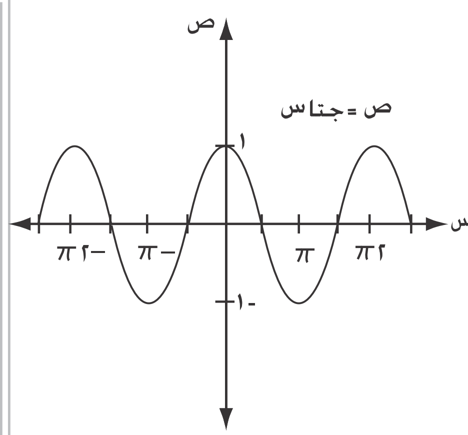

ص
ص = ∛س
٢
س
٨

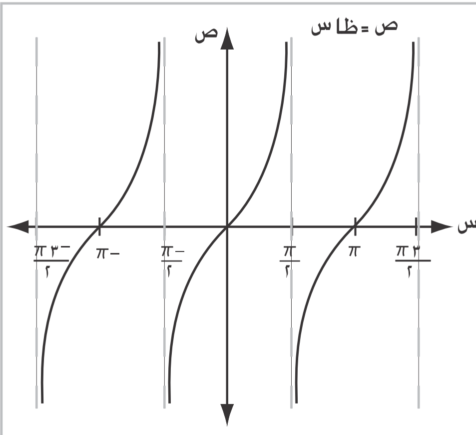

ص
ص = | س |
٣
٢
١
س
٣- ٢- ١- ١ ٢ ٣


ص
ص = هـ^س
١
س


ص
ص = لـوهـ س
١
س
١
هـ


ص
ص = جاس
١
س
−٢π −π π ٢π
١-





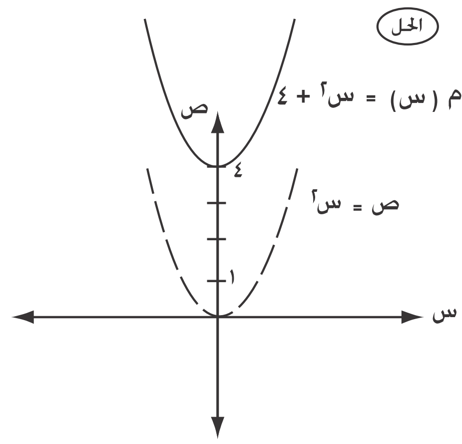
■ اعتمادا على رسم منحنى الاقتران ق نستخدم التحويلات الهندسية لرسم منحنيات أخرى .

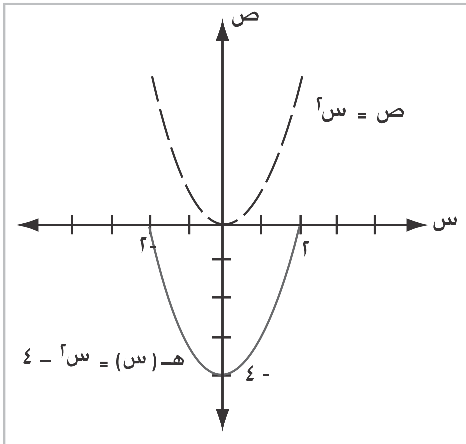
[١] التحويل ص = ق (س) ± جـ ، جـ > ٠

* منحنى الاقتران $ص_١$ = ق (س) + جـ هو انسحاب لمنحنى الاقتران ص = ق (س) بمقدار جـ وحدة إلى الأعلى .
* منحنى الاقتران $ص_٢$ = ق (س) – جـ هو انسحاب لمنحنى الاقتران ص = ق (س) بمقدار جـ وحدة إلى الأسفل .

مثال ارسم منحنى كل من : هـ(س) = $س^٢$ – ٤ ، م (س) = $س^٢$ + ٤

الحل



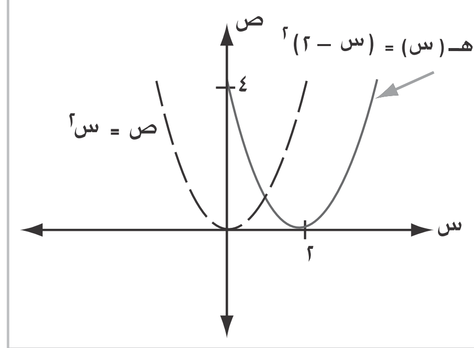


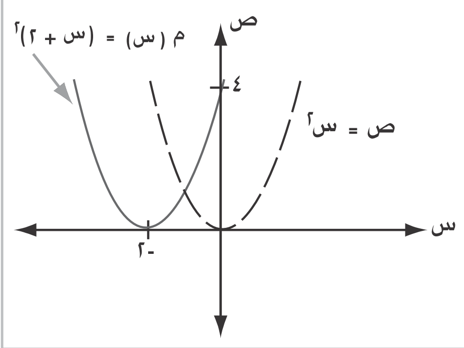
[٢] التحويل ص = ق (س ± جـ) ، جـ > ٠

* منحنى الاقتران $ص_١$ = ق (س + جـ) هو انسحاب لمنحنى الاقتران ص = ق (س) بمقدار جـ وحدة إلى اليسار .
* منحنى الاقتران $ص_٢$ = ق (س – جـ) هو انسحاب لمنحنى الاقتران ص = ق (س) بمقدار جـ وحدة إلى اليمين .

مثال ارسم منحنى كل من : هـ(س) = $(س - ٢)^٢$ ، م (س) = $(س + ٢)^٢$

الحل





٣ **التحويل** ص = - ق (س)

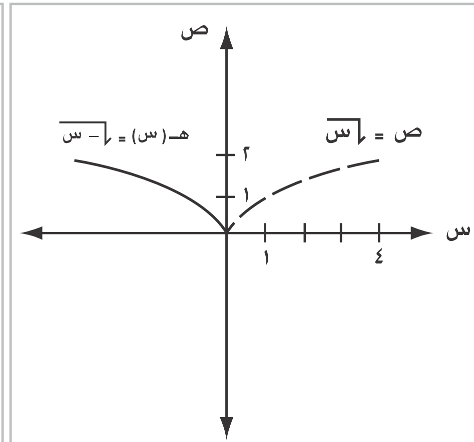
* منحنى الاقتران - ق (س) هو انعكاس لمنحنى ق (س) في محور السينات .

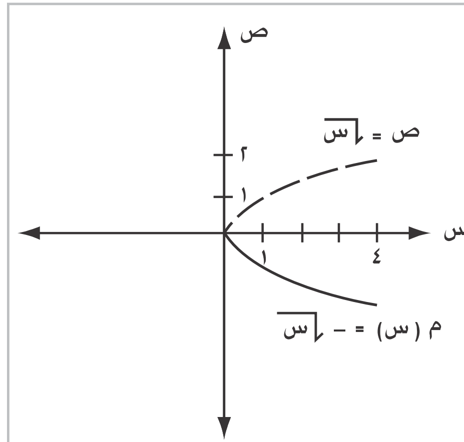
٤ **التحويل** ص = ق (- س)

* منحنى الاقتران ق (- س) هو انعكاس لمنحنى ق (س) في محور الصادات .

مثال ارسم منحنى كل من : هـ(س) = $\sqrt{- س}$ ، م (س) = - $\sqrt{س}$

الحل



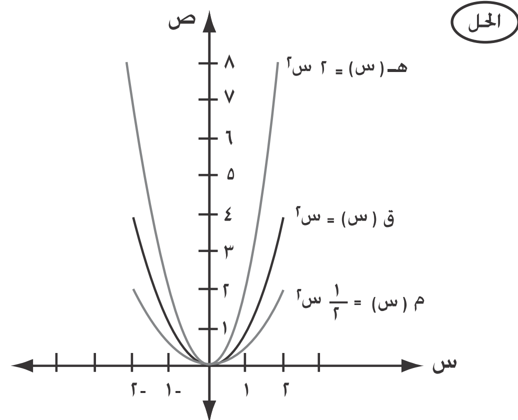


٥ **التحويل** ص = أ ق (س) ، أ > ٠

* منحنى الاقتران أ ق (س) ، أ > ٠ هو تكبير لمنحنى ق (س) باتجاه رأسي ومبتعدا عن محور السينات وبمعامل مقداره أ ، إذا كانت أ > ١ . وتصغير بشكل رأسي ومقتربا من محور السينات وبمعامل مقداره أ، إذا كانت ٠ < أ < ١

مثال ارسم منحنى كل من : ق (س) = $س^٢$ ، هـ(س) = ٢ $س^٢$، م (س) = $\frac{١}{٢}$ $س^٢$ على نفس المستوى الديكارتي .

الحل



تذكر :

١ يكون للاقتران مقطع سيني عند جـ إذا كان ق (جـ) = صفرا .

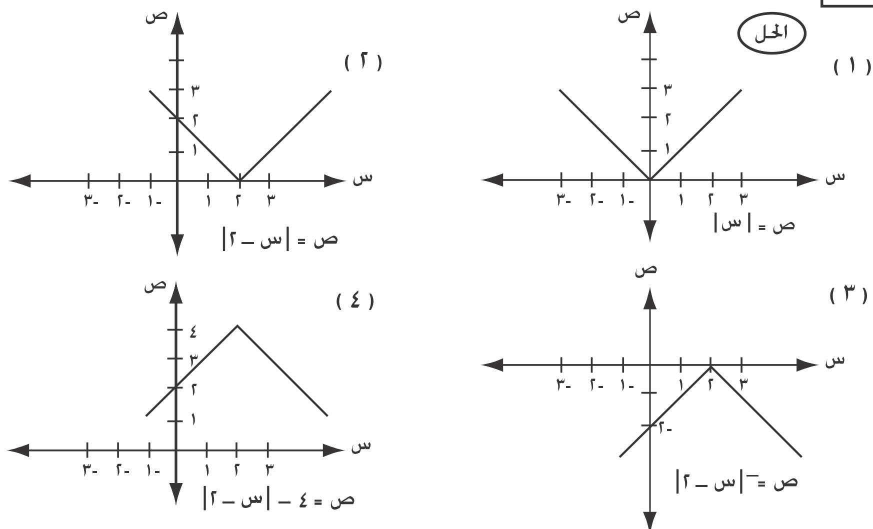
٢ يكون للاقتران مقطع صادي عند جـ إذا كان ق (٠) = جـ .

٣ معادلة محور السينات هي : ص = ٠ و معادلة محور الصادات هي : س = ٠ .

٤ لإيجاد نقط تقاطع الاقترانين ق (س) ، هـ (س) إن أمكن , نضع ق (س) = هـ (س) .

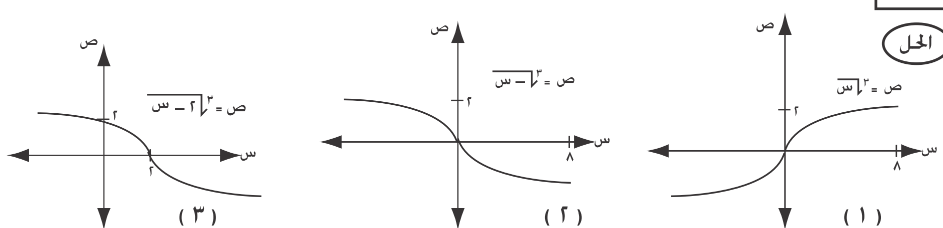
مثال مثل الاقتران ص = ٤ − |س − ٢| بيانيا .

الحل



مثال مثل الاقتران ص = $\sqrt[3]{٢ - س}$ بيانيا .

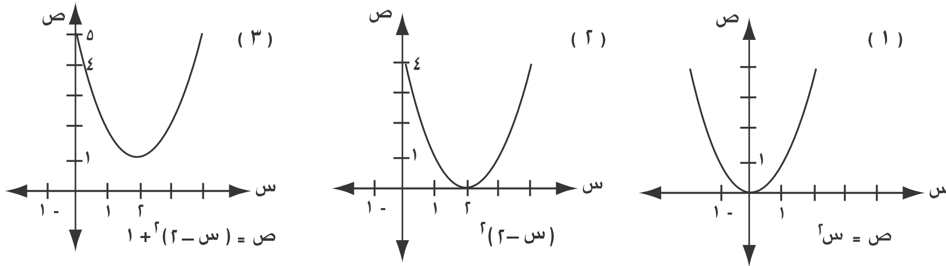
الحل



مثال مثل الاقتران ص = $س^2 - ٤ س + ٥$ بيانيا .

الحل بإكمال المربع في س .

ص = ($س^2 - ٤ س + ٤$) − ٤ + ٥ ⟵ ص = $(س - ٢)^2 + ١$



حساب المساحة باستخدام التكامل

أولا : حساب مساحة منطقة محصورة بين منحنى اقتران ومحور السينات .

نظرية إذا كان ق اقترانا قابلا للتكامل في الفترة [أ ، ب] ، فإن مساحة المنطقة (م) المحدودة بمنحنى ق ومحور السينات في [أ ، ب] تعطى بالقاعدة : م = $\int_{أ}^{ب} |ق (س)| . د س$

− لإيجاد مساحة المنطقة المحدودة بين منحنى الاقتران ق ومحور السينات في [أ ، ب] اتبع الخطوات الاتية :

١ _ جد أصفار الاقتران ق (إن وجدت) واهمل الأصفار خارج الفترة [أ ، ب] .

٢ _ عين على خط الأعداد العددين أ و ب وما بينهما من أصفار الاقتران ق .

٣ _ ابحث إشارة ق في [أ ، ب] .

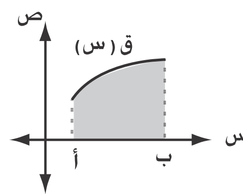
بين كل عددين في الخطوة (٢) عوض عددا يقع بينهما في قاعدة الاقتران ق . فتكون إشارة ق في تلك الفترة الجزئية هي إشارة ناتج التعويض .

- إذا كانت الإشارة موجبة فإن المساحة الجزئية = تكامل الاقتران ق على تلك الفترة .

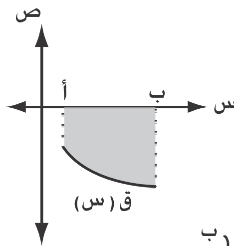
- إذا كانت الإشارة سالبة فإن المساحة الجزئية = −تكامل الاقتران ق على تلك الفترة .

٤ _ اجمع المساحات الجزئية التي حصلت عليها لتحصل على مساحة المنطقة المطلوبة . انظر الأشكال الاتية

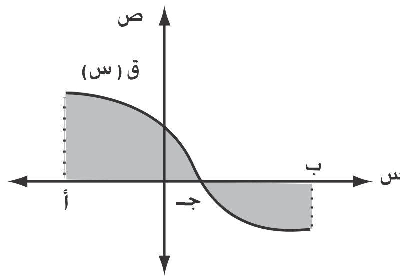
حيث م مساحة المنطقة المظللة (مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق ومحور السينات في الفترة [أ ، ب]) .



م = $\int_{أ}^{ب} ق (س) . د س$



م = $- \int_{أ}^{ب} ق (س) . د س$



$$\text{م} = \int_{\text{أ}}^{\text{جـ}} \text{ق}(\text{س}) \, .\, \text{د س} - \int_{\text{جـ}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س}) \, .\, \text{د س}$$

مثال أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $\text{ص} = -\text{س}^{٢} + ٢\,\text{س} + ٨$ ، ومحور السينات .

الحل نجد أصفار الاقتران ص .

$-\text{س}^{٢} + ٢\,\text{س} + ٨ = ٠ \longleftarrow \text{س}^{٢} - ٢\,\text{س} - ٨ = ٠ \longleftarrow (\text{س} - ٤)(\text{س} + ٢) = ٠$

$\longleftarrow \text{س} = ٤ \text{ ، } \text{س} = -٢$

ابحث إشارة ص .   + + + (بين −٢ و ٤)

عوض عدد بين -٢ و ٤ وليكن ٠ في قاعدة الاقتران فإشارة ناتج التعويض هي إشارة ق

$$\text{م} = \int_{-٢}^{٤} (-\text{س}^{٢} + ٢\,\text{س} + ٨) \, .\, \text{د س} = \left(\frac{-١}{٣}\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + ٨\,\text{س}\right)\Big|_{-٢}^{٤}$$

$$= \left(\frac{-١}{٣}(٤)^{٣} + (٤)^{٢} + ٨(٤)\right) - \left(\frac{-١}{٣}(-٢)^{٣} + (-٢)^{٢} + ٨(-٢)\right) = ٣٦ \text{ وحدة مساحة}$$

مثال أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $\text{ص} = \text{س}^{٣} - ٦\,\text{س}^{٢} + ٨\,\text{س}$ ، ومحور السينات .

الحل نجد أصفار الاقتران ص .

$\text{س}^{٣} - ٦\,\text{س}^{٢} + ٨\,\text{س} = ٠ \longleftarrow \text{س}(\text{س}^{٢} - ٦\,\text{س} + ٨) = \text{س}(\text{س} - ٤)(\text{س} - ٢) = ٠$

$\longleftarrow \text{س} = ٠ \text{ ، } \text{س} = ٤ \text{ ، } \text{س} = ٢$

+ + (بين ٠ و ٢)   − − − (بين ٢ و ٤)

$$\text{م} = \int_{٠}^{٢} (\text{س}^{٣} - ٦\,\text{س}^{٢} + ٨\,\text{س}) \, .\, \text{د س} - \int_{٢}^{٤} (\text{س}^{٣} - ٦\,\text{س}^{٢} + ٨\,\text{س}) \, .\, \text{د س}$$

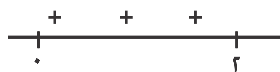
$$= \left(\frac{١}{٤}\text{س}^{٤} - ٢\,\text{س}^{٣} + ٤\,\text{س}^{٢}\right)\Big|_{٠}^{٢} - \left(\frac{١}{٤}\text{س}^{٤} - ٢\,\text{س}^{٣} + ٤\,\text{س}^{٢}\right)\Big|_{٢}^{٤}$$

$$= \left(\frac{١}{٤}(٢)^{٤} - ٢(٢)^{٣} + ٤(٢)^{٢}\right) - \left(\frac{١}{٤}(٠)^{٤} - ٢(٠)^{٣} + ٤(٠)^{٢}\right)$$

$$- \left[\left(\frac{١}{٤}(٤)^{٤} - ٢(٤)^{٣} + ٤(٤)^{٢}\right) - \left(\frac{١}{٤}(٢)^{٤} - ٢(٢)^{٣} + ٤(٢)^{٢}\right)\right]$$

= ٨ وحدات مساحة .

مثال أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $\text{ص} = (\text{س} + ٢)^{-٢}$ ومحور السينات في الفترة [٠ ، ٢]



الحل $(\text{س} + ٢)^{-٢} \neq ٠$.

م = $\int_{0}^{2}$ (س + ٢)$^{-2}$. د س = −(س + ٢)$^{-1}$ $\Big|_{0}^{2}$ = $\frac{-1}{س + ٢}\Big|_{0}^{2}$

= $\frac{-1}{٢ + ٢}$ − $\frac{-1}{٠ + ٢}$ = $\frac{1}{٤}$ وحدة مساحة

مثال أوجد مساحة المنطقة فوق منحنى الاقتران ص = س^3 وتحت محور السينات في الفترة [−٢ ، −١]

الحل س^3 = ٠ ← س = ٠ ∉ [−٢ ، −١]

(إشارة: − − على الفترة من −٢ إلى −١)

م = − $\int_{-2}^{-1}$ س^3 . د س = $\frac{-1}{٤}$ س^4 $\Big|_{-2}^{-1}$ = $\frac{-1}{٤}$ ((−١)^4 − (−٢)^4) = $\frac{15}{٤}$ وحدة مساحة

مثال أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ص = ١ − س^2 ومحور السينات في الفترة [٠ ، ٢]

الحل ١ − س^2 = ٠ ← س^2 = ١ ← س = ١ ، س = −١

س = −١ ∉ [٠ ، ٢]

(إشارة: + + على [٠ ، ١] ، − − على [١ ، ٢])

م = $\int_{0}^{1}$ (١ − س^2) . د س − $\int_{1}^{2}$ (١ − س^2) . د س

= (س − $\frac{1}{٣}$ س^3) $\Big|_{0}^{1}$ − (س − $\frac{1}{٣}$ س^3) $\Big|_{1}^{2}$

= (١ − $\frac{1}{٣}$ (١)^3) − (٠ − $\frac{1}{٣}$ (٠)^3) − [(٢ − $\frac{1}{٣}$ (٢)^3) − (١ − $\frac{1}{٣}$ (١)^3)]

= ٢ وحدة مساحة .

مثال أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ص = لوهـ س ومحور السينات في الفترة [١ ، هـ^3]

الحل لوهـ س = ٠ ← س = ١

(إشارة: + + + على [١ ، هـ^3])

افرض ق = لوهـ س ، د م = د س

د ق = $\frac{1}{س}$. د س ، م = س

$\int$ لوهـ س . د س = س لوهـ س − $\int$ س . $\frac{1}{س}$. د س

م = $\int_{1}^{هـ^3}$ لوهـ س . د س = (س لوهـ س − س) $\Big|_{1}^{هـ^3}$

= (هـ^3 لوهـ هـ^3 − هـ^3) − (١ لوهـ ١ − ١) = ٢ هـ^3 + ١ وحدة مساحة

مثال أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين رسم الاقتران ق (س) = { س^2 + ١ ، ٠ ≤ س ≤ ١ ؛ ٣ − س ، ١ < س ≤ ٣ } ومحور السينات .

الحل س^2 + ١ ، ٠ ≤ س ≤ ١

س^2 + ١ ≠ ٠

(إشارة: + + + + على [٠ ، ١])

٣ − س ، ١ < س ≤ ٣

٣ − س = ٠ ← س = ٣

(إشارة: + + + + على [١ ، ٣])

م = $\int_{٠}^{١}$ (س^{٢} + ١) . د س + $\int_{١}^{٣}$ (٣ − س) . د س = ($\frac{١}{٣}$ س^{٣} + س) $\Big|_{٠}^{١}$ + (٣ س − $\frac{١}{٢}$ س^{٢}) $\Big|_{١}^{٣}$

= ($\frac{١}{٣}$ (١)^{٣} + ١) − ($\frac{١}{٣}$ (٠)^{٣} + ٠) + [(٣ (٣) − $\frac{١}{٢}$ (٣)^{٢}) − (٣ (١) − $\frac{١}{٢}$ (١)^{٢})]

= $\frac{١٠}{٣}$ وحدة مساحة

مثال أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ص = جتا ٢ س + جا ٢ س ومحوري السينات والصادات والمستقيم س = $\frac{\pi}{٤}$.

الحل ص = جتا ٢ س + جا ٢ س ، س ∈ [٠ ، $\frac{\pi}{٤}$]

معادلة محور الصادات س = ٠

جتا ٢ س + جا ٢ س = ٠ ⟵ جا ٢ س = − جتا ٢ س ⟵ ظا ٢ س = −١

⟵ ٢ س = $\frac{٣\pi}{٤}$ ⟵ س = $\frac{٣\pi}{٨}$ ∉ [٠ ، $\frac{\pi}{٤}$]

+ + + + (من ٠ إلى $\frac{\pi}{٤}$)

م = $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}}$ (جتا ٢ س + جا ٢ س) . د س = ($\frac{١}{٢}$ جا ٢ س − $\frac{١}{٢}$ جتا ٢ س) $\Big|_{٠}^{\frac{\pi}{٤}}$

= ($\frac{١}{٢}$ جا $\frac{\pi}{٢}$ − $\frac{١}{٢}$ جتا $\frac{\pi}{٢}$) − ($\frac{١}{٢}$ جا ٠ − $\frac{١}{٢}$ جتا ٠) = وحدة مساحة واحدة .

مثال أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ص = جا س − $\frac{١}{٢}$ ومحور السينات في الفترة [$\frac{-\pi}{٢}$ ، $\frac{\pi}{٢}$]

الحل جا س − $\frac{١}{٢}$ = ٠ ⟵ جا س = $\frac{١}{٢}$ ⟵ س = $\frac{\pi}{٦}$

− − + + (النقاط $-\frac{\pi}{٢}$ ، $\frac{\pi}{٦}$ ، $\frac{\pi}{٢}$)

م = − $\int_{-\frac{\pi}{٢}}^{\frac{\pi}{٦}}$ (جا س − $\frac{١}{٢}$) . د س + $\int_{\frac{\pi}{٦}}^{\frac{\pi}{٢}}$ (جا س − $\frac{١}{٢}$) . د س

= − (− جتا س − $\frac{١}{٢}$ س) $\Big|_{-\frac{\pi}{٢}}^{\frac{\pi}{٦}}$ + (− جتا س − $\frac{١}{٢}$ س) $\Big|_{\frac{\pi}{٦}}^{\frac{\pi}{٢}}$

= − [(− جتا $\frac{\pi}{٦}$ − $\frac{١}{٢}$. $\frac{\pi}{٦}$) − (− جتا $\frac{-\pi}{٢}$ − $\frac{١}{٢}$. $\frac{-\pi}{٢}$)]

+ [(− جتا $\frac{\pi}{٢}$ − $\frac{١}{٢}$. $\frac{\pi}{٢}$) − (− جتا $\frac{\pi}{٦}$ − $\frac{١}{٢}$. $\frac{\pi}{٦}$)] = $\frac{\pi}{٦}$ + $\sqrt{٣}$ وحدة مساحة

مثال أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنى $\sqrt{س}$ + $\sqrt{ص}$ = $\sqrt{جـ}$ ومحوري السينات والصادات .

الحل $\sqrt{ص}$ = $\sqrt{جـ}$ − $\sqrt{س}$ ⟵ ص = ($\sqrt{جـ}$ − $\sqrt{س}$)^{٢}

($\sqrt{جـ}$ − $\sqrt{س}$)^{٢} = ٠ ⟵ $\sqrt{جـ}$ − $\sqrt{س}$ = ٠ ⟵ $\sqrt{س}$ = $\sqrt{جـ}$ ⟵ س = جـ

+ + + + (من ٠ إلى جـ)

$$\text{م} = \int_{0}^{\text{جـ}} (\sqrt{\text{جـ}} - \sqrt{\text{س}})^2 \,.\, \text{د س}$$

$$= \int_{0}^{\text{جـ}} (\text{جـ} - 2\sqrt{\text{جـ}}\ \text{س}^{\frac{1}{2}} + \text{س}) \,.\, \text{د س} = (\text{جـ س} - \frac{4}{3}\sqrt{\text{جـ}}\ \text{س}^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}\text{س}^2) \Big|_{0}^{\text{جـ}}$$

$$= \text{جـ}(\text{جـ}) - \frac{4}{3}\sqrt{\text{جـ}}\,(\text{جـ})^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}\text{جـ}^2 - (\text{جـ}(0) - \frac{4}{3}\sqrt{\text{جـ}}\,(0)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}(0)^2)$$

$$= \frac{\text{جـ}^2}{6} \text{ وحدة مساحة .}$$

مثال إذا كان المستقيم س = جـ يقسم المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران ص = جتا س ومحور السينات في الفترة $[0 ، \frac{\pi}{2}]$ إلى قسمين متساويين فجد قيمة جـ .

الحل

جتا س = ٠ ⟵ $\text{س} = \frac{\pi}{2}$

(+ + + بين ٠ و $\frac{\pi}{2}$)

$$\int_{0}^{\text{جـ}} \text{جتا س . د س} = \int_{\text{جـ}}^{\frac{\pi}{2}} \text{جتا س . د س} \longleftarrow \text{جا س}\Big|_{0}^{\text{جـ}} = \text{جا س}\Big|_{\text{جـ}}^{\frac{\pi}{2}}$$

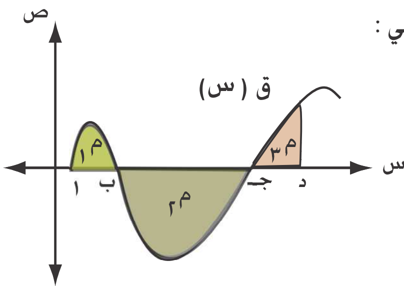
$$\longleftarrow \text{جا جـ} - \text{جا } 0 = \text{جا } \frac{\pi}{2} - \text{جا جـ}$$

$$\longleftarrow 2\,\text{جا جـ} = 1 \longleftarrow \text{جا جـ} = \frac{1}{2} \longleftarrow \text{جـ} = \frac{\pi}{6}$$

تذكر:

المساحة كمية موجبة أما التكامل فقد يكون سالبا أو صفرا أو موجبا .

مثال الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران ق . إذا كانت $\text{م}_1 = 0.8$ وحدة مربعة ، $\text{م}_2 = 2.6$ وحدة مربعة ، $\text{م}_3 = 1.5$ وحدة مربعة . أجب عما يأتي :



١ جد $\int_{\text{أ}}^{\text{د}} \text{ق (س) . د س}$

٢ جد المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران ق (س) ومحور السينات في الفترة [أ ، د]

٣ جد $\left| \int_{\text{ب}}^{\text{د}} \text{ق (س) . د س} \right|$

الحل

١ $\int_{\text{أ}}^{\text{د}} \text{ق (س) . د س} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق (س) . د س} + \int_{\text{ب}}^{\text{جـ}} \text{ق (س) . د س} + \int_{\text{جـ}}^{\text{د}} \text{ق (س) . د س}$

$= 0.8 + (-2.6) + 1.5 = -0.3$

٢ $\text{م} = \text{م}_1 + \text{م}_2 + \text{م}_3 = 0.8 + 2.6 + 1.5 = 4.9$ وحدة مساحة .

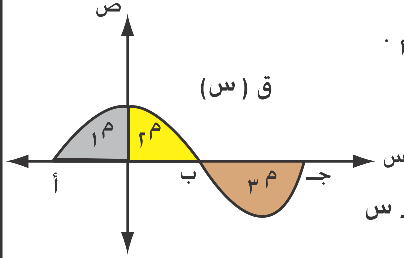
٣ $\int_{\text{ب}}^{\text{د}} \text{ق (س) . د س} = \int_{\text{ب}}^{\text{جـ}} \text{ق (س) . د س} + \int_{\text{جـ}}^{\text{د}} \text{ق (س) . د س}$

$= -2.6 + 1.5 = -1.1$

$\left| \int_{\text{ب}}^{\text{د}} \text{ق (س) . د س} \right| = |-1.1| = 1.1$

مثال

الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران ق . إذا كانت $م_{1}$ = ٩ وحدات مربعة ، $م_{3}$ = ١١ وحدة مربعة وكان $\int_{\text{أ}}^{\text{جـ}} \text{ق(س) . د س} = ٨$ فجد $م_{2}$.



الحل

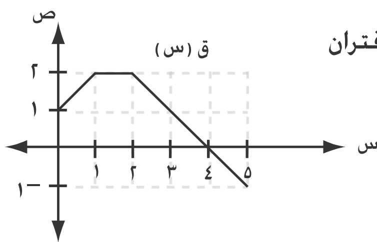
$\int_{\text{أ}}^{\text{جـ}} \text{ق(س) . د س} = \int_{\text{أ}}^{٠} \text{ق(س) . د س} + \int_{٠}^{\text{ب}} \text{ق(س) . د س} + \int_{\text{ب}}^{\text{جـ}} \text{ق(س) . د س}$

$\longleftarrow$ $٨ = ٩ + \int_{٠}^{\text{ب}} \text{ق(س) . د س} + {}^{-}١١$

$\longleftarrow$ $\int_{٠}^{\text{ب}} \text{ق(س) . د س} = ١٠$ $\longleftarrow$ $م_{2}$ = ١٠ وحدات مساحة .

مثال

اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الاقتران ق (س) في إيجاد كل مما يأتي :



أ $\int_{٠}^{٥} \text{ق(س) . د س}$

ب $\int_{٠}^{٥} |\text{ق(س)}| \text{ . د س}$

جـ مساحة المنطقة المحصورة بين ق (س) ومحور السينات في الفترة [٠ ، ٥]

الحل

أ $\int_{٠}^{٥} \text{ق(س) . د س} = \int_{٠}^{١} \text{ق(س) . د س} + \int_{١}^{٤} \text{ق(س) . د س} + \int_{٤}^{٥} \text{ق(س) . د س}$

$= \frac{١}{٢}(١+٢)(١) + \frac{١}{٢}(١+٣)(٢) - \frac{١}{٢}(١)(١) = ٥$

ب $\int_{٠}^{٥} |\text{ق(س)}| \text{ . د س} = \frac{١}{٢}(١+٢)(١) + \frac{١}{٢}(١+٣)(٢) + \frac{١}{٢}(١)(١) = ٥{,}٥$

جـ $م = \int_{٠}^{٥} |\text{ق(س)}| \text{ . د س} = ٥{,}٥$ وحدة مساحة .

ثانيا : حساب منطقة محصورة بين منحنى اقترانين .

قاعدة إذا كان كل من ق و هـ اقترانا متصلا على الفترة [أ ، ب] فإن مساحة المنطقة التي تقع بين رسميهما في [أ ، ب] تساوي $م = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} |\text{ق(س) − هـ(س)}| \text{ . د س}$

– لإيجاد مساحة منطقة محصورة بين منحنيين أو أكثر اتبع الخطوات الاتية :

١ـ ارسم منحنى كل اقتران وحدد المنطقة المطلوب حساب مساحتها .

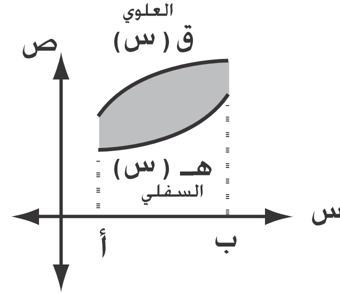
٢ـ جزيء المنطقة المطلوب حساب مساحتها إلى مناطق جزئية بحيث تكون كل منها محصورة بين منحنيين أو منحنى ومحور السينات .

٣ـ جد الإحداثيات السينية لنقط تقاطع المنحنيات مع بعضها ومع محور السينات . (إن أمكن)

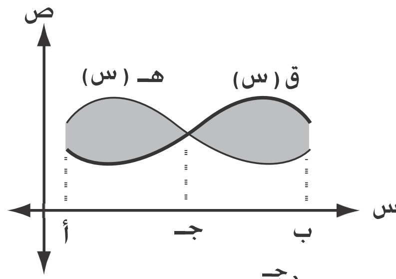
٤ـ جد مساحة كل منطقة جزئية ، ثم جد المساحة المطلوبة بجمع مساحات المناطق الجزئية .

انظر الأشكال الاتية

حيث م مساحة المنطقة المحدودة بين منحنى الاقترانين ق و هـ في [أ ، ب] .



$$\text{م} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \left(\underset{\text{العلوي}}{\text{ق}(\text{س})} - \underset{\text{السفلي}}{\text{هـ}(\text{س})} \right) . \text{د س}$$



$$\text{م} = \int_{\text{أ}}^{\text{جـ}} \left(\text{هـ}(\text{س}) - \text{ق}(\text{س}) \right) . \text{د س} + \int_{\text{جـ}}^{\text{ب}} \left(\text{ق}(\text{س}) - \text{هـ}(\text{س}) \right) . \text{د س}$$

مثال جد مساحة المنطقة المحصورة بين رسمي الاقترانين $\text{ص} = \sqrt{\text{س}}$ ، $\text{ص} = \frac{1}{3}\text{س} + \frac{2}{3}$

الحل نجد الإحداثي السيني لنقاط تقاطع الاقترانين .

$\sqrt{\text{س}} = \frac{1}{3}\text{س} + \frac{2}{3} \longleftarrow \text{س} = \left(\frac{1}{3}\text{س} + \frac{2}{3}\right)^2 \longleftarrow \text{س} = \frac{1}{9}\text{س}^2 + \frac{4}{9}\text{س} + \frac{4}{9}$

$\longleftarrow 9\text{س} = \text{س}^2 + 4\text{س} + 4 \longleftarrow \text{س}^2 - 5\text{س} + 4 = 0$

$\longleftarrow (\text{س} - 1)(\text{س} - 4) = 0 \longleftarrow \text{س} = 1$ ، $\text{س} = 4$

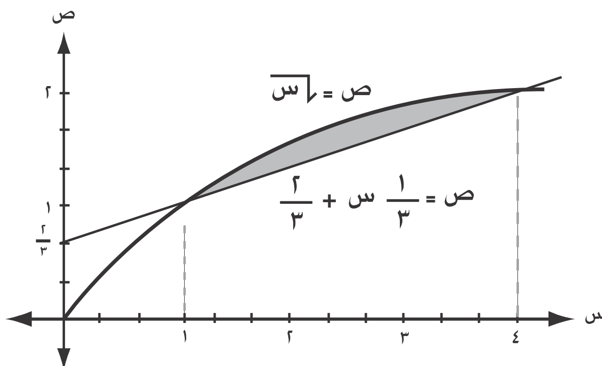
$\sqrt{\text{س}} > \frac{1}{3}\text{س} + \frac{2}{3}$

١ ———— ٤

$$\text{م} = \int_{1}^{4} \left(\sqrt{\text{س}} - \left(\frac{1}{3}\text{س} + \frac{2}{3} \right) \right) . \text{د س} = \left(\frac{2}{3}\text{س}^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{6}\text{س}^2 - \frac{2}{3}\text{س} \right) \Big|_{1}^{4}$$

$$= \left(\frac{2}{3}(4)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{6}(4)^2 - \frac{2}{3}(4) \right) - \left(\frac{2}{3}(1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{6}(1)^2 - \frac{2}{3}(1) \right)$$

$= \frac{1}{6}$ وحدة مساحة .



مثال جد مساحة المنطقة المحصورة بين رسمي الاقترانين ص = ظا س ، ص = ١
بدءا من محور الصادات وحتى أول إحداثي سيني موجب لنقطة تقاطع الاقترانين .

(الحل) ظا س = ١ ⟵ س = $\frac{\pi}{4}$

١ > ظا س

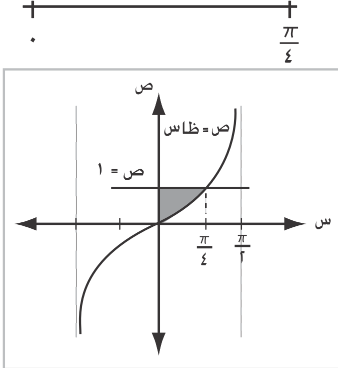
٠ — $\frac{\pi}{4}$

م = $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (1 - \text{ظا س})\, \text{د س} = \left(\text{س} + \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{جتا س}| \right) \Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}}$

= $\left(\frac{\pi}{4} + \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{جتا} \frac{\pi}{4}| \right) - \left(0 + \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{جتا}(0)| \right)$

= $\frac{\pi}{4} + \text{لو}_{\text{هـ}} \frac{1}{\sqrt{2}} - \text{لو}_{\text{هـ}} 1$

= $\frac{\pi}{4} + \text{لو}_{\text{هـ}} \frac{1}{\sqrt{2}}$ وحدة مساحة .



مثال جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين ص = $\sqrt{\text{س}}$ ، ص = $\sqrt[3]{\text{س}}$

(الحل) $\sqrt{\text{س}} = \sqrt[3]{\text{س}}$ ⟵ $(\sqrt{\text{س}})^6 = (\sqrt[3]{\text{س}})^6$ ⟵ $\text{س}^3 = \text{س}^2$

⟵ $\text{س}^3 - \text{س}^2 = 0$ ⟵ $\text{س}^2(\text{س} - 1) = 0$ ⟵ س = ٠ ، س = ١

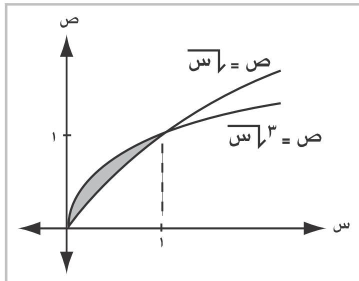
$\sqrt[3]{\text{س}} > \sqrt{\text{س}}$

٠ — ١

م = $\int_{0}^{1} (\sqrt[3]{\text{س}} - \sqrt{\text{س}})\, \text{د س} = \left(\frac{3}{4}\text{س}^{\frac{4}{3}} - \frac{2}{3}\text{س}^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_{0}^{1}$

= $\left(\frac{3}{4}(1)^{\frac{4}{3}} - \frac{2}{3}(1)^{\frac{3}{2}} \right) - \left(\frac{3}{4}(0)^{\frac{4}{3}} - \frac{2}{3}(0)^{\frac{3}{2}} \right)$

= $\frac{1}{12}$ وحدة مساحة .



مثال جد مساحة المنطقة الواقعة في الربع الأول والمحصورة بين المستقيم ٤ ص + ٣ س = ٧
والمنحنى ص = س^{-2}

(الحل) نجد الإحداثي السيني لنقاط تقاطع الاقترانين .

$\frac{4}{\text{س}^2}$ + ٣ س = ٧ ⟵ ٤ + ٣ س^3 = ٧ س^2 ⟵ ٣ س^3 − ٧ س^2 + ٤ = ٠

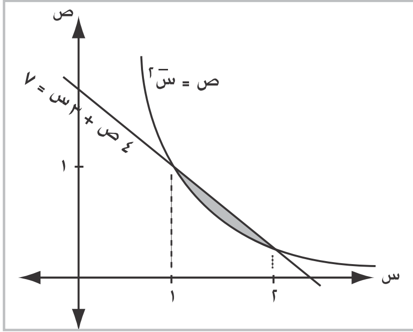
بالتجريب س = ١ أحد جذور المعادلة . وباستخدام القسمة التركيبية

١	٣	−٧	٠	٤
		٣	−٤	−٤
	٣	−٤	−٤	٠

⟵ (س − ١) (٣ س^2 − ٤ س − ٤) = ٠ ⟵ (س − ١)(٣ س + ٢) (س − ٢) = ٠ .

$$\frac{١}{٤}(٧-٣\text{س}) > \text{س}^{-٢}$$

(على الفترة من ١ إلى ٢)



س = ١ ، س = ٢ ، س = $\frac{-٢}{٣}$ ×

$$\text{م} = \int_{١}^{٢} \left(\frac{١}{٤}(٧-٣\text{س}) - \text{س}^{-٢}\right).\text{د س}$$

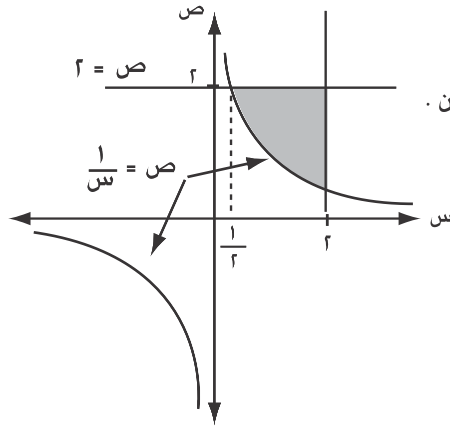
$$= \left(\frac{١}{٤}(٧\text{س} - \frac{٣}{٢}\text{س}^{٢}) + \text{س}^{-١}\right)\Big|_{١}^{٢}$$

$$= \left(\frac{١}{٤}(٧)(٢) - \frac{٣}{٢}(٢)^{٢} + \frac{١}{٢}\right)$$

$$- \left(\frac{١}{٤}(٧)(١) - \frac{٣}{٢}(١)^{٢} + \frac{١}{١}\right)$$

$$= \frac{١}{٨}$$ وحدة مساحة .

مثال جد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنى س ص = ١ والمستقيمين ص = ٢ ، س = ٢



(الحل) س ص = ١ ← ص = $\frac{١}{\text{س}}$

نجد الإحداثي السيني لنقاط تقاطع الاقترانين .

$\frac{١}{\text{س}} = ٢$ ← س = $\frac{١}{٢}$

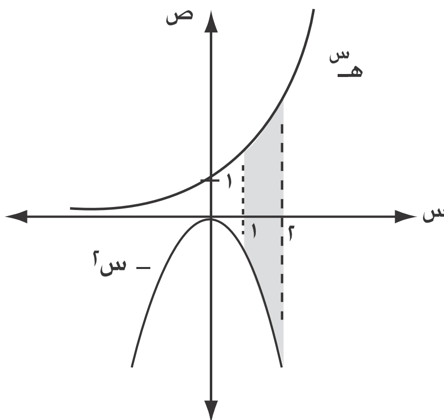
$٢ > \frac{١}{\text{س}}$ (على الفترة من $\frac{١}{٢}$ إلى ١)

$$\text{م} = \int_{\frac{١}{٢}}^{٢} \left(٢ - \frac{١}{\text{س}}\right).\text{د س} = \left(٢\text{س} - \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}|\right)\Big|_{\frac{١}{٢}}^{٢}$$

$$= \left(٢(٢) - \text{لو}_{\text{هـ}}٢\right) - \left(٢(\frac{١}{٢}) - \text{لو}_{\text{هـ}}\frac{١}{٢}\right)$$

$$= ٤ - \text{لو}_{\text{هـ}}٢ - ١ - \text{لو}_{\text{هـ}}٢ = ٣ - ٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}٢$$ وحدة مساحة .

مثال جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = $-\text{س}^{٢}$ ومنحنى الاقتران ل(س) = $\text{هـ}^{\text{س}}$ في الفترة [١، ٢] .



(الحل)

المنحنيان لا يتقاطعان

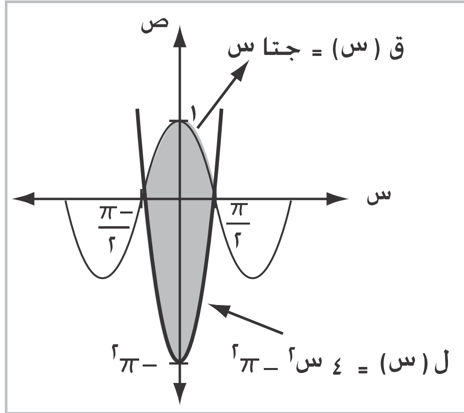
$$\text{م} = \int_{١}^{٢} \left(\text{هـ}^{\text{س}} - -\text{س}^{٢}\right).\text{د س}$$

$$= \left(\text{هـ}^{\text{س}} + \frac{١}{٣}\text{س}^{٣}\right)\Big|_{١}^{٢}$$

$$= \left(\text{هـ}^{٢} + \frac{١}{٣}(٢)^{٣}\right) - \left(\text{هـ}^{١} + \frac{١}{٣}(١)^{٣}\right)$$

$$= \text{هـ}^{٢} - \text{هـ} + \frac{٧}{٣}$$ وحدة مساحة .

مثال جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق (س) = جتا س ومنحنى الاقتران ل (س) = ٤ س^2 − π^2 .



الحل

جتا س = ٤ س^2 − π^2

⟵ س = $\frac{\pi}{2}$ ، س = $\frac{-\pi}{2}$

جتا س > ٤ س^2 − π^2

$\frac{-\pi}{2}$ ———— $\frac{\pi}{2}$

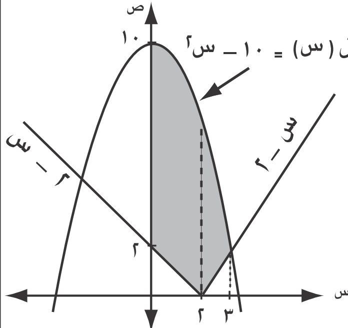
م = $\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$ (جتا س − (٤ س^2 − π^2)) . د س

= (جا س − $\frac{4}{3}$ س^3 + π^2 س) $\Big|_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$

= (جا ($\frac{\pi}{2}$) − $\frac{4}{3}$ ($\frac{\pi}{2}$)^3 + π^2 ($\frac{\pi}{2}$)) − (جا ($\frac{-\pi}{2}$) − $\frac{4}{3}$ ($\frac{-\pi}{2}$)^3 + π^2 ($\frac{-\pi}{2}$))

= ٢ + $\frac{2}{3}$ π^3 وحدة مساحة .

مثال جد مساحة المنطقة المحصورة بين بيان الاقتران ق (س) = | س − ٢ | ومنحنى ل (س) = ١٠ − س^2 ومحور الصادات في الربع الأول .



الحل

ق (س) = | س − ٢ |

س − ٢ = ٠ ⟵ س = ٢

٢ − س | س − ٢
٢

نجد الإحداثي السيني لنقاط تقاطع المنحنيين .

عندما س ≤ ٢

١٠ − س^2 = س − ٢ ⟵ س^2 + س − ١٢ = ٠ ⟵ (س − ٣) (س + ٤) = ٠

⟵ س = ٣ ، س = −٤ ✗

م = $\int_{0}^{2}$ ((١٠ − س^2) − (٢ − س)) . د س + $\int_{2}^{3}$ ((١٠ − س^2) − (س − ٢)) . د س

= $\int_{0}^{2}$ (− س^2 + س + ٨) . د س + $\int_{2}^{3}$ (− س^2 − س + ١٢) . د س

= ($\frac{-1}{3}$ س^3 + $\frac{1}{2}$ س^2 + ٨ س) $\Big|_{0}^{2}$ + ($\frac{-1}{3}$ س^3 − $\frac{1}{2}$ س^2 + ١٢ س) $\Big|_{2}^{3}$

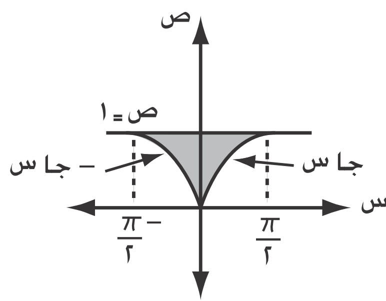
$= \left(\frac{-1}{3}(2)^3 + \frac{1}{2}(2)^2 + 8(2)\right) - \left(\frac{-1}{3}(0)^3 + \frac{1}{2}(0)^2 + 8(0)\right)$

$+ \left(\frac{-1}{3}(3)^3 - \frac{1}{2}(3)^2 + 12(3)\right) - \left(\frac{-1}{3}(2)^3 - \frac{1}{2}(2)^2 + 12(2)\right)$

= ١٨,٥ وحدة مساحة .

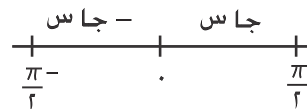
مثال جد مساحة المنطقة المحصورة بين المستقيم ص = ١ ومنحنى الاقتران

ق (س) = | جا س | ، س ∋ $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$



الحل

ق (س) = | جا س |



نجد الإحداثي السيني لنقاط تقاطع الاقترانين .

عندما $\frac{-\pi}{2} \leq$ س $\leq$ ٠

– جا س = ١ ⟵ جا س = –١ ⟵ س = $\frac{-\pi}{2}$

عندما ٠ $\leq$ س $\leq \frac{\pi}{2}$

جا س = ١ ⟵ س = $\frac{\pi}{2}$

م = ٢ $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}$ (١ – جا س) . د س لأن المساحات الجزئية متساوية .

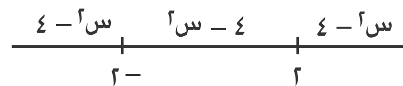
= ٢ (س + جتا س) $\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}$ = ٢ ($\frac{\pi}{2}$ + جتا $\frac{\pi}{2}$) – ٢ (٠ + جتا ٠) = π – ٢ وحدة مساحة .

مثال احسب مساحة المنطقة المظللة في الشكل المجاور حيث ق (س) = | س^2 – ٤ | ، هـ (س) = ٥

الحل

ق (س) = | س^2 – ٤ |

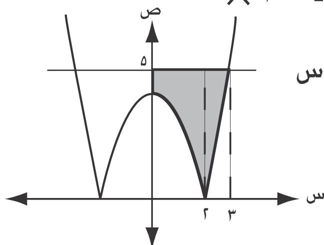
س^2 – ٤ = ٠ ⟵ س = ٢ ، س = –٢



نجد الإحداثي السيني لنقاط تقاطع الاقترانين .

عندما ٢ $\leq$ س

س^2 – ٤ = ٥ ⟵ س^2 = ٩ ⟵ س = ٣ ، س = –٣ ✕



م = $\int_{0}^{2}$ (٥ – (٤ – س^2)) . د س + $\int_{2}^{3}$ (٥ – (س^2 – ٤)) . د س

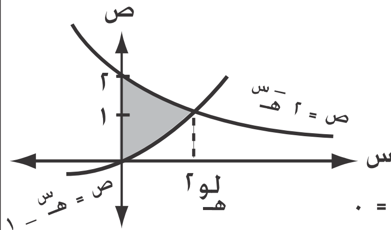
= $\int_{0}^{2}$ (١ + س^2) . د س + $\int_{2}^{3}$ (٩ – س^2) . د س

= (س + $\frac{1}{3}$ س^3) $\Big|_{0}^{2}$ + (٩ س – $\frac{1}{3}$ س^3) $\Big|_{2}^{3}$

$= \left((٢ + \frac{١}{٣}(٢)^٣) - ٠ \right) + \left((٩)(٣) - \frac{١}{٣}(٣)^٣ \right) - \left((٩)(٢) - \frac{١}{٣}(٢)^٣ \right)$

$= \frac{٢٢}{٣}$ وحدة مساحة .

مثال جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين : $ص = ٢ هـ^{-س}$ ، $ص = هـ^{س} - ١$ ، ومحور الصادات .



(الحل)

نجد الإحداثي السيني لنقاط تقاطع المنحنيين .

$٢ هـ^{-س} = هـ^{س} - ١ \longleftarrow ٢ = هـ^{٢س} - هـ^{س}$

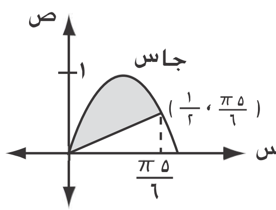
$\longleftarrow هـ^{٢س} - هـ^{س} - ٢ = ٠ \longleftarrow (هـ^{س} - ٢)(هـ^{س} + ١) = ٠$

$\longleftarrow هـ^{س} = ٢ \longleftarrow س = لو_هـ ٢$ ، $هـ^{س} = -١$ ✗

$م = \int_{٠}^{لو_هـ ٢} \left(٢ هـ^{-س} - (هـ^{س} - ١) \right) . د س = \left(-٢ هـ^{-س} - هـ^{س} + س \right) \Big|_{٠}^{لو_هـ ٢}$

$= \left(-٢ هـ^{-لو_هـ ٢} - هـ^{لو_هـ ٢} + لو_هـ ٢ \right) - \left(-٢ هـ^{-(٠)} - هـ^{(٠)} + ٠ \right) = لو_هـ ٢$ وحدة مساحة .

مثال احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $ص = جا س$ ، والقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $(٠ ، ٠)$ ، $\left(\frac{٥\pi}{٦} ، \frac{١}{٢} \right)$



(الحل) نجد معادلة القطعة المستقيمة .

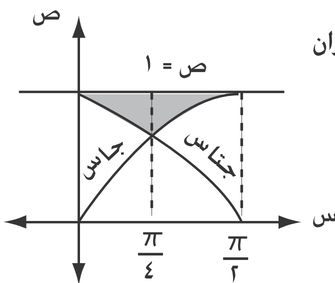
$ص - ٠ = \frac{\frac{١}{٢}}{\frac{٥\pi}{٦}} (س - ٠) \longleftarrow ص = \frac{٣}{٥\pi} س$

$م = \int_{٠}^{\frac{٥\pi}{٦}} \left(جا س - \frac{٣}{٥\pi} س \right) . د س = \left(- جتا س - \frac{٣}{١٠\pi} س^٢ \right) \Big|_{٠}^{\frac{٥\pi}{٦}}$

$= \left(- جتا \frac{٥\pi}{٦} - \frac{٣}{١٠\pi} \left(\frac{٥\pi}{٦}\right)^٢ \right) - \left(- جتا ٠ - \frac{٣}{١٠\pi} (٠)^٢ \right)$

$= ١ + \frac{\sqrt{٣}}{٢} - \frac{٥\pi}{٢٤}$ وحدة مساحة .

مثال جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $ق(س) = جا س$ ومنحنى الاقتران $هـ(س) = جتا س$ والمستقيم $ص = ١$ في الفترة $\left[٠ ، \frac{\pi}{٢} \right]$



(الحل)

نجد الإحداثي السيني لنقاط تقاطع الاقترانات .

$جا س = جتا س$	$جتا س = ١$	$جا س = ١$
$\longleftarrow س = \frac{\pi}{٤}$	$\longleftarrow س = ٠$	$\longleftarrow س = \frac{\pi}{٢}$

$م = \int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} (١ - جتا س) . د س + \int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٢}} (١ - جا س) . د س = (س - جا س) \Big|_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} + (س + جتا س) \Big|_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٢}}$

$$= \left(\frac{\pi}{4} - \text{جا}\frac{\pi}{4}\right) - \left(0 - \text{جا}\,0\right) + \left(\frac{\pi}{2} + \text{جتا}\frac{\pi}{2}\right) - \left(\frac{\pi}{4} + \text{جتا}\frac{\pi}{4}\right)$$

(حيث $\text{جا}\frac{\pi}{4} = \text{جتا}\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ، $\text{جا}\,0 = \text{جتا}\frac{\pi}{2} = 0$)

$= \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\sqrt{2}}$ وحدة مساحة .

مثال جد مساحة المنطقة المحصورة بين المستقيم ص = س + ١ ومنحنى الاقتران ق (س) = جتا س حيث س $\in$ [٠ ، $\frac{\pi}{2}$] ومحور السينات .

الحل نجد الإحداثي السيني لنقاط تقاطع الاقترانات .

جتا س = س + ١ ← س = ٠ | جتا س = ٠ ← س = $\frac{\pi}{2}$ | س + ١ = ٠ ← س = −١

$$\text{م} = \int_{-1}^{0} (\text{س} + 1)\,.\,\text{د س} + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جتا س}\,.\,\text{د س}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\text{س}^2 + \text{س}\right)\Big|_{-1}^{0} + \text{جا س}\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{1}{2}(0)^2 + (0)\right) - \left(\frac{1}{2}(-1)^2 + (-1)\right) + \text{جا}\frac{\pi}{2} - \text{جا}\,0$$

$= \frac{3}{2}$ وحدة مساحة .

مثال جد قيمة أ بحيث أن المستقيم ص = أ س يقسم المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران ق (س) = ٢ س − س² ومحور السينات إلى قسمين متساويين .

الحل بداية نجد المساحة المحصورة بين منحنى ق (س) ومحور السينات .

٢ س − س² = ٠ ← (٢ − س) س = ٠ .

← س = ٢ ، س = ٠

$$\text{م} = \int_{0}^{2} (2\,\text{س} - \text{س}^2)\,.\,\text{د س} = \left(\text{س}^2 - \frac{1}{3}\text{س}^3\right)\Big|_{0}^{2}$$

$= \left((2)^2 - \frac{1}{3}(2)^3\right) - \left((0)^2 - \frac{1}{3}(0)^3\right) = \frac{4}{3}$ وحدة مساحة .

نجد الإحداثي السيني لنقاط تقاطع المستقيم مع المنحنى .

٢ س − س² = أ س ← س (س + (أ − ٢)) = ٠ ← س = ٠ ، س = ٢ − أ

$$\text{م}_2 = \text{م}_1 = \int_{0}^{2-\text{أ}} (2\,\text{س} - \text{س}^2 - \text{أ س})\,.\,\text{د س} = \int_{0}^{2-\text{أ}} ((2-\text{أ})\,\text{س} - \text{س}^2)\,.\,\text{د س}$$

$$\leftarrow \left(\frac{(2-\text{أ})}{2}\text{س}^2 - \frac{1}{3}\text{س}^3\right)\Big|_{0}^{2-\text{أ}} = \frac{2}{3} \leftarrow \frac{(2-\text{أ})}{2}(2-\text{أ})^2 - \frac{1}{3}(2-\text{أ})^3 - 0 = \frac{2}{3}$$

$$\leftarrow \frac{(2-\text{أ})^3}{6} = \frac{2}{3} \leftarrow (2-\text{أ})^3 = 4 \leftarrow 2 - \text{أ} = \sqrt[3]{4} \leftarrow \text{أ} = 2 - \sqrt[3]{4}$$

مثال جد قيمة جـ بحيث أن المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران ق (س) = س² − جـ² ومنحنى الاقتران هـ (س) = جـ² − س² تساوي $\frac{64}{3}$ وحدة مساحة .

الحل نجد الإحداثي السيني لنقاط تقاطع المنحنيين .

جـ² − س² = س² − جـ² ← ٢ س² = ٢ جـ² ← س² = جـ²

← س = جـ ، س = − جـ

$$م = \int_{-جـ}^{جـ} \left(جـ^{2} - س^{2} - (س^{2} - جـ^{2})\right).\,د\,س = \int_{-جـ}^{جـ} (2جـ^{2} - 2س^{2}).\,د\,س$$

$$= \left(2جـ^{2}\,س - \frac{2}{3}س^{3}\right)\Big|_{-جـ}^{جـ} = 2جـ^{2}(جـ) - \frac{2}{3}(جـ)^{3} - \left(2جـ^{2}(-جـ) - \frac{2}{3}(-جـ)^{3}\right) = \frac{64}{3}$$

$$\leftarrow \frac{8}{3}(جـ)^{3} = \frac{64}{3} \leftarrow جـ^{3} = 8 \leftarrow جـ = 2$$

مثال جد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنى $ص^{2} = 4 + س$ والمستقيم $س + 2ص = 4$

الحل نتعامل مع الاقترانين $س = ق(ص) = ص^{2} - 4$ و $س = هـ(ص) = 4 - 2ص$

ولتحديد الفترة التي سنجري عليها التكامل بدلالة ص نضع $ق(ص) = هـ(ص)$

$$\leftarrow ص^{2} - 4 = 4 - 2ص \leftarrow ص^{2} + 2ص - 8 = 0 \leftarrow (ص - 2)(ص + 4) = 0$$

$$\leftarrow ص = 2 \text{ ، } ص = -4$$

$$م = \int_{-4}^{2} \left(4 - 2ص - (ص^{2} - 4)\right).\,د\,ص$$

$$= \int_{-4}^{2} (8 - 2ص - ص^{2}).\,د\,ص = \left(8ص - ص^{2} - \frac{1}{3}ص^{3}\right)\Big|_{-4}^{2}$$

$$= \left(8(2) - (2)^{2} - \frac{1}{3}(2)^{3}\right) - \left(8(-4) - (-4)^{2} - \frac{1}{3}(-4)^{3}\right)$$

$= 36$ وحدة مساحة .

مثال جد مساحة المنطقة الواقعة في الربع الأول والمحصورة بين المنحنى $ص^{2} = 24 - 8س$ ومحور السينات .

الحل $ص^{2} = 24 - 8س \leftarrow س = 3 - \frac{ص^{2}}{8}$

معادلة محور الصادات $س = 0$

$$0 = 3 - \frac{ص^{2}}{8} \leftarrow ص^{2} = 24 \leftarrow ص = \sqrt{24} \text{ ، } ص = -\sqrt{24}$$

$$م = \int_{0}^{\sqrt{24}} \left(3 - \frac{ص^{2}}{8} - 0\right).\,د\,ص = \left(3ص - \frac{ص^{3}}{24}\right)\Big|_{0}^{\sqrt{24}}$$

$= \left(3\sqrt{24} - \frac{(\sqrt{24})^{3}}{24}\right) - 0 = 2\sqrt{24}$ وحدة مساحة .

مثال جد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $ص = س^{2}$ ، $س = ص^{2}$

الحل نجد الإحداثي السيني لنقاط تقاطع المنحنيين .

$$س = ص^{2} = س^{4} \leftarrow س^{4} - س = 0 \leftarrow س(س^{3} - 1) = 0$$

$$\leftarrow س = 0 \text{ ، } س = 1$$

$$ص = س^{2} \leftarrow ص = \pm\sqrt{س}$$

$$م = \int_{0}^{1} (\sqrt{س} - س^{2}).\,د\,س = \int_{0}^{1} (س^{\frac{1}{2}} - س^{2}).\,د\,س$$

$= \left(\frac{2}{3}س^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}س^{3}\right)\Big|_{0}^{1} = \left(\frac{2}{3}(1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}(1)^{3}\right) - 0 = \frac{1}{3}$ وحدة مساحة .

مثال جد قيمة أ بحيث أن المستقيم س = أ يقسم المساحة المحصورة بين المنحنى س = $\sqrt{ص}$ والمستقيم س = ٢ ، ومحور السينات إلى قسمين متساويين .

الحل س = $\sqrt{ص}$ ⟵ ص = $س^٢$

م = $\int_{٠}^{٢} س^٢ . د س = ٢ \int_{٠}^{أ} س^٢ . د س$

⟵ $\frac{١}{٣} س^٣ \Big|_{٠}^{٢} = \frac{٢}{٣} س^٣ \Big|_{٠}^{أ}$

⟵ $\frac{١}{٣} (٢)^٣ - ٠ = \frac{٢}{٣} (أ)^٣ - ٠$ ⟵ $\frac{٨}{٣} = \frac{٢}{٣} أ^٣$ ⟵ $أ^٣ = ٤$ ⟵ أ = $\sqrt[٣]{٤}$

مثال إذا كان المستقيم ص = جـ يقسم المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران ص = $س^٢$ والمستقيم ص = ٤ إلى قسمين متساويين . فجد قيمة جـ .

الحل نجد الإحداثي السيني لنقاط التقاطع .

$س^٢ = ٤$ ⟵ س = ± ٢ | $س^٢$ = جـ ⟵ س = ± $\sqrt{جـ}$

لاحظ أن المخطط المجاور متناظر بالنسبة للمحور ص .

$\int_{٠}^{\sqrt{جـ}} (جـ - س^٢) . د س = \frac{١}{٢} \int_{٠}^{٢} (٤ - س^٢) . د س$

⟵ $(جـ س - \frac{١}{٣} س^٣) \Big|_{٠}^{\sqrt{جـ}} = \frac{١}{٢} (٤ س - \frac{١}{٣} س^٣) \Big|_{٠}^{٢}$

⟵ $(جـ (\sqrt{جـ}) - \frac{١}{٣} (\sqrt{جـ})^٣) - (٠) = \frac{١}{٢} ((٤ (٢) - \frac{١}{٣} (٢)^٣) - (٠))$

⟵ $\frac{٢}{٣} (جـ)^{\frac{٣}{٢}} = \frac{٨}{٣}$ ⟵ $(جـ)^{\frac{٣}{٢}} = ٤$ ⟵ جـ = $(٤)^{\frac{٢}{٣}} = \sqrt[٣]{١٦}$

مثال جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق (س) = جا س ومنحنى الاقتران هـ (س) = جتا س في الفترة $[\frac{\pi}{٤} ، \frac{٥\pi}{٤}]$

الحل نجد الإحداثي السيني لنقاط تقاطع المنحنيين في الفترة المعطاة .

جا س = جتا س ⟵ ظا س = ١ ⟵ س = $\frac{\pi}{٤}$ ، س = $\frac{٥\pi}{٤}$

م = $\int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{٥\pi}{٤}} (جا س - جتا س) . د س = (- جتا س - جا س) \Big|_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{٥\pi}{٤}}$

= $(- جتا (\frac{٥\pi}{٤}) - جا (\frac{٥\pi}{٤})) - (- جتا (\frac{\pi}{٤}) - جا (\frac{\pi}{٤}))$

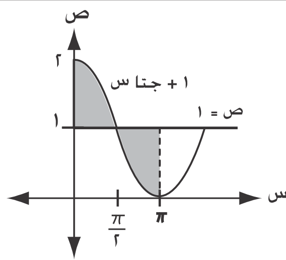
(حيث $جتا (\frac{٥\pi}{٤}) = جا (\frac{٥\pi}{٤}) = \frac{-١}{\sqrt{٢}}$ ، $جتا (\frac{\pi}{٤}) = جا (\frac{\pi}{٤}) = \frac{١}{\sqrt{٢}}$)

= $\frac{٤}{\sqrt{٢}} = ٢\sqrt{٢}$ وحدة مساحة .

مثال جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق (س) = ١ + جتا س ، والمستقيم ص = ١ في الفترة [٠ ، π] .

الحل نجد الإحداثي السيني لنقاط تقاطع المنحنيين في الفترة المعطاة .

١ = ١ + جتا س ⟵ جتا س = ٠ ⟵ س = $\frac{\pi}{٢}$



$$م = \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} ((١ + جتا\,س) - ١).\,د\,س + \int_{\frac{\pi}{٢}}^{\pi} (١ - (١ + جتا\,س)).\,د\,س$$

$$= \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} جتا\,س\,.\,د\,س + \int_{\frac{\pi}{٢}}^{\pi} -جتا\,س\,.\,د\,س$$

$$= جا\,س \Big|_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} + -جا\,س \Big|_{\frac{\pi}{٢}}^{\pi}$$

$= (جا(\frac{\pi}{٢}) - جا(٠)) + (-جا(\pi) - -جا(\frac{\pi}{٢})) = ٢$ وحدة مساحة .

مثال جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $ص = -\sqrt{س}$ والمستقيم $ص = س - ٦$ ومحور السينات .

الحل نجد الإحداثي السيني لنقاط تقاطع الاقترانات .

$-\sqrt{س} = س - ٦ \leftarrow س + \sqrt{س} - ٦ = ٠$

$\leftarrow (\sqrt{س} + ٣)(\sqrt{س} - ٢) = ٠$

$\sqrt{س} - ٢ = ٠ \leftarrow \sqrt{س} = ٢ \leftarrow س = ٤$ ، $\sqrt{س} + ٣ = ٠$ ×

$س - ٦ = ٠ \leftarrow س = ٦$ | $-\sqrt{س} = ٠ \leftarrow س = ٠$

$$م = \int_{٠}^{٤} (٠ - -\sqrt{س}).\,د\,س + \int_{٤}^{٦} (٠ - (س - ٦)).\,د\,س = \int_{٠}^{٤} \sqrt{س}\,.\,د\,س + \int_{٤}^{٦} (٦ - س).\,د\,س$$

$$= \frac{٢}{٣} س^{\frac{٣}{٢}} \Big|_{٠}^{٤} + (٦س - \frac{١}{٢} س^٢) \Big|_{٤}^{٦}$$

$= (\frac{٢}{٣} (٤)^{\frac{٣}{٢}} - ٠) + ((٦(٦) - \frac{١}{٢}(٦)^٢) - (٦(٤) - \frac{١}{٢}(٤)^٢)) = \frac{٢٢}{٣}$ وحدة مساحة .

مثال جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $ص = س^٣$ والمستقيم $س + ص = ٢$ ومحور السينات .

الحل

$س + ص = ٢ \leftarrow ص = ٢ - س$ | محور السينات $ص = ٠$ | $ص = س^٣$

نجد الإحداثي السيني لنقاط تقاطع الاقترانات .

$س^٣ = ٢ - س \leftarrow س^٣ + س - ٢ = ٠ \leftarrow (س - ١)(س^٢ + س + ٢) = ٠$

$(س - ١) = ٠ \leftarrow س = ١$ ، $(س^٢ + س + ٢)$ عبارة تربيعية مميزها سالب (لا تحلل)

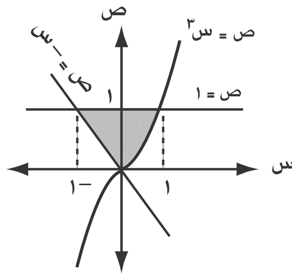
$س^٣ = ٠ \leftarrow س = ٠$ | $٢ - س = ٠ \leftarrow س = ٢$

$$م = \int_{٠}^{١} (س^٣ - ٠).\,د\,س + \int_{١}^{٢} (٢ - س).\,د\,س = \frac{١}{٤} س^٤ \Big|_{٠}^{١} + (٢س - \frac{١}{٢} س^٢) \Big|_{١}^{٢}$$

$= \frac{١}{٤}(١)^٤ - ٠ + ((٢(٢) - \frac{١}{٢}(٢)^٢) - (٢(١) - \frac{١}{٢}(١)^٢)) = \frac{٣}{٤}$ وحدة مساحة .

مثال جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $ص = س^٣$ ، والمستقيمين $ص = -س$ ، $ص = ١$

الحل نجد الإحداثي السيني لنقاط تقاطع الاقترانات .



$س^٣ = −س \leftarrow س^٣ + س = ٠ \leftarrow س(س^٢ + ١) = ٠$.

$\leftarrow$ س = ٠ ، $س^٢ + ١$ عبارة تربيعية مميزها سالب (لا تحلل)

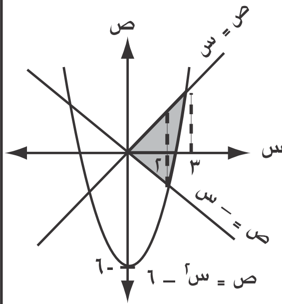
$س^٣ = ١ \leftarrow س = ١$ | $−س = ١ \leftarrow س = −١$

$م = \int_{−١}^{٠} (١ − −س) . د س + \int_{٠}^{١} (١ − س^٣) . د س$

$= (س + \frac{١}{٢} س^٢) \Big|_{−١}^{٠} + (س − \frac{١}{٤} س^٤) \Big|_{٠}^{١}$

$= (٠) − ((−١) + \frac{١}{٢}(−١)^٢) + ((١) − \frac{١}{٤}(١)^٤) − (٠) = \frac{٥}{٤}$ وحدة مساحة .

مثال جد مساحة المنطقة الواقعة فوق المنحنى $ص = س^٢ − ٦$ وتحت المستقيم ص = س وفوق المستقيم ص = − س



(الحل) نجد الإحداثي السيني لنقاط تقاطع الاقترانات .

$س^٢ − ٦ = س \leftarrow س^٢ − س − ٦ = ٠$.

$\leftarrow (س − ٣)(س + ٢) = ٠ \leftarrow س = ٣ ، س = −٢$

$س^٢ − ٦ = − س \leftarrow س^٢ + س − ٦ = ٠$.

$\leftarrow (س − ٢)(س + ٣) = ٠ \leftarrow س = ٢ ، س = −٣$

$س = − س \leftarrow ٢ س = ٠ \leftarrow س = ٠$.

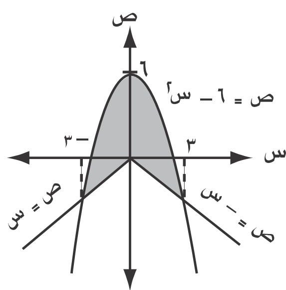
$م = \int_{٠}^{٢} (س − − س) . د س + \int_{٢}^{٣} (س − (س^٢ − ٦)) . د س$

$= س^٢ \Big|_{٠}^{٢} + (\frac{١}{٢} س^٢ − \frac{١}{٣} س^٣ + ٦ س) \Big|_{٢}^{٣}$

$= (٢)^٢ − ٠ + (\frac{١}{٢}(٣)^٢ − \frac{١}{٣}(٣)^٣ + ٦(٣)) − (\frac{١}{٢}(٢)^٢ − \frac{١}{٣}(٢)^٣ + ٦(٢))$

$= \frac{٣٧}{٦}$ وحدة مساحة .

مثال جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $ص = ٦ − س^٢$ والمستقيمين ص = س ، س $\geq$ ٠ ، ص = − س ، س $\leq$ ٠ .



المخطط متناظر بالنسبة للمحور ص

(الحل) نجد الإحداثي السيني لنقاط تقاطع الاقترانات .

$٦ − س^٢ = س \leftarrow س^٢ + س − ٦ = ٠$.

$\leftarrow (س − ٢)(س + ٣) = ٠ \leftarrow س = −٣ ، س = ٢$ ✗

$٦ − س^٢ = − س \leftarrow س^٢ − س − ٦ = ٠$.

$\leftarrow (س − ٣)(س + ٢) = ٠ \leftarrow س = ٣ ، س = −٢$ ✗

$س = − س \leftarrow ٢ س = ٠ \leftarrow س = ٠$.

$م = ٢ \int_{٠}^{٣} (٦ − س^٢ − − س) . د س$

$= ٢ (٦ س − \frac{١}{٣} س^٣ + \frac{١}{٢} س^٢) \Big|_{٠}^{٣} = ٢ (٦(٣) − \frac{١}{٣}(٣)^٣ + \frac{١}{٢}(٣)^٢) − (٠)$

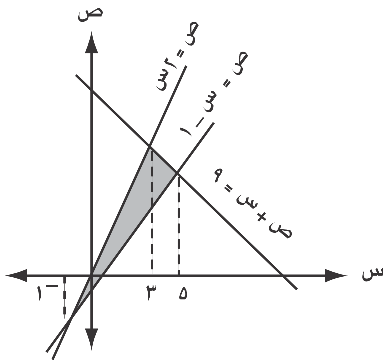
$= ٢٧$ وحدة مساحة .

مثال جد مساحة المنطقة المحصورة بين المستقيمات : ص = ٢س ، ص + س = ٩ ، ص = س _ ١

الحل ص + س = ٩ ⟵ ص = ٩ _ س

نجد الإحداثي السيني لنقاط تقاطع الاقترانات .

٩ _ س = ٢س	٩ _ س = س _ ١	٢س = س _ ١
⟵ ٣س = ٩	⟵ ٢س = ١٠	⟵ س = $^-$١
⟵ س = ٣	⟵ س = ٥	



م = $\int_{-1}^{3}$ (٢س _ (س _ ١)) . د س

+ $\int_{3}^{5}$ (٩_ س _ (س _ ١)) . د س

= $\int_{-1}^{3}$ (س + ١) . د س + $\int_{3}^{5}$ (١٠ _ ٢س) . د س

= ($\frac{1}{2}$ س^2 + س) $\Big|_{-1}^{3}$ + (١٠ س _ س^2) $\Big|_{3}^{5}$ = ($\frac{1}{2}$ (٣)^2 + (٣)) _ ($\frac{1}{2}$ ($^-$١)^2 + ($^-$١))

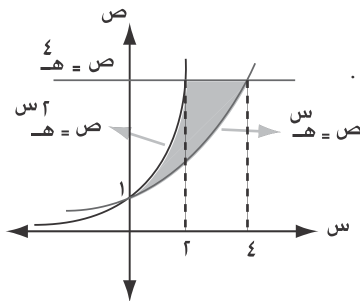
+ (١٠ (٥) _ (٥)^2) _ (١٠ (٣) _ (٣)^2)

= ١٢ وحدة مساحة .

مثال جد مساحة المنطقة المحصورة بين رسم الاقترانات ص = هـ^{س} ، ص = هـ^{٢س} ، ص = هـ^{٤}

الحل نجد الإحداثي السيني لنقاط تقاطع الاقترانات .

هـ^{٢س} = هـ^{س}	هـ^{٢س} = هـ^{٤}	هـ^{س} = هـ^{٤}
⟵ س = ٠	⟵ س = ٢	⟵ س = ٤



م = $\int_{0}^{2}$ (هـ^{٢س} _ هـ^{س}) . د س + $\int_{2}^{4}$ (هـ^{٤} _ هـ^{س}) . د س

= ($\frac{1}{2}$ هـ^{٢س} _ هـ^{س}) $\Big|_{0}^{2}$ + (هـ^{٤} س _ هـ^{س}) $\Big|_{2}^{4}$

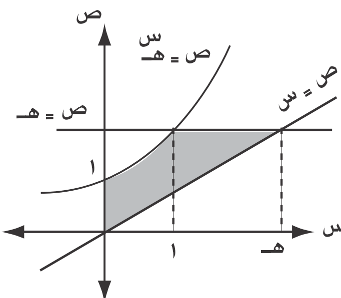
= ($\frac{1}{2}$ هـ^{٤} _ هـ^{٢}) _ ($\frac{1}{2}$ هـ^{٠} _ هـ^{٠}) + (هـ^{٤} (٤) _ هـ^{٤}) _ (هـ^{٤} (٢) _ هـ^{٢})

= $\frac{1}{2}$ (٣ هـ^{٤} + ١) وحدة مساحة .

مثال جد مساحة المنطقة المحصورة بين رسم الاقترانات ص = هـ^{س} ، ص = س ، ص = هـ ومحور الصادات .

الحل نجد الإحداثي السيني لنقاط تقاطع الاقترانات .

هـ^{س} = هـ	هـ^{س} ، س	س = هـ
⟵ س = ١	لا يتقاطعان	



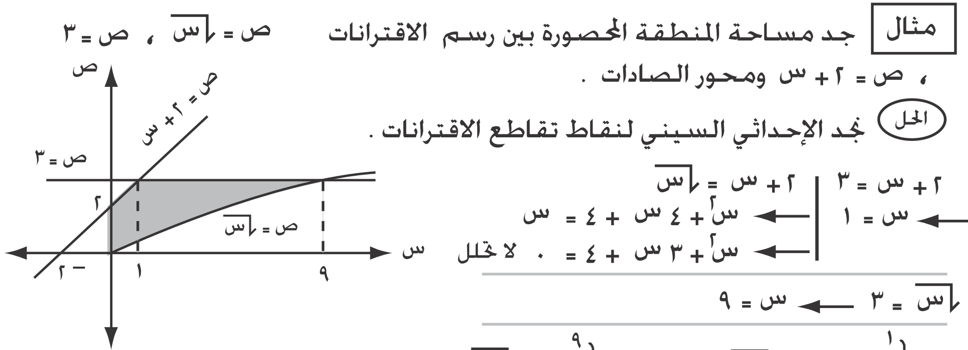
م = $\int_{0}^{1}$ (هـ^{س} _ س) . د س + $\int_{1}^{هـ}$ (هـ _ س) . د س

= (هـ^{س} _ $\frac{1}{2}$ س^2) $\Big|_{0}^{1}$ + (هـ س _ $\frac{1}{2}$ س^2) $\Big|_{1}^{هـ}$

$= \left(\text{هـ}^{1} - \frac{1}{2}(1)^{2}\right) - \left(\text{هـ}^{0} - \frac{1}{2}(0)^{2}\right) + \left(\text{هـ}(\text{هـ}) - \frac{1}{2}\text{هـ}^{2}\right) - \left(\text{هـ}(1) - \frac{1}{2}(1)^{2}\right)$

$= \frac{1}{2}\text{هـ}^{2} - 1$ وحدة مساحة .

مثال جد مساحة المنطقة المحصورة بين رسم الاقترانات $\text{ص} = \sqrt{\text{س}}$ ، $\text{ص} = 3$ ، $\text{ص} = 2 + \text{س}$ ومحور الصادات .



الحل نجد الإحداثي السيني لنقاط تقاطع الاقترانات .

$2 + \text{س} = 3 \longrightarrow \text{س} = 1$

$2 + \text{س} = \sqrt{\text{س}} \longrightarrow \text{س}^{2} + 4\text{س} + 4 = \text{س} \longrightarrow \text{س}^{2} + 3\text{س} + 4 = 0$ لا تحلل .

$\sqrt{\text{س}} = 3 \longrightarrow \text{س} = 9$

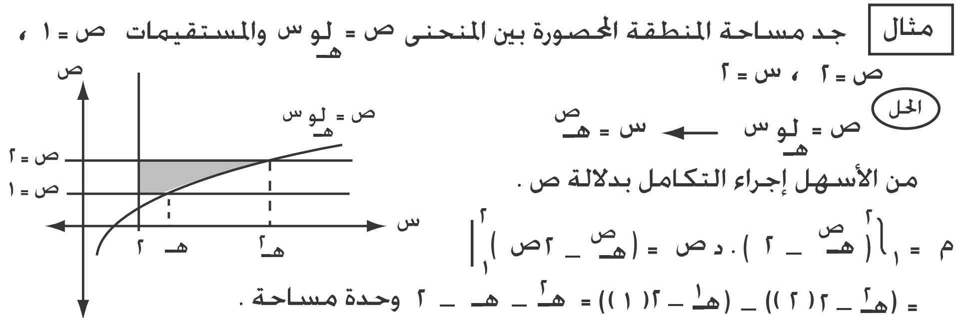
$\text{م} = \int_{0}^{1} (2 + \text{س} - \sqrt{\text{س}})\, \text{د س} + \int_{1}^{9} (3 - \sqrt{\text{س}})\, \text{د س}$

$= \left(2\text{س} + \frac{1}{2}\text{س}^{2} - \frac{2}{3}\text{س}^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_{0}^{1} + \left(3\text{س} - \frac{2}{3}\text{س}^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_{1}^{9}$

$= \left(2(1) + \frac{1}{2}(1)^{2} - \frac{2}{3}(1)^{\frac{3}{2}}\right) - (0) + \left(3(9) - \frac{2}{3}(9)^{\frac{3}{2}}\right) - \left(3(1) - \frac{2}{3}(1)^{\frac{3}{2}}\right)$

$= \frac{17}{2}$ وحدة مساحة .

مثال جد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنى $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}$ والمستقيمات $\text{ص} = 1$ ، $\text{ص} = 2$ ، $\text{س} = 2$



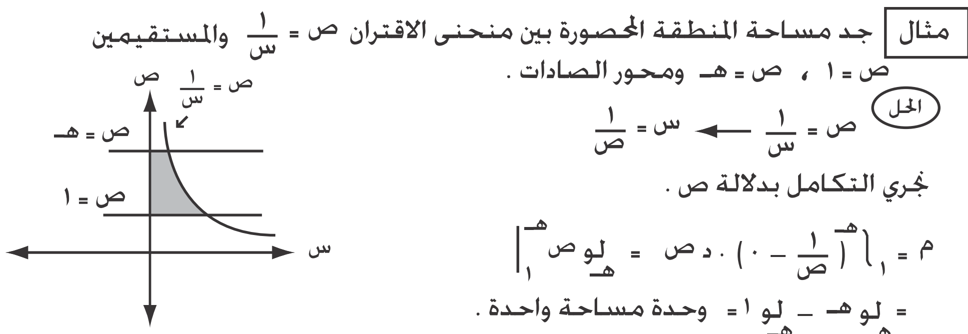
الحل $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س} \longrightarrow \text{س} = \text{هـ}^{\text{ص}}$

من الأسهل إجراء التكامل بدلالة ص .

$\text{م} = \int_{1}^{2} (\text{هـ}^{\text{ص}} - 2)\, \text{د ص} = (\text{هـ}^{\text{ص}} - 2\text{ص})\Big|_{1}^{2}$

$= (\text{هـ}^{2} - 2(2)) - (\text{هـ}^{1} - 2(1)) = \text{هـ}^{2} - \text{هـ} - 2$ وحدة مساحة .

مثال جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $\text{ص} = \frac{1}{\text{س}}$ والمستقيمين $\text{ص} = 1$ ، $\text{ص} = \text{هـ}$ ومحور الصادات .



الحل $\text{ص} = \frac{1}{\text{س}} \longrightarrow \text{س} = \frac{1}{\text{ص}}$

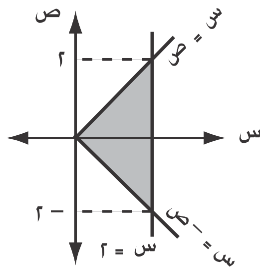
نجري التكامل بدلالة ص .

$\text{م} = \int_{1}^{\text{هـ}} \left(\frac{1}{\text{ص}} - 0\right) \text{د ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ص}\Big|_{1}^{\text{هـ}}$

$= \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{هـ} - \text{لو}_{\text{هـ}}\,1 =$ وحدة مساحة واحدة .

مثال جد مساحة المنطقة المحصورة بين $\text{س} = |\text{ص}|$ ، $\text{س} = 2$

الحل $\text{س} = \begin{cases} \text{ص} ، & \text{ص} \ge 0 \\ -\text{ص} ، & \text{ص} \le 0 \end{cases}$



نجد حدود التكامل بدلالة ص .

عندما $ص \geq ٠$ ، $ص = ٢$

عندما $ص \leq ٠$ ، $-ص = ٢ \longleftarrow ص = -٢$

المخطط المجاور متناظر بالنسبة للمحور س .

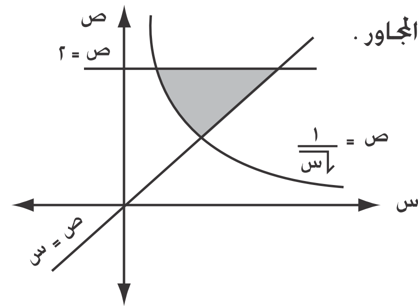
$$م = ٢ \int_{٠}^{٢} (٢ - ص) \, . \, د ص = (٢ص - \frac{١}{٢} ص^{٢}) \Big|_{٠}^{٢}$$

$$= ٢ \left((٢)(٢) - \frac{١}{٢} (٢)^{٢} \right) - (٠) = ٤ \text{ وحدات مساحة .}$$

أو نجري التكامل بدلالة س .

$$م = \int_{٠}^{٢} (س - -س) \, . \, د س = س^{٢} \Big|_{٠}^{٢} = (٢)^{٢} - (٠) = ٤ \text{ وحدات مساحة .}$$

مثال جد مساحة المنطقة المظللة في الشكل المجاور .



الحل نجري التكامل بدلالة ص .

$$ص = \frac{١}{\sqrt{س}} \longleftarrow ص^{٢} = \frac{١}{س} \longleftarrow س = \frac{١}{ص^{٢}}$$

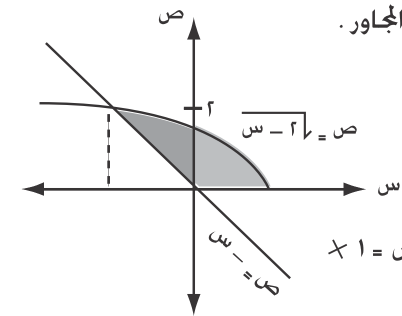
نجد فترة التكامل بدلالة ص .

$$\frac{١}{ص^{٢}} = ص \longleftarrow ص^{٣} = ١ \longleftarrow ص = ١$$

$$م = \int_{١}^{٢} (ص - \frac{١}{ص^{٢}}) \, . \, د ص = \int_{١}^{٢} (ص - ص^{-٢}) \, . \, د ص = (\frac{١}{٢} ص^{٢} + \frac{١}{ص}) \Big|_{١}^{٢}$$

$$= (\frac{١}{٢}(٢)^{٢} + \frac{١}{٢}) - (\frac{١}{٢}(١)^{٢} + \frac{١}{١}) = \text{ وحدة مساحة واحدة .}$$

مثال جد مساحة المنطقة المظللة في الشكل المجاور .



الحل نجد الإحداثي السيني لنقاط تقاطع الاقترانات .

$$-س = \sqrt{٢ - س} \longleftarrow س^{٢} = ٢ - س$$

$$\longleftarrow س^{٢} + س - ٢ = ٠$$

$$\longleftarrow (س - ١)(س + ٢) = ٠ \longleftarrow س = -٢ \text{ ، } س = ١ \times$$

$$\sqrt{٢ - س} = ٠ \longleftarrow ٢ - س = ٠ \longleftarrow س = ٢$$

$$-س = ٠ \longleftarrow س = ٠$$

$$م = \int_{-٢}^{٠} (\sqrt{٢ - س} - -س) \, . \, د س + \int_{٠}^{٢} (\sqrt{٢ - س} - ٠) \, . \, د س$$

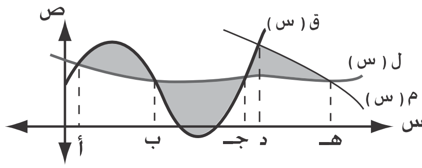
$$= \int_{-٢}^{٠} ((٢ - س)^{\frac{١}{٢}} + س) \, . \, د س + \int_{٠}^{٢} (٢ - س)^{\frac{١}{٢}} \, . \, د س$$

$$= \left(\frac{-٢}{٣} (٢ - س)^{\frac{٣}{٢}} + \frac{١}{٢} س^{٢} \right) \Big|_{-٢}^{٠} + \frac{-٢}{٣} (٢ - س)^{\frac{٣}{٢}} \Big|_{٠}^{٢}$$

$= \frac{-٢}{٣}(٢ - ٠)^{\frac{٣}{٢}} + \frac{١}{٢}(٠)^{٢}) - (\frac{-٢}{٣}(٢ - ٢-)^{\frac{٣}{٢}} + \frac{١}{٢}(-٢)^{٢}) + \frac{-٢}{٣}(٢ - ٢)^{\frac{٣}{٢}}$

$- \frac{-٢}{٣}(٢ - ٠)^{\frac{٣}{٢}} = \frac{١٠}{٣}$ وحدة مساحة .

مثال عبر عن مساحة المنطقة المظللة في الشكل المجاور باستخدام التكامل المحدود .

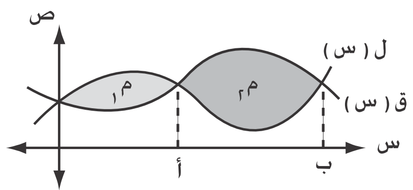


الحل

م = $\int_{أ}^{ب}$ (ق (س) – ل (س)) . د س + $\int_{ب}^{جـ}$ (ل (س) – ق (س)) . د س

+ $\int_{جـ}^{د}$ (ق (س) – ل (س)) . د س + $\int_{د}^{هـ}$ (م (س) – ل (س)) . د س

مثال الشكل المجاور يمثل بياني الاقترانين ق ، ل .



إذا كانت $م_١$ = ٩ وحدات مربعة ، $م_٢$ = ١٤ وحدة مربعة .

فجد $\int_{٠}^{ب}$ (ق (س) – ل (س)) . د س

الحل

$\int_{٠}^{ب}$ (ق (س) – ل (س)) . د س = $\int_{٠}^{أ}$ (ق (س) – ل (س)) . د س + $\int_{أ}^{ب}$ (ق (س) – ل (س)) . د س

= ‎-٩ + ١٤ = ٥

مثال إذا كان ق (س) = س جا س ، س ∈ [٠ ، π] فإن ق (٠) = ق (π) = ٠ .

و ق (س) > ٠ لكل س ∈ (٠ ، π) .

جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق (س) ومحور السينات .

الحل م = $\int_{٠}^{\pi}$ س جا س . د س

افرض ق = س	،	د م = جا س . د س
د ق = د س	،	م = - جتاس

$\int$ س جا س . د س = - س جتاس – $\int$ - جتاس . د س

م = $\int_{٠}^{\pi}$ س جا س . د س = (- س جتاس + جا س) $\Big|_{٠}^{\pi}$

= (‎- π جتا π + جا π) – (- ٠ جتا ٠ + جا ٠) = π وحدة مساحة .

مراجعة عامة على التكامل وتطبيقاته

أمثلة محلولة

مثال جد $\int_{0}^{1} (1 - \sqrt{س})^{8} \,.\, د س$

الحل افرض $ص = 1 - \sqrt{س} \longrightarrow \frac{د ص}{د س} = \frac{-1}{2\sqrt{س}} \longrightarrow د س = -2\sqrt{س} \,.\, د ص$

عندما $س = 0$ ، $ص = 1 - \sqrt{0} = 1$ ، عندما $س = 1$ ، $ص = 1 - \sqrt{1} = 0$

$$\int_{0}^{1} (1 - \sqrt{س})^{8} \,.\, د س = \int_{1}^{0} ص^{8} \,.\, -2\sqrt{س} \,.\, د ص = -2 \int_{1}^{0} ص^{8} (1 - ص) \,.\, د ص$$

$$= -2 \int_{1}^{0} (ص^{8} - ص^{9}) \,.\, د ص = -2 \left(\frac{1}{9} ص^{9} - \frac{1}{10} ص^{10} \right) \Big|_{1}^{0}$$

$$= (0) - -2 \left(\frac{1}{9} (1)^{9} - \frac{1}{10} (1)^{10} \right) = \frac{1}{45}$$

مثال جد $\int س \left(2 هـ^{س^{2}} + جتا(س^{2})\right) \,.\, د س$

الحل افرض $ص = س^{2} \longrightarrow \frac{د ص}{د س} = 2 س \longrightarrow د س = \frac{د ص}{2 س}$

$$\int س \left(2 هـ^{س^{2}} + جتا(س^{2})\right) \,.\, د س = \int س \left(2 هـ^{ص} + جتا ص\right) \,.\, \frac{د ص}{2 س}$$

$$= \frac{1}{2} \int (2 هـ^{ص} + جتا ص) \,.\, د ص = \frac{1}{2} (2 هـ^{ص} + جا ص) + جـ$$

$$= \frac{1}{2} \left(2 هـ^{س^{2}} + جا(س^{2})\right) + جـ$$

مثال جد $\int 2 س (س - 1)^{7} (س + 1)^{7} \,.\, د س$

الحل $\int 2 س (س - 1)^{7} (س + 1)^{7} \,.\, د س = \int 2 س (س^{2} - 1)^{7} \,.\, د س$

افرض $ص = س^{2} - 1 \longrightarrow \frac{د ص}{د س} = 2 س \longrightarrow د س = \frac{د ص}{2 س}$

$$\int 2 س (س^{2} - 1)^{7} \,.\, د س = \int 2 س ص^{7} \,.\, \frac{د ص}{2 س} = \int ص^{7} \,.\, د ص$$

$$= \frac{1}{8} ص^{8} + جـ = \frac{1}{8} (س^{2} - 1)^{8} + جـ$$

مثال جد $\int \frac{د س}{س^{10} + س}$

الحل $\int \frac{د س}{س^{10} + س} = \int \frac{د س}{س^{10} (1 + س^{-9})} = \int \frac{س^{-10}}{(1 + س^{-9})} \,.\, د س$

$$= \frac{-1}{9} \int \frac{-9 س^{-10}}{(1 + س^{-9})} \,.\, د س = \frac{-1}{9} لو_{هـ} |1 + س^{-9}| + جـ$$

مثال جد $\int \frac{س}{س^{٤} + س^{٢}} \, . \, د س$

الحل

$$\int \frac{س}{س^{٤} + س^{٢}} \, . \, د س = \int \frac{س}{س^{٤} \left(١ + س^{-٢} \right)} \, . \, د س = \int \frac{س^{-٣}}{\left(١ + س^{-٢} \right)} \, . \, د س$$

$$= \frac{-١}{٢} \int \frac{-٢ \, س^{-٣}}{\left(١ + س^{-٢} \right)} \, . \, د س = \frac{-١}{٢} \, لـو_{هـ} |١ + س^{-٢}| + جـ$$

مثال جد $\int \frac{د س}{١ + هـ^{س}}$

الحل

$$\int \frac{د س}{١ + هـ^{س}} = \int \frac{د س}{هـ^{س} \left(هـ^{-س} + ١ \right)} = \int \frac{هـ^{-س}}{هـ^{-س} + ١} \, . \, د س = - \int \frac{- هـ^{-س}}{هـ^{-س} + ١} \, . \, د س$$

$$= - \, لـو_{هـ} |هـ^{-س} + ١| + جـ$$

مثال جد $\int \frac{د س}{هـ^{س} - هـ^{-س}}$

الحل

$$\int \frac{د س}{هـ^{س} - هـ^{-س}} = \int \frac{د س}{هـ^{س} - هـ^{-س}} \, . \, \frac{هـ^{س}}{هـ^{س}} = \int \frac{هـ^{س}}{هـ^{٢س} - ١} \, . \, د س$$

افرض $ص = هـ^{س} \longleftarrow \frac{د ص}{د س} = هـ^{س} \longleftarrow د س = \frac{د ص}{هـ^{س}} = \frac{د ص}{ص}$

$$\int \frac{هـ^{س}}{هـ^{٢س} - ١} \, . \, د س = \int \frac{ص}{ص^{٢} - ١} \, . \, \frac{د ص}{ص} = \int \frac{١}{ص^{٢} - ١} \, . \, د ص$$

$$= \int \frac{د ص}{\left(ص - ١ \right) \left(ص + ١ \right)}$$

$$\frac{١}{\left(ص - ١ \right) \left(ص + ١ \right)} = \frac{أ}{ص - ١} + \frac{ب}{ص + ١} = \frac{أ \left(ص + ١ \right) + ب \left(ص - ١ \right)}{\left(ص - ١ \right) \left(ص + ١ \right)}$$

$\longleftarrow ١ = أ \left(ص + ١ \right) + ب \left(ص - ١ \right)$

بوضع $ص = -١$: $١ = أ \left(-١ + ١ \right) + ب \left(-١ - ١ \right) \longleftarrow ب = \frac{-١}{٢}$

بوضع $ص = ١$: $١ = أ \left(١ + ١ \right) + ب \left(١ - ١ \right) \longleftarrow أ = \frac{١}{٢}$

$$\int \frac{د ص}{\left(ص - ١ \right) \left(ص + ١ \right)} = \int \frac{\frac{١}{٢}}{ص - ١} \, . \, د ص + \int \frac{\frac{-١}{٢}}{ص + ١} \, . \, د ص$$

$$= \frac{١}{٢} \, لـو_{هـ} |ص - ١| - \frac{١}{٢} \, لـو_{هـ} |ص + ١| + جـ$$

$$= \frac{١}{٢} \, لـو_{هـ} |هـ^{س} - ١| - \frac{١}{٢} \, لـو_{هـ} |هـ^{س} + ١| + جـ$$

مثال جد $\int_{.}^{لو_{هـ} ٤} س \sqrt{هـ^{س}} \, . \, د س$

الحل

$$\int س \sqrt{هـ^{س}} \, . \, د س = \int س \, هـ^{\frac{س}{٢}} \, . \, د س$$

$$\left[\text{افرض } ق = س \quad ، \quad دم = هـ^{\frac{س}{٢}} . دس \qquad دق = دس \quad ، \quad \longleftarrow م = ٢ هـ^{\frac{س}{٢}}\right]$$

$$\int_{٠}^{لو_{هـ}٤} س\, هـ^{\frac{س}{٢}} . دس = \left(٢ س\, هـ^{\frac{س}{٢}}\right)\Big|_{٠}^{لو_{هـ}٤} - \int_{٠}^{لو_{هـ}٤} ٢\, هـ^{\frac{س}{٢}} . دس = \left(٢ س \sqrt{هـ^{س}}\right)\Big|_{٠}^{لو_{هـ}٤} - ٤\sqrt{هـ^{س}}\Big|_{٠}^{لو_{هـ}٤}$$

$$= \left(٢ لو_{هـ}٤ \sqrt{هـ^{لو_{هـ}٤}} - ٤\sqrt{هـ^{لو_{هـ}٤}}\right) - \left(٢(٠)\sqrt{هـ^{٠}} - ٤\sqrt{هـ^{٠}}\right) = ٤ لو_{هـ}٤ - ٤$$

مثال جد $\int (س + \sqrt{س})\, لو_{هـ} س . دس$

الحل

$$\left[\text{افرض } ق = لو_{هـ} س \quad ، \quad دم = (س + \sqrt{س}) . دس = (س + س^{\frac{١}{٢}}) . دس \qquad دق = \frac{١}{س} . دس \quad ، \quad م = \frac{س^{٢}}{٢} + \frac{٢}{٣} س^{\frac{٣}{٢}}\right]$$

$$\int (س + \sqrt{س})\, لو_{هـ} س . دس = \left(\frac{س^{٢}}{٢} + \frac{٢}{٣} س^{\frac{٣}{٢}}\right) لو_{هـ} س - \int \frac{١}{س}\left(\frac{س^{٢}}{٢} + \frac{٢}{٣} س^{\frac{٣}{٢}}\right) . دس$$

$$= \left(\frac{س^{٢}}{٢} + \frac{٢}{٣} س^{\frac{٣}{٢}}\right) لو_{هـ} س - \int \left(\frac{س}{٢} + \frac{٢}{٣} س^{\frac{١}{٢}}\right) . دس$$

$$= \left(\frac{س^{٢}}{٢} + \frac{٢}{٣} س^{\frac{٣}{٢}}\right) لو_{هـ} س - \left(\frac{س^{٢}}{٤} + \frac{٤}{٩} س^{\frac{٣}{٢}}\right) + جـ$$

مثال جد $\int جاس\,(جتا^{٤}س - جاس) . دس$

الحل $\int جاس\,(جتا^{٤}س - جاس) . دس = \int جتا^{٤}س\, جاس . دس - \int جا^{٢}س . دس$

$\int جتا^{٤}س\, جاس . دس$

افرض $ص = جتاس \longleftarrow \frac{دص}{دس} = - جاس \longleftarrow دس = \frac{-دص}{جاس}$

$$\int جتا^{٤}س\, جاس . دس = \int ص^{٤}\, جاس . \frac{-دص}{جاس} = -\int ص^{٤} . دص$$

$$= \frac{-١}{٥} ص^{٥} = \frac{-١}{٥} جتا^{٥}س$$

$$\left[\int جا^{٢}س . دس = \frac{١}{٢}\int (١ - جتا٢س) . دس = \frac{١}{٢}\left(س - \frac{١}{٢} جا٢س\right)\right]$$

$$\therefore \int جاس\,(جتا^{٤}س - جاس) . دس = \frac{-١}{٥} جتا^{٥}س - \frac{١}{٢}\left(س - \frac{١}{٢} جا٢س\right) + جـ$$

مثال جد $\int \frac{س}{\sqrt{٢س + ١} + \sqrt{س + ١}} . دس$

الحل

$$\int \frac{س}{\sqrt{٢س + ١} + \sqrt{س + ١}} . دس = \int \frac{س}{\sqrt{٢س + ١} + \sqrt{س + ١}} . \frac{\sqrt{٢س + ١} - \sqrt{س + ١}}{\sqrt{٢س + ١} - \sqrt{س + ١}} . دس$$

$$= \int \frac{س\left(\sqrt{٢س + ١} - \sqrt{س + ١}\right)}{(٢س + ١) - (س + ١)} . دس = \int \frac{س\left(\sqrt{٢س + ١} - \sqrt{س + ١}\right)}{س} . دس$$

$= \int \left(\sqrt{٢س+١} - \sqrt{س+١} \right) .دس = \int \left((٢س+١)^{-\frac{١}{٢}} - (س+١)^{-\frac{١}{٢}} \right) .دس$

$= \frac{١}{٣} (٢س+١)^{\frac{٣}{٢}} - \frac{٢}{٣} (س+١)^{\frac{٣}{٢}} + جـ$

مثال جد $\int \frac{١+ظا^٢س}{١-ظا^٢س} .دس$

(الحل) $\int \frac{١+ظا^٢س}{١-ظا^٢س} .دس = \int \frac{قا^٢س}{١-ظا^٢س} .دس$

افرض ص = ظا س ....

(الجواب) $= -\frac{١}{٢} لـو_{هـ} |١ - ظا س| + \frac{١}{٢} لـو_{هـ} |١ + ظا س| + جـ$ (انظر المثال صفحة ١١٣)

مثال جد $\int$ ظا س ظا ٢س ظا ٣س .دس

(الحل) $ظا ٣س = ظا (س + ٢س) = \frac{ظا س + ظا ٢س}{١ - ظا س ظا ٢س}$

← ظا ٣س − ظا س ظا ٢س ظا ٣س = ظا س + ظا ٢س

← ظا س ظا ٢س ظا ٣س = ظا ٣س − ظا ٢س − ظا س

$\int$ ظا س ظا ٢س ظا ٣س .دس $= \int$ (ظا ٣س − ظا ٢س − ظا س) .دس

$= \int \left(\frac{جا ٣س}{جتا ٣س} - \frac{جا ٢س}{جتا ٢س} - \frac{جا س}{جتا س} \right) .دس$

$= \frac{-١}{٣} لو_{هـ} |جتا ٣س| + \frac{١}{٢} لو_{هـ} |جتا ٢س| + لو_{هـ} |جتا س| + جـ$

مثال جد $\int \frac{١ + ظا س}{١ - ظا س} .دس$

(الحل) $\int \frac{١ + ظا س}{١ - ظا س} .دس = \int \frac{١ + \frac{جا س}{جتا س}}{١ - \frac{جا س}{جتا س}} .دس$

$= \int \frac{جتا س + جا س}{جتا س} . \frac{جتا س}{جتا س - جا س} .دس = \int \frac{جتا س + جا س}{جتا س - جا س} .دس$

$= -لـو_{هـ} |جتا س - جا س| + جـ$

مثال جد $\int \frac{جا س + ظا س}{قا س} .دس$

(الحل) $\int \frac{جا س + ظا س}{قا س} .دس = \int \left(\frac{جا س}{قا س} + \frac{ظا س}{قا س} \right) .دس$

$= \int \left(\frac{جا س}{\frac{١}{جتا س}} + \frac{\frac{جا س}{جتا س}}{\frac{١}{جتا س}} \right) .دس = \int$ (جا س جتا س + جا س) .دس

$$= \int \left(\frac{1}{2}\,\text{جا}\,2\text{س} + \text{جا}\,\text{س} \right).\text{د س} = \frac{-1}{4}\,\text{جتا}\,2\text{س} - \text{جتا}\,\text{س} + \text{جـ}$$

مثال جد $\int \frac{\text{ظا س}}{\sqrt{\text{قا س}}}\,.\text{د س}$

الحل افرض $\text{ص} = \sqrt{\text{قا س}} \longrightarrow \text{ص}^2 = \text{قا س} \longrightarrow 2\,\text{ص}\,\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{قا س ظا س}$

$$\longrightarrow \text{د س} = \frac{2\,\text{ص}\,.\,\text{د ص}}{\text{قا س ظا س}}$$

$$\int \frac{\text{ظا س}}{\sqrt{\text{قا س}}}\,.\text{د س} = \int \frac{\text{ظا س}}{\text{ص}}\,.\,\frac{2\,\text{ص}\,.\,\text{د ص}}{\text{قا س ظا س}} = \int \frac{2}{\text{قا س}}\,.\text{د ص} = \int \frac{2}{\text{ص}^2}\,.\text{د ص}$$

$$= \int 2\,\text{ص}^{-2}\,.\,\text{د ص} = -2\,\text{ص}^{-1} + \text{جـ} = \frac{-2}{\sqrt{\text{قا س}}} + \text{جـ}$$

مثال جد $\int \frac{1}{\text{س}} \left(\text{لو}_{\text{هـ}} \frac{1}{\sqrt{\text{س}}}\right).\text{د س}$

$$\int \frac{1}{\text{س}} \left(\text{لو}_{\text{هـ}} \frac{1}{\sqrt{\text{س}}}\right).\text{د س} = \int \frac{1}{\text{س}} \left(\text{لو}_{\text{هـ}} 1 - \text{لو}_{\text{هـ}} \sqrt{\text{س}}\right).\text{د س} = \frac{-1}{2} \int \frac{1}{\text{س}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\,.\,\text{د س}$$

افرض $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \longrightarrow \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{1}{\text{س}} \longrightarrow \text{د س} = \text{س}\,.\,\text{د ص}$

$$\frac{-1}{2} \int \frac{1}{\text{س}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\,.\,\text{د س} = \frac{-1}{2} \int \frac{1}{\text{س}}.\text{ص س}\,.\,\text{د ص} = \frac{-1}{2} \int \text{ص}\,.\,\text{د ص} = \frac{-1}{4}\,\text{ص}^2 + \text{جـ}$$

$$= \frac{-1}{4} \left(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\right)^2 + \text{جـ}$$

مثال جد $\int \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{هـ}^{\text{س}}}{\sqrt{\text{س}}}\,.\text{د س}$

الحل

$$\int \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{هـ}^{\text{س}}}{\sqrt{\text{س}}}\,.\text{د س} = \int \frac{\text{س}}{\sqrt{\text{س}}}\,.\text{د س} = \int \sqrt{\text{س}}\,.\,\text{د س} = \int \text{س}^{\frac{1}{2}}.\,\text{د س}$$

$$= \frac{2}{3}\,\text{س}^{\frac{3}{2}} + \text{جـ}$$

مثال إذا كان ق اقترانا متصلا على ح فما قيمة :

$$\int_1^4 (\text{ق}(\text{س}) - 1)\,.\,\text{د س} + \int_4^1 (\text{ق}(\text{س}) + 1)\,.\,\text{د س} \quad ؟$$

الحل

$$\int_1^4 (\text{ق}(\text{س}) - 1)\,.\,\text{د س} + \int_4^1 (\text{ق}(\text{س}) + 1)\,.\,\text{د س}$$

$$= \int_1^4 \text{ق}(\text{س})\,.\,\text{د س} - \int_1^4 1\,.\,\text{د س} + \int_4^1 \text{ق}(\text{س})\,.\,\text{د س} + \int_4^1 1\,.\,\text{د س}$$

$$= \int_1^1 \text{ق}(\text{س})\,.\,\text{د س} + 2\int_4^1 1\,.\,\text{د س} = 0 + 2\,(1)\,(1-4) = -6$$

مثال إذا كان كل من ق (س) ، هـ (س) اقترانين متصلين ، وكان ق (٠) = ٣ ، ق (٢) = ٢ ، هـ (٠) = ١ ، هـ (٢) = −١ ، $\int_{٠}^{٢} \text{هـ(س) قَ(س) . دس} = ٤$

فجد $\int_{٠}^{٢} \text{هـَ(س) ق(س) . دس}$

الحل

افرض و = ق (س) ، دم = هـَ (س) . دس

دو = قَ (س) . دس ، م = هـ (س)

$$\int_{٠}^{٢} \text{هـَ(س) ق(س) . دس} = \left(\text{ق(س) هـ(س)}\right)\Big|_{٠}^{٢} - \int_{٠}^{٢} \text{هـ(س) قَ(س) . دس}$$

$$= \text{ق(٢) هـ(٢)} - \text{ق(٠) هـ(٠)} - ٤ = (٢)(-١) - (٣)(١) - ٤ = -٩$$

مثال إذا كان ق (١) = ٣ ، ق (٢) = ٥ ، ق (٤) = ٧ ، ق (١٤) = ٢٣ ،

فما قيمة $\int_{١}^{٢} (\text{س}^٢ + ١)\ \text{قَ}(\text{س}^٣ + ٣\text{س})\ .\ \text{دس}$ ؟

الحل

افرض $\text{ص} = \text{س}^٣ + ٣\text{س} \longrightarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٣\text{س}^٢ + ٣ = ٣(\text{س}^٢ + ١)$

$\longrightarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{٣(\text{س}^٢ + ١)}$

عندما س = ١ $\longrightarrow$ ص = $(١)^٣ + ٣(١) = ٤$

عندما س = ٢ $\longrightarrow$ ص = $(٢)^٣ + ٣(٢) = ١٤$

$$\int_{١}^{٢} (\text{س}^٢ + ١)\ \text{قَ}(\text{س}^٣ + ٣\text{س})\ .\ \text{دس} = \int_{٤}^{١٤} (\text{س}^٢ + ١)\ \text{قَ(ص)}\ .\ \frac{\text{دص}}{٣(\text{س}^٢ + ١)}$$

$$= \frac{١}{٣}\int_{٤}^{١٤} \text{قَ(ص) . دص} = \frac{١}{٣}\ \text{ق(ص)}\Big|_{٤}^{١٤} = \frac{١}{٣}\left(\text{ق(١٤)} - \text{ق(٤)}\right) = \frac{١}{٣}(٢٣ - ٧) = \frac{١٦}{٣}$$

مثال أوجد $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{\text{جاس}}{\text{جتاس} + \text{جاس}}\ .\ \text{دس}$

الحل بالضرب بـ $\frac{٢}{٢}$ واضافة وطرح جتاس للبسط

$$\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{\text{جاس}}{\text{جتاس} + \text{جاس}}\ .\ \text{دس} = \frac{١}{٢}\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{٢\ \text{جاس} + \text{جتاس} - \text{جتاس}}{\text{جتاس} + \text{جاس}}\ .\ \text{دس}$$

$$= \frac{١}{٢}\left(\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{\text{جتاس} + \text{جاس}}{\text{جتاس} + \text{جاس}}\ .\ \text{دس} - \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{\text{جتاس} - \text{جاس}}{\text{جتاس} + \text{جاس}}\ .\ \text{دس}\right)$$

$$= \frac{١}{٢}\left((\frac{\pi}{٢} - ٠) - \text{لـو}_{\text{هـ}}\left|\text{جتاس} + \text{جاس}\right|\Big|_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}\right)$$

$$= \frac{١}{٢}\left((\frac{\pi}{٢} - ٠) - \text{لـو}_{\text{هـ}}\left|\text{جتا}\frac{\pi}{٢} + \text{جا}\frac{\pi}{٢}\right| + \text{لـو}_{\text{هـ}}\left|\text{جتا ٠} + \text{جا ٠}\right|\right)$$

(صفر) (صفر)

$$= \frac{\pi}{٤}$$

مثال حل المعادلة التفاضلية : قا^{2}ص . $\frac{د ص}{د س}$ + ظا س ظا ص = ٠

الحل قا^{2}ص . $\frac{د ص}{د س}$ = − ظا س ظا ص ⟵ $\frac{قا^2 ص}{ظا ص}$. د ص = − ظا س . د س

⟵ $\frac{قا^2 ص}{ظا ص}$. د ص = $\frac{- جا س}{جتا س}$. د س ⟵ $\int \frac{قا^2 ص}{ظا ص}$. د ص = $\int \frac{- جا س}{جتا س}$. د س

⟵ لـو$_{هـ}$ | ظا ص | = لـو$_{هـ}$ | جتا س | + جـ

مثال جد $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}$ س جا ٢س جتا س . د س

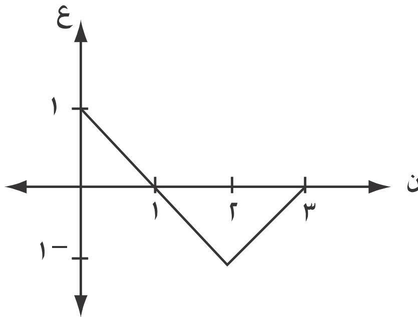
جا س جا ٢س = $\frac{1}{2}$ (جا ٣س + جا س)

الحل

$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}$ س جا ٢س جتا س . د س = $\frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}$ س (جا ٣س + جا س) . د س

.... اكمل الحل , انظر المثال صفحة ١٣٠

مثال الشكل المجاور يمثل العلاقة بين السرعة والزمن لجسيم يتحرك على خط مستقيم من نقطة ثابتة و ، جد :



١ إزاحة الجسيم في الفترة الزمنية [٠ ، ٣]

٢ المسافة التي يقطعها الجسيم في الفترة الزمنية [٠ ، ٣]

الحل

١ إزاحة الجسيم في الفترة الزمنية [٠ ، ٣]

= $\int_{٠}^{٣}$ ع (ن) . د ن = $\frac{1}{2}$ (١) (١) − $\frac{1}{2}$ (٢) (١) = − $\frac{1}{2}$

٢ المسافة التي يقطعها الجسيم في الفترة الزمنية [٠ ، ٣]

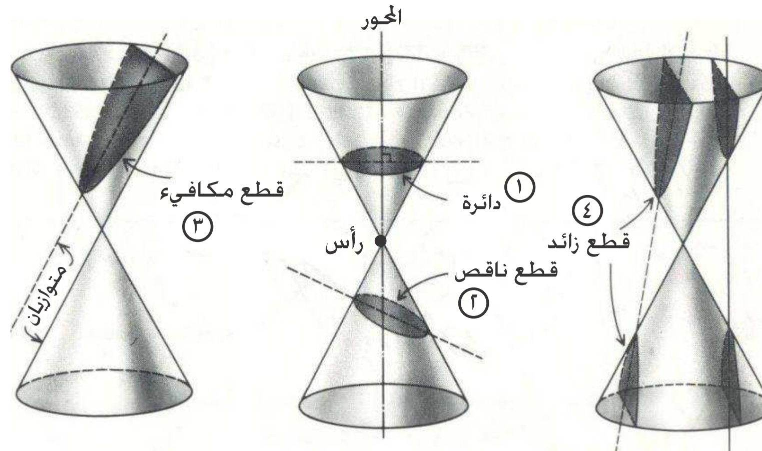
= المساحة المحصورة بين ع (ن) والمحور ن .

= $\int_{٠}^{٣}$ | ع (ن) | . د ن = $\frac{1}{2}$ (١) (١) + $\frac{1}{2}$ (٢) (١) = $\frac{3}{2}$

الهندسة الفضائية

القطوع المخروطية

تعريف القطوع المخروطية : هي المنحنيات المستوية الناتجة من تقاطع مستوى معين مع مخروط دائري قائم مزدوج في أوضاع مختلفة .



<u>أنواع القطوع المخروطية .</u>

١ _ إذا كان المستوى القاطع عموديا على المحور ولا يحتوي على الرأس ، فإن تقاطع المستوى مع السطح المخروطي في هذه الحالة يسمى دائرة .

٢ _ إذا كان المستوى القاطع مائلا قليلاعلى المحور ويقطع فرعا واحدا ، فإن تقاطع المستوى مع السطح المخروطي في هذه الحالة يسمى قطع ناقصا .

٣ _ إذا زاد ميل المستوى القاطع ليصبح موازيا لمستقيم على سطح المخروط ويقطع فرعا واحدا فإن تقاطع المستوى مع السطح المخروطي في هذه الحالة يسمى قطعا مكافئا .

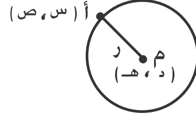
٤ _ إذا قطع المستوى القاطع فرعي المخروط ولا يحتوي على نقطة الرأس ، فإن التقاطع في هذه الحالة يسمى قطعا زائدا .

تعريف يسمى المنحنى الذي ترسمه نقطة تتحرك في المستوى تحت شروط معينة بالمحل الهندسي لهذه النقطة .

و معادلة المحل الهندسي هي علاقة جبرية بين الإحداثيين السيني والصادي للنقطة المتحركة (س ، ص) .

الدائرة

تعريف الدائرة هي المحل الهندسي لنقطة تتحرك في المستوى بحيث تبقى على بعد ثابت من نقطة ثابتة .



حيث البعد الثابت : نصف قطر الدائرة (ر) .
النقطة الثابتة : مركز الدائرة (م) .

الصورة القياسية لمعادلة الدائرة التي مركزها (د ، هـ) وطول نصف قطرها يساوي (ر) هي : $(س - د)^2 + (ص - هـ)^2 = ر^2$

مثال جد معادلة الدائرة التي مركزها (٥ ، −٨) وطول نصف قطرها ($\sqrt{٢}$) وحدة .

الحل $(س - ٥)^2 + (ص + ٨)^2 = ٢$

تذكر

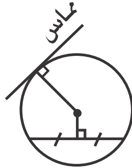
١ قانون البعد بين النقطتين ($س_1$ ، $ص_1$) ، ($س_2$ ، $ص_2$)

$= \sqrt{(س_1 - س_2)^2 + (ص_1 - ص_2)^2}$

٢ إذا كانت أ = ($س_1$ ، $ص_1$) ، ب = ($س_2$ ، $ص_2$) فإن إحداثيي نقطة منتصف القطعة المستقيمة أ ب هما $\left(\frac{س_1 + س_2}{٢} ، \frac{ص_1 + ص_2}{٢}\right)$

٣ بعد النقطة ($س_1$ ، $ص_1$) عن المستقيم أ س + ب ص + جـ = ٠

$= \frac{|أ س_1 + ب ص_1 + جـ|}{\sqrt{أ^2 + ب^2}}$



٤ نصف قطر الدائرة عمودي على المماس عند نقطة التماس .

٥ العمود النازل من مركز الدائرة على أي وتر فيها ينصف هذا الوتر .

لاحظ أنه لإيجاد معادلة الدائرة بالصورة القياسية يجب معرفة كل من مركز الدائرة ونصف قطرها .

مثال اكتب معادلة الدائرة التي مركزها النقطة (−٢ ، −٣) ويمر محيطها بالنقطة (١ ، ٤) .

الحل $ر^2 = (-٢ - ١)^2 + (-٣ - ٤)^2 = ٥٨$

∴ معادلة الدائرة : $(س + ٢)^2 + (ص + ٣)^2 = ٥٨$

مثال اكتب معادلة الدائرة التي نهايتا قطر فيها هما النقطتان (−٩ ، −٢) ، (١ ، ٨) .

الحل مركز الدائرة = $\left(\frac{-٩ + ١}{٢} ، \frac{-٢ + ٨}{٢}\right) = (-٤ ، ٣)$

(القطر)^{2} = (−٩ − ١)^{2} + (٨ − −٢)^{2} = ٢٠٠

∴ معادلة الدائرة : (س + ٤)^{2} + (ص − ٣)^{2} = ٥٠

مثال اكتب معادلة الدائرة التي مركزها النقطة (−٣ ، ٢) وقياس طول محيطها = ٨ π وحدة .

الحل محيط الدائرة = ٢ ر π = ٨ π ⟵ ر = ٤ وحدات .

∴ معادلة الدائرة : (س + ٣)^{2} + (ص − ٢)^{2} = ١٦

معادلة الدائرة إذا مست أحد المحورين وعلم إحداثيات المركز (د ، هـ) .

- الحالة الأولى : مست المحور السيني . ر = مطلق الإحداثي الصادي للمركز .
- الحالة الأولى : مست المحور الصادي . ر = مطلق الإحداثي السيني للمركز .

مثال جد معادلة الدائرة التي مركزها (٤ ، ٢) ، وتمس محور السينات .

الحل ر = | ٢ | = ٢

∴ معادلة الدائرة : (س − ٤)^{2} + (ص − ٢)^{2} = ٤

مثال جد معادلة الدائرة التي مركزها (−٢ ، −٣) ، وتمس محور الصادات .

الحل ر = |−٢| = ٢

∴ معادلة الدائرة : (س + ٢)^{2} + (ص + ٣)^{2} = ٤

معادلة الدائرة إذا مست المحورين وعلم طول نصف القطر (ر) .

☆ المركز = (ر ، ر) إذا وقعت في الربع الأول . ، المركز = (−ر ، ر) إذا وقعت في الربع الثاني .
المركز = (−ر ، −ر) إذا وقعت في الربع الثالث . ، المركز = (ر ، −ر) إذا وقعت في الربع الرابع .

مثال جد معادلة الدائرة التي يقع مركزها في الربع الثاني وتمس محوري السينات والصادات ، علما بأن طول قطرها ٦ وحدات .

الحل ر = $\frac{٦}{٢}$ = ٣ ، المركز = (−٣ ، ٣)

∴ معادلة الدائرة : (س + ٣)^{2} + (ص − ٣)^{2} = ٩

معادلة الدائرة إذا مست المحورين وعلم إحداثيات إحدى نقاط التماس .

☆ ر = مطلق الإحداثي السيني لنقطة تماس الدائرة مع المحور السيني أو
ر = مطلق الإحداثي الصادي لنقطة تماس الدائرة مع المحور الصادي .

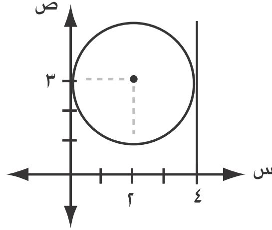
☆ المركز = (ر ، ر) إذا وقعت في الربع الأول . ، المركز = (−ر ، ر) إذا وقعت في الربع الثاني .
المركز = (−ر ، −ر) إذا وقعت في الربع الثالث . ، المركز = (ر ، −ر) إذا وقعت في الربع الرابع .

مثال جد معادلة الدائرة الواقعة في الربع الرابع والماسة للمحورين الإحداثيين علما بأنها تمس محور الصادات عند (٠ ، −٥) .

الحل ر = |−٥| = ٥ ، المركز = (٥ ، −٥)

∴ معادلة الدائرة : $(س - ٥)^٢ + (ص + ٥)^٢ = ٢٥$

مثال جد معادلة الدائرة التي مركزها (٢ ، ٣) ، وتمس المستقيم س = ٤ .

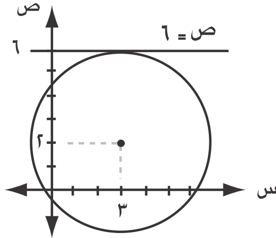


الحل

ر = ٤ - ٢ = ٢

∴ معادلة الدائرة : $(س - ٢)^٢ + (ص - ٣)^٢ = ٤$

مثال جد معادلة الدائرة التي مركزها (٣ ، ٢) ، وتمس المستقيم ص = ٦ .



الحل

ر = ٦ - ٢ = ٤

∴ معادلة الدائرة : $(س - ٣)^٢ + (ص - ٢)^٢ = ١٦$

مثال جد معادلة الدائرة التي مركزها (٤ ، ٤) ، وتمس المستقيم ص = ٢ س - ٣ .

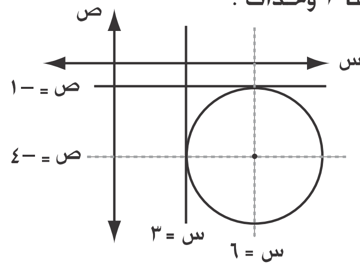
الحل

ص = ٢ س - ٣ ⟵ - ٢ س + ص + ٣ = ٠

$$ر = \frac{| ٤ (-٢) + ٤ (١) + ٣ |}{\sqrt{(١)^٢ + (-٢)^٢}} = \frac{١}{\sqrt{٥}}$$

∴ معادلة الدائرة : $(س - ٤)^٢ + (ص - ٤)^٢ = \frac{١}{٥}$

مثال جد معادلة الدائرة التي تقع بأكملها في الربع الرابع و تمس المستقيمين ص = -١ ، س = ٣ علما بأن طول نصف قطرها ٣ وحدات .



الحل

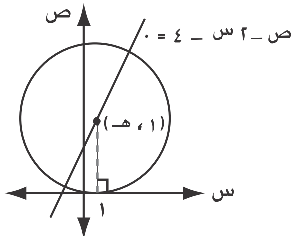
الإحداثي السيني لمركز الدائرة = ٣ + ٣ = ٦

الإحداثي الصادي لمركز الدائرة = -١ - ٣ = -٤

∴ مركز الدائرة = (٦ ، -٤)

∴ معادلة الدائرة : $(س - ٦)^٢ + (ص + ٤)^٢ = ٩$

مثال جد معادلة الدائرة التي يقع مركزها على المستقيم ص - ٢ س - ٤ = ٠ وتمس محور السينات عند النقطة (١ ، ٠) .



الحل

الإحداثي السيني للمركز = ١

⟵ مركز الدائرة = (١ ، هـ)

مركز الدائرة يقع على المستقيم

⟵ هـ - ٢ (١) - ٤ = ٠ ⟵ هـ = ٦

∴ مركز الدائرة = (١ ، ٦)

الدائرة تمس محور السينات ⟵ ر = | ٦ | = ٦

∴ معادلة الدائرة : (س − ١)^{٢} + (ص − ٦)^{٢} = ٣٦

مثال جد معادلة الدائرة الواقعة في الربع الأول و التي تمس محوري السينات والصادات ويقع مركزها على المستقيم ص + س = ٤ .

الحل

الدائرة تمس المحورين وتقع في الربع الأول ⟵ المركز = (ر ، ر)

المركز يحقق معادلة المستقيم ⟵ ر + ر = ٤ ⟵ ٢ ر = ٤ ⟵ ر = ٢

∴ المركز = (٢ ، ٢)

∴ معادلة الدائرة : (س − ٢)^{٢} + (ص − ٢)^{٢} = ٤

الصورة العامة لمعادلة الدائرة

بفك الأقواس في الصورة القياسية السابقة للدائرة ، نجد أن :

س^{٢} − ٢ س د + د^{٢} + ص^{٢} − ٢ ص هـ + هـ^{٢} = ر^{٢}

س^{٢} + ص^{٢} − ٢ د س − ٢ هـ ص + د^{٢} + هـ^{٢} − ر^{٢} = ٠

وبفرض أن : − د = ل ، − هـ = ك ، د^{٢} + هـ^{٢} − ر^{٢} = جـ

تنتج الصورة العامة للدائرة **س^{٢} + ص^{٢} + ٢ ل س + ٢ ك ص + جـ = ٠**

حيث مركز الدائرة (− ل ، − ك) = (− نصف معامل س ، − نصف معامل ص)

وطول نصف قطرها ر = $\sqrt{\text{ل}^{٢} + \text{ك}^{٢} - \text{جـ}}$ ، ل^{٢} + ك^{٢} − جـ > ٠

ملاحظة يجب أن تتوفر الشروط الاتية معا في الصورة العامة لمعادلة الدائرة :

١ ـ المعادلة من الدرجة الثانية في س ، ص .

٢ ـ معامل س^{٢} = معامل ص^{٢} = ١ .

٣ ـ المعادلة خالية من الحد س ص أي أن س ص = ٠

٤ ـ ر > ٠ .

مثال جد مركز وطول نصف قطر الدائرة التي معادلتها :

س^{٢} − ٤ س + ص^{٢} + ٢ ص − ٩ = ٠ .

الحل

س^{٢} + ص^{٢} − ٤ س + ٢ ص − ٩ = ٠ .

وبمقارنتها بالصورة العامة نجد أن : ل = −٢ ، ك = ١ ، جـ = −٩

مركز الدائرة (٢ ، −١)

ر = $\sqrt{(-٢)^{٢} + (١)^{٢} - -٩}$ = $\sqrt{١٤}$ وحدة .

مثال جد مركز وطول نصف قطر الدائرة التي معادلتها :

٣ $س^٢$ + ٣ $ص^٢$ − ١٢ س + ١٢ ص − ٢٤ = ٠

الحل

بقسمة طرفي المعادلة على ٣ ← $س^٢$ + $ص^٢$ − ٤ س + ٤ ص − ٨ = ٠

وبمقارنتها بالصورة العامة نجد أن : ل = −٢ ، ك = ٢ ، جـ = −٨

مركز الدائرة (٢ ، −٢)

نق = $\sqrt{(-٢)^٢ + (٢)^٢ - -٨}$ = $\sqrt{١٦}$ = ٤ وحدات .

مثال ما قيمة جـ بحيث المعادلة $س^٢$ + $ص^٢$ − ٨ س + ١٠ ص + جـ = ٠ .

تمثل دائرة قطرها ١٤ وحدة ؟

الحل القطر = ١٤ ← نق = ٧

وبمقارنتها بالصورة العامة نجد أن : ل = −٤ ، ك = ٥ ، جـ = ؟

٧ = $\sqrt{(-٤)^٢ + (٥)^٢ - جـ}$ ← ٤٩ = ٤١ − جـ ← جـ = −٨

ملاحظة يفضل استخدام الصورة العامة لإيجاد معادلة الدائرة في حال :

١ـ علمت (٣) نقاط تمر بها الدائرة .

٢ ـ علمت نقطتان تمر بهما الدائرة و وقع مركزها على مستقيم معلوم .

مثال جد معادلة الدائرة التي تمر بالنقاط (١ ، ١) ، (٢ ، −١) ، (٢ ، ٣) .

الحل الصورة العامة لمعادلة الدائرة هي : $س^٢$ + $ص^٢$ + ٢ ل س + ٢ ك ص + جـ = ٠

(١ ، ١) تحقق معادلة الدائرة ← $(١)^٢ + (١)^٢$ + ٢ ل (١) + ٢ ك (١) + جـ = ٠

← ٢ ل + ٢ ك + جـ = −٢ ... (١)

(٢ ، −١) تحقق معادلة الدائرة ← $(٢)^٢ + (-١)^٢$ + ٢ ل (٢) + ٢ ك (−١) + جـ = ٠

← ٤ ل − ٢ ك + جـ = −٥ ... (٢)

(٢ ، ٣) تحقق معادلة الدائرة ← $(٢)^٢ + (٣)^٢$ + ٢ ل (٢) + ٢ ك (٣) + جـ = ٠

← ٤ ل + ٦ ك + جـ = −١٣ ... (٣)

بطرح المعادلة (١) من المعادلة (٢) لحذف جـ .

−١ (٢ ل + ٢ ك + جـ = −٢)

٤ ل − ٢ ك + جـ = −٥

٢ ل − ٤ ك = −٣ ... (٤)

بطرح المعادلة (١) من المعادلة (٣) لحذف جـ .

−١ (٢ ل + ٢ ك + جـ = −٢)

٤ ل + ٦ ك + جـ = −١٣

٢ ل + ٤ ك = −١١ ... (٥)

بجمع المعادلتين (٤) و (٥) : ٢ ل − ٤ ك = −٣ ... (٤)

٢ ل + ٤ ك = −١١ ... (٥)

٤ ل = −١٤ ← ل = $\frac{-١٤}{٤}$ = $\frac{-٧}{٢}$

بتعويض ل = $\frac{-٧}{٢}$ في المعادلة (٤) : ٢ ($\frac{-٧}{٢}$) ـ ٤ ك = -٣ ⟵ ك = -١

بتعويض ل = $\frac{-٧}{٢}$ ، ك = -١ في المعادلة (٢) ⟵

٤ ($\frac{-٧}{٢}$) ـ ٢ (-١) + جـ = -٥ ⟵ جـ = ٧

معادلة الدائرة : س^٢ + ص^٢ + ٢ ($\frac{-٧}{٢}$) س + ٢ (-١) ص + ٧ = ٠

: س^٢ + ص^٢ ـ ٧ س ـ ٢ ص + ٧ = ٠

مثال جد معادلة الدائرة التي تمر بالنقاط (١ ، ٠) ، (٧ ، ٠) ، (٥ ، -٣) .

الحل الصورة العامة لمعادلة الدائرة هي : س^٢ + ص^٢ + ٢ ل س + ٢ ك ص + جـ = ٠

(١ ، ٠) تحقق معادلة الدائرة ⟵ (١)^٢ + (٠)^٢ + ٢ ل (١) + ٢ ك (٠) + جـ = ٠

⟵ ٢ ل + جـ = -١ ... (١)

(٧ ، ٠) تحقق معادلة الدائرة ⟵ (٧)^٢ + (٠)^٢ + ٢ ل (٧) + ٢ ك (٠) + جـ = ٠

⟵ ١٤ ل + جـ = -٤٩ ... (٢)

(٥ ، -٣) تحقق معادلة الدائرة ⟵ (٥)^٢ + (-٣)^٢ + ٢ ل (٥) + ٢ ك (-٣) + جـ = ٠

⟵ ١٠ ل ـ ٦ ك + جـ = -٣٤ ... (٣)

بطرح المعادلة (١) من المعادلة (٢)

١٤ ل + جـ = -٤٩

-(٢ ل + جـ = -١)

١٢ ل = -٤٨

⟵ ل = -٤

عوض ل = -٤ في المعادلة (١) ⟵ ٢ (-٤) + جـ = -١ ⟵ جـ = ٧

عوض ل = -٤ ، جـ = ٧ في المعادلة (٣)

⟵ ١٠ (-٤) ـ ٦ ك + ٧ = -٣٤ ⟵ ك = $\frac{١}{٦}$

∴ معادلة الدائرة : س^٢ + ص^٢ ـ ٨ س + $\frac{١}{٣}$ ص + ٧ = ٠

مثال جد معادلة الدائرة التي تمر بالنقطتين (-٣ ، -١) ، (٤ ، ٦) ويقع مركزها على محور الصادات .

الحل الصورة العامة لمعادلة الدائرة هي : س^٢ + ص^٢ + ٢ ل س + ٢ ك ص + جـ = ٠

ل = ٠ المركز يقع على محور الصادات .

فتصبح المعادلة : س^٢ + ص^٢ + ٢ ك ص + جـ = ٠

(-٣ ، -١) تحقق معادلة الدائرة ⟵ (-٣)^٢ + (-١)^٢ + ٢ ك (-١) + جـ = ٠

⟵ - ٢ ك + جـ = -١٠ ... (١)

(٤ ، ٦) تحقق معادلة الدائرة ⟵ $(٤)^٢ + (٦)^٢ + ٢ك(٦) + جـ = ٠$

⟵ ١٢ ك + جـ = ⁻٥٢ ... (٢)

بطرح المعادلة (٢) من المعادلة (١)

⁻ ٢ك + جـ = ⁻١٠

⁻(١٢ ك + جـ = ⁻٥٢)

⁻ ١٤ ك = ٤٢ ⟵ ك = ⁻٣

بتعويض ك = ⁻٣ في المعادلة (١) ⟵ ⁻٢ (⁻٣) + جـ = ⁻١٠

⟵ جـ = ⁻١٦

∴ معادلة الدائرة : $س^٢ + ص^٢$ – ٦ص – ١٦ = ٠

مثال جد معادلة الدائرة التي تمر بالنقطتين (٣ ، ⁻١) ، (١ ، ٥) ويقع مركزها على محور السينات .

الحل

الصورة العامة لمعادلة الدائرة هي : $س^٢ + ص^٢$ + ٢ ل س + ٢ك ص + جـ = ٠

ك = ٠ المركز يقع على محور السينات .

فتصبح المعادلة : $س^٢ + ص^٢$ + ٢ ل س + جـ = ٠

(٣ ، ⁻١) تحقق معادلة الدائرة ⟵ $(٣)^٢ + (⁻١)^٢$ + ٢ ل (٣) + جـ = ٠

⟵ ٦ ل + جـ = ⁻١٠ ... (١)

(١ ، ٥) تحقق معادلة الدائرة ⟵ $(١)^٢ + (٥)^٢$ + ٢ ل (١) + جـ = ٠

⟵ ٢ ل + جـ = ⁻٢٦ ... (٢)

بطرح المعادلة (٢) من المعادلة (١)

٦ ل + جـ = ⁻١٠

⁻(٢ ل + جـ = ⁻٢٦)

٤ ل = ١٦ ⟵ ل = ٤

بتعويض ل = ٤ في المعادلة (١) ⟵ ٦ (٤) + جـ = ⁻١٠ ⟵ جـ = ⁻٣٤

∴ معادلة الدائرة : $س^٢ + ص^٢$ + ٨ س – ٣٤ = ٠

مثال جد معادلة الدائرة التي تمر بالنقطتين (١ ، ⁻٢)، (٤ ، ⁻٣) ويقع مركزها على المستقيم ٣ س + ٤ ص = ٧ .

الحل

المركز (⁻ل ، ⁻ك) يقع على المستقيم ٣ س + ٤ ص = ٧

⁻٣ ل – ٤ ك = ٧ ... (١)

الصورة العامة لمعادلة الدائرة هي : $س^٢ + ص^٢$ + ٢ ل س + ٢ك ص + جـ = ٠

(١ ، ⁻٢) تحقق معادلة الدائرة ⟵ $(١)^٢ + (⁻٢)^٢$ + ٢ ل (١) + ٢ ك (⁻٢) + جـ = ٠

⟵ ٢ ل – ٤ك + جـ = ⁻٥ ... (٢)

(٤ ، −٣) تحقق معادلة الدائرة ← (٤)^{٢} + (−٣)^{٢} + ٢ ل (٤) + ٢ ك (−٣) + جـ = ٠

← ٨ ل − ٦ ك + جـ = −٢٥ ... (٣)

بطرح المعادلة (٣) من المعادلة (٢)

٢ ل − ٤ ك + جـ = −٥

−(٨ ل − ٦ ك + جـ = −٢٥)

−٦ ل + ٢ك = ٢٠ ... (٤)

و بحل النظام الاتي

−٣ ل − ٤ ك = ٧ ... (١)

٢ (−٦ ل + ٢ك = ٢٠) ... (٤)

−١٥ ل = ٤٧ ← ل = $\frac{-٤٧}{١٥}$

بتعويض ل = $\frac{-٤٧}{١٥}$ في المعادلة (٤) ← −٦ ($\frac{-٤٧}{١٥}$) + ٢ ك = ٢٠ ← ك = $\frac{٣}{٥}$

بتعويض ل = $\frac{-٤٧}{١٥}$ ، ك = $\frac{٣}{٥}$ في المعادلة (٢)

← ٢ ($\frac{-٤٧}{١٥}$) − ٤ ($\frac{٣}{٥}$) + جـ = −٥ ← جـ = $\frac{١١}{٣}$

∴ معادلة الدائرة : س^{٢} + ص^{٢} − $\frac{٩٤}{١٥}$ س + $\frac{٦}{٥}$ ص + $\frac{١١}{٣}$ = ٠

أمثلة متنوعة

مثال جد إحداثيات المركز وطول نصف القطر لكل من الدوائر الاتية :

١) ص^{٢} + (٣ − س)^{٢} − ١٦ = ٠

٢) $\frac{(٣س − ٩)^{٢}}{٢٧}$ + $\frac{(٣ص + ٦)^{٢}}{٢٧}$ = ١

الحل

١) (س − ٣)^{٢} + ص^{٢} = ١٦

المركز (٣ ، ٠) ،

ر = $\sqrt{١٦}$ = ٤

٢) (٣ (س − ٣))^{٢} + (٣ (ص+٢))^{٢} = ٢٧

٩ (س − ٣)^{٢} + ٩ (ص+٢)^{٢} = ٢٧

(س − ٣)^{٢} + (ص+٢)^{٢} = ٣

المركز (٣ ، −٢) ، ر = $\sqrt{٣}$

مثال جد معادلة الدائرة التي طول نصف قطرها ٤ وحدات ويقع مركزها على محور السينات وعلى المستقيم ٢ س − ص = ٦ .

الحل

افرض المركز (د ، هـ)

بما أن المركز يقع على محور السينات ← المركز (د ، ٠)

(د ، ٠) تحقق معادلة المستقيم ← ٢ د − ٠ = ٦ ← د = ٣

المركز (٣ ، ٠) ، ر = ٤

معادلة الدائرة : (س − ٣)^{٢} + ص^{٢} = ١٦

مثال جد معادلة الدائرة التي تمر بنقطة الأصل ، وطول نصف قطرها ١٣ وحدة والإحداثي السيني لمركزها −١٢ .

الحل

(س − د)^{٢} + (ص − هـ)^{٢} = ر^{٢}

$(س+١٢)^٢ + (ص - هـ)^٢ = ١٦٩$

الدائرة تمر بنقطة الأصل ⟵ $(٠ + ١٢)^٢ + (٠ - هـ)^٢ = ١٦٩$

⟵ $هـ^٢ = ١٦٩ - ١٤٤ = ٢٥$ ⟵ $هـ = \pm ٥$ (دائرتان)

الأولى : المركز (−١٢، ٥) ، ر = ١٣ | الثانية : المركز (−١٢، −٥) ، ر = ١٣

$(س+١٢)^٢ + (ص - ٥)^٢ = ١٦٩$ | $(س+١٢)^٢ + (ص + ٥)^٢ = ١٦٩$

مثال معادلتا قطرين في دائرة هما : س + ٣ ص = ١٧ ، ٣ س − ص = ٣ جد معادلة هذه الدائرة علما بأن طول نصف قطرها ٥ وحدات .

الحل
يتقاطع القطران في مركز الدائرة .

٣ س − ص = ٣ ⟵ ص = ٣ س − ٣ . نعوضها في المعادلة الأخرى لإيجاد نقطة التقاطع .

س + ٣ (٣ س − ٣) = ١٧ ⟵ ١٠ س = ٢٦ ⟵ $س = \frac{٢٦}{١٠} = \frac{١٣}{٥}$

⟵ $ص = ٣ \left(\frac{١٣}{٥}\right) - ٣ = \frac{٢٤}{٥}$

∴ المركز $\left(\frac{١٣}{٥} ، \frac{٢٤}{٥}\right)$

∴ معادلة الدائرة : $\left(س - \frac{١٣}{٥}\right)^٢ + \left(ص - \frac{٢٤}{٥}\right)^٢ = ٢٥$

مثال جد معادلة الدائرة التي تمس محور الصادات عند النقطة (٠ ، ٣) وتقطع محور السينات في نقطتين إحداهما (٩ ، ٠) .

الحل
افرض المركز (د ، هـ)

وبما أن الدائرة تمس محور الصادات عند النقطة (٠ ، ٣)

يصبح المركز (ر ، ٣)

⟵ $(س - ر)^٢ + (ص - ٣)^٢ = ر^٢$

(٩ ، ٠) تحقق معادلة الدائرة ⟵ $(٩ - ر)^٢ + (٠ - ٣)^٢ = ر^٢$

⟵ $٨١ - ١٨ ر + ر^٢ + ٩ = ر^٢$ ⟵ ١٨ ر = ٩٠ ⟵ ر = ٥

∴ معادلة الدائرة : $(س - ٥)^٢ + (ص - ٣)^٢ = ٢٥$

مثال جد معادلة الدائرة التي تمر بنقطة الأصل وتقطع من محوري السينات والصادات الموجبين (٤) وحدات ، (٦) وحدات على الترتيب .

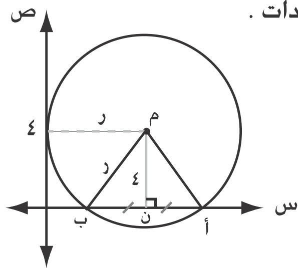
الحل
من هندسة الشكل المجاور نلاحظ أن القطعة المستقيمة أ ب تمثل قطرا في دائرة لأن الزاوية أ م ب محيطية قياسها °٩٠ .

مركز الدائرة = $\left(\frac{٤ + ٠}{٢} ، \frac{٠ + ٦}{٢}\right) = (٢ ، ٣)$

$ر^٢ = (٤ - ٢)^٢ + (٠ - ٣)^٢ = ١٣$

∴ معادلة الدائرة : $(س - ٢)^٢ + (ص - ٣)^٢ = ١٣$

مثال جد معادلة الدائرة التي تمس محور الصادات عند النقطة (٠ ، ٤) وتقطع محور السينات الموجب في نقطتين البعد بينهما (٦) وحدات .



العمود النازل من مركز الدائرة على أي وتر فيها ينصف هذا الوتر .

الحل مركز الدائرة (ر ، ٤)

من هندسة الشكل المجاور أ ن = ن ب = $\frac{٦}{٢}$ = ٣

بتطبيق نظرية فيثاغورس على المثلث م ن ب

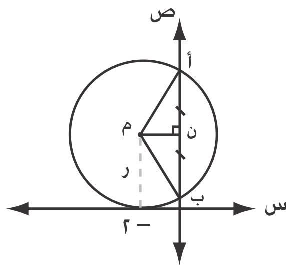
← $ر^٢$ = (٤)^٢ + (٣)^٢ = ٢٥

← ر = ٥

مركز الدائرة (٥ ، ٤)

∴ معادلة الدائرة : (س − ٥)^٢ + (ص − ٤)^٢ = ٢٥

مثال جد معادلة الدائرة التي تمس محور السينات عند النقطة (−٢ ، ٠) وتقطع من محور الصادات الموجب وترا طوله ٤ $\sqrt{٣}$ وحدة .



الحل مركز الدائرة (−٢ ، ر)

من هندسة الشكل المجاور أ ن = ن ب = $\frac{٤\sqrt{٣}}{٢}$ = ٢ $\sqrt{٣}$

بتطبيق نظرية فيثاغورس على المثلث م ن ب

← $ر^٢$ = (٢)^٢ + (٢ $\sqrt{٣}$)^٢ = ١٦ ← ر = ٤

مركز الدائرة (−٢ ، ٤)

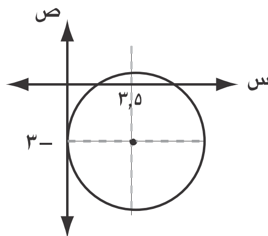
∴ معادلة الدائرة : (س + ٢)^٢ + (ص − ٤)^٢ = ١٦

مثال إذا كانت الدائرة $س^٢$ + $ص^٢$ − ٧ س + ب ص + د = ٠ تمس محور الصادات في النقطة (٠ ، −٣) ، فجد قيمة ب ، د .

الحل

الصورة العامة لمعادلة الدائرة هي : $س^٢$ + $ص^٢$ + ٢ ل س + ٢ ك ص + جـ = ٠

بمقارنة المعادلة المعطاة بالصورة العامة :



ل = $-\frac{٧}{٢}$ ← الإحداثي السيني للمركز = $\frac{٧}{٢}$

و الدائرة تمس محور الصادات في النقطة (٠ ، −٣)

∴ مركز الدائرة ($\frac{٧}{٢}$ ، −٣) ، ر = $\frac{٧}{٢}$

← ب = ٢ك = ٢(٣) = ٦

(٠ ، −٣) تحقق معادلة الدائرة ← (٠)^٢ + (−٣)^٢ − ٧ (٠) + ٦ (−٣) + د = ٠

← د = ٩

مثال جد قيم جـ بحيث المعادلة $س^٢$ + $ص^٢$ − ٦ س − ٤ ص + جـ = ٠ تمثل دائرة .

الحل ل = −٣ ، ك = −٢

المعادلة تمثل دائرة عندما ر = $\sqrt{ل^٢ + ك^٢ - جـ}$ > ٠

$\sqrt{(-٣)^٢ + (-٢)^٢ - جـ} > ٠ \leftarrow \sqrt{١٣ - جـ} > ٠ \leftarrow ١٣ - جـ > ٠$

$\leftarrow ١٣ > جـ$

مثال إذا كانت النقطتان (٢ ، ٤) ، (٦ ، أ) هما نهايتا أحد أقطار دائرة تمر بنقطة الأصل ، أوجد قيمة أ ، ثم أوجد معادلة هذه الدائرة .

الحل

مركز الدائرة = $\left(\frac{٢ + ٦}{٢} ، \frac{٤ + أ}{٢}\right) = \left(٤ ، \frac{٤ + أ}{٢}\right)$

ل = − ٤ ، ك = $\frac{-(٤ + أ)}{٢}$

$س^٢ + ص^٢ - ٨ س - (٤ + أ) ص + جـ = ٠$.

الدائرة تمر بنقطة الأصل $\leftarrow (٠)^٢ + (٠)^٢ - ٨ (٠) - (٤ + أ)(٠) + جـ = ٠$

$\leftarrow جـ = ٠$.

فتصبح معادلة الدائرة : $س^٢ + ص^٢ - ٨ س - (٤ + أ) ص = ٠$.

(٢ ، ٤) تحقق معادلة الدائرة $\leftarrow (٢)^٢ + (٤)^٢ - ٨ (٢) - (٤ + أ)(٤) = ٠$

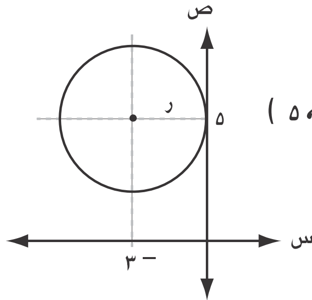
$\leftarrow ٤ - ١٦ - ٤أ = ٠ \leftarrow ٤أ = -١٢ \leftarrow أ = -٣$

∴ معادلة الدائرة : $س^٢ + ص^٢ - ٨ س - ص = ٠$.

مثال إذا كانت النقطتان (−٣ ، ٢) ، (جـ ، ٨) هما نهايتا قطر لدائرة تمس محور الصادات فأوجد قيمة جـ ، و معادلة هذه الدائرة .

الحل

الدائرة تقع في الربع الثاني



مركز الدائرة = $\left(\frac{-٣ + جـ}{٢} ، \frac{٢ + ٨}{٢}\right) = \left(\frac{-٣ + جـ}{٢} ، ٥\right) = (-ر ، ٥)$

$(س + ر)^٢ + (ص - ٥)^٢ = ر^٢$

(−٣ ، ٢) تحقق معادلة الدائرة

$\leftarrow (-٣ + ر)^٢ + (٢ - ٥)^٢ = ر^٢$

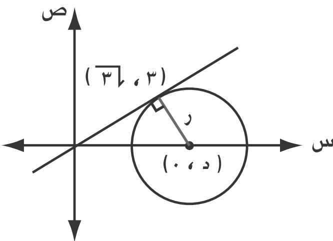
$\leftarrow ٩ - ٦ ر + ر^٢ + ٩ = ر^٢ \leftarrow ١٨ = ٦ ر \leftarrow ر = ٣$

$\frac{-٣ + جـ}{٢} = -٣ \leftarrow -٣ + جـ = -٦ \leftarrow جـ = -٣$

∴ معادلة الدائرة : $(س + ٣)^٢ + (ص - ٥)^٢ = ٩$

مثال جد معادلة الدائرة التي تمس المستقيم ص = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ س في النقطة (٣ ، $\sqrt{٣}$) ويقع مركزها على محور السينات الموجب .

الحل



المركز (د ، ٠)

$(س - د)^٢ + ص^٢ = ر^٢$

ر = بعد المركز عن المستقيم ص .

ص = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ س $\leftarrow \frac{١}{\sqrt{٣}}$ س − ص = ٠ .

ر = $\frac{\left|\frac{1}{\sqrt{3}} د\right|}{\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + (-1)^2}}$ = $\frac{\frac{1}{\sqrt{3}} د}{\frac{2}{\sqrt{3}}}$ = $\frac{1}{2}$ د ← د = ٢ ر

فتصبح معادلة الدائرة (س − ٢ر)^2 + ص^2 = ر^2

(٣ ، $\sqrt{3}$) تحقق معادلة الدائرة ← (٣ − ٢ر)^2 + ($\sqrt{3}$)^2 = ر^2

← ٩ − ١٢ر + ٤ر^2 + ٣ = ر^2 ← ر = ٢

∴ معادلة الدائرة (س − ٤)^2 + ص^2 = ٤

مثال جد معادلة الدائرة التي تمس المستقيم س − ٣ص = ٠ عند نقطة الأصل ويقع مركزها على المستقيم ٢س + ص + ١ = ٠

الحل ميل المستقيم س − ٣ص = ٠ يساوي $\frac{1}{3}$

(س − د)^2 + (ص − هـ)^2 = ر^2

٢(س − د) + ٢(ص − هـ) $\frac{دص}{دس}$ = ٠ ← $\frac{دص}{دس}$ = $\frac{د − س}{ص − هـ}$

يتساوى الميل عند نقطة التماس $\left.\frac{دص}{دس}\right|_{س=٠، ص=٠}$ = $\frac{د − ٠}{٠ − هـ}$ = $\frac{−د}{هـ}$ = $\frac{1}{3}$ ← هـ = −٣د ... (١)

المركز (د ، هـ) يحقق معادلة المستقيم ٢س + ص + ١ = ٠

← ٢د + هـ + ١ = ٠ ....(٢)

عوض هـ = −٣د في المعادلة (٢) ← ٢د − ٣د + ١ = ٠ ← د = ١ عوض في المعادلة (١)

← هـ = −٣ (١) = −٣

الدائرة تمر بنقطة الأصل ← (٠ − ١)^2 + (٠ + ٣)^2 = ر^2 ← ر^2 = ١٠

∴ معادلة الدائرة (س − ١)^2 + (ص + ٣)^2 = ١٠

مثال جد معادلة الدائرة التي تمس المستقيم ٣س + ٤ص − ١٦ = ٠ عند النقطة (٤ ، ١) ونصف قطرها (٥) وحدات .

الحل ميل المماس = $\frac{−3}{4}$ ، ميل المستقيم العمودي على المماس = $\frac{4}{3}$

نجد معادلة المستقيم العمودي على المماس عند نقطة التماس

ص − ١ = $\frac{4}{3}$ (س − ٤)

المركز (د ، هـ) يحقق معادلة العمودي ← هـ − ١ = $\frac{4}{3}$(د − ٤) ....(١)

النقطة (٤ ، ١) تقع على الدائرة ← (٤ − د)^2 + (١ − هـ)^2 = ٢٥ ....(٢)

عوض هـ − ١ = $\frac{4}{3}$(د − ٤) في المعادلة (٢)

(٤ − د)^2 + $\frac{16}{9}$ (د − ٤)^2 = ٢٥ ← (٤ − د)^2 (١ + $\frac{16}{9}$) = ٢٥

← (٤ − د)^2 = ٩

$\leftarrow$ ٤ − د = ٣ ، ٤ − د = −٣
د = ١ ، د = ٧

بالتعويض في المعادلة (١) : هـ = −٣ عندما د = ١ ، هـ = ٥ عندما د = ٧

(دائرتان)

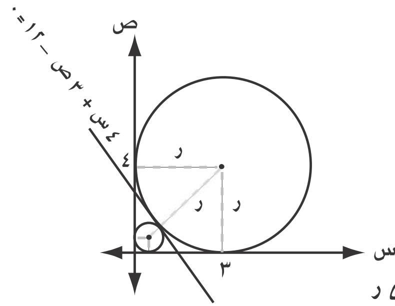
الأولى مركزها (١ ، −٣)

ومعادلتها $(س - ١)^٢ + (ص + ٣)^٢ = ٢٥$

الثانية مركزها (٧ ، ٥)

ومعادلتها $(س - ٧)^٢ + (ص - ٥)^٢ = ٢٥$

مثال جد معادلة الدائرة التي تمس كلا من محور السينات الموجب ومحور الصادات الموجب والمستقيم ٤ س + ٣ ص − ١٢ = ٠



الحل المركز (ر ، ر)

$ر = \frac{|٤(ر) + ٣(ر) - ١٢|}{\sqrt{(٤)^٢ + (٣)^٢}}$

$\leftarrow$ |٧ ر − ١٢| = ٥ ر   دائرتان

$\leftarrow$ ٧ ر − ١٢ = ٥ ر ، ٧ ر − ١٢ = −٥ ر

٢ ر = ١٢ ، ١٢ ر = ١٢

ر = ٦ ، ر = ١

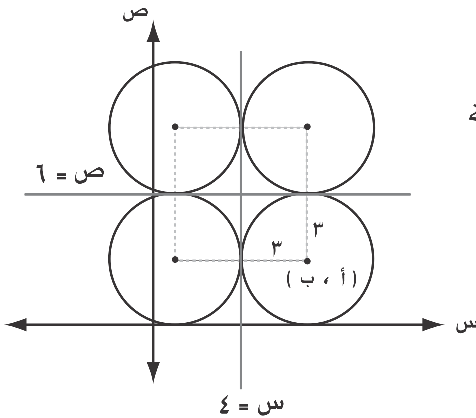
المعادلة الأولى: $(س - ٦)^٢ + (ص - ٦)^٢ = ٣٦$

المعادلة الثانية: $(س - ١)^٢ + (ص - ١)^٢ = ١$

مثال جد مراكز الدوائر التي يساوي نصف قطر كل منها (٣) وحدات والتي تمس المستقيمين س = ٤ ، ص = ٦ .

الحل

انظر الشكل المجاور



بفرض أن (أ ، ب) أحد المراكز المطلوبة

| أ − ٤ | = ٣ ، | ب − ٦ | = ٣

أ − ٤ = ± ٣ ، ب − ٦ = ± ٣

أ = ١ ، أ = ٧ ، ب = ٣ ، ب = ٩

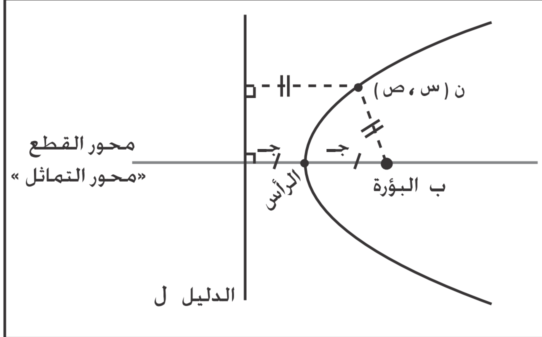
هناك (٤) دوائر

المراكز المطلوبة : (١ ، ٣)
(١ ، ٩)
(٧ ، ٣)
(٧ ، ٩)

القطع المكافىء

تعريف

القطع المكافىء هو : المحل الهندسي للنقطة ن (س ، ص) المتحركة في المستوى التي يكون بعدها عن نقطة ثابتة ب (تسمى بؤرة القطع المكافىء) مساويا دائما لبعدها عن مستقيم معلوم ل (يسمى دليل القطع المكافىء) لا يحوي النقطة ب .



ـ محور القطع المكافىء هو المستقيم المار بالبؤرة والعمودي على الدليل .

ـ رأس القطع المكافىء هو نقطة تقاطع محور القطع المكافىء مع المنحنى .

ملاحظات

١ ـ الرأس والبؤرة يقعان على محور القطع .

٢ ـ الدليل يكون دائما عموديا على محور القطع .

٣ ـ الرأس يقع في منتصف المسافة بين البؤرة والدليل .

٤ ـ بعد الرأس عن البؤرة = بعد الرأس عن الدليل = جـ .

٥ ـ بعد البؤرة عن الدليل = ٢ جـ .

٦ ـ (هـ) هو الاختلاف المركزي للقطع المكافىء =١ دائما .

٧ ـ القطع المكافىء يكون متماثلا دائما حول محوره .

الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافىء الذي رأسه (د ، هـ) ، جـ > ٠

١ / أ

ـ محور التماثل يوازي محور السينات و فتحة القطع إلى اليمين .

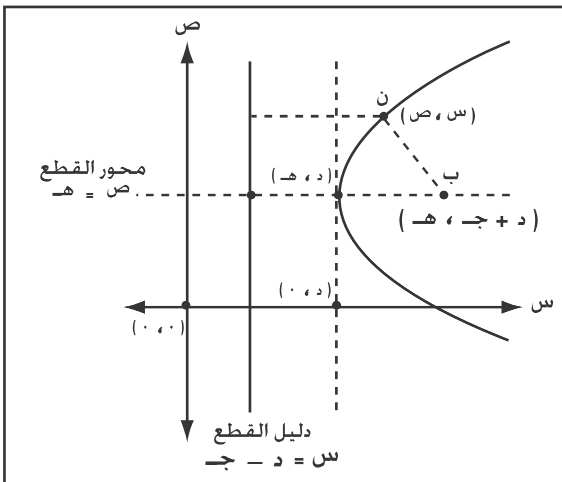
معادلة القطع المكافىء هي :

$$(\text{ص} - \text{هـ})^2 = ٤\ \text{جـ}\ (\text{س} - \text{د})$$

ـ معادلة محور التماثل : ص = هـ

ـ البؤرة : (د + جـ ، هـ)

ـ معادلة الدليل : س = د ـ جـ



١ / ب

_ محـور التمـاثل يوازي محـور السينات
و فتحـة القطـع إلى اليسار .

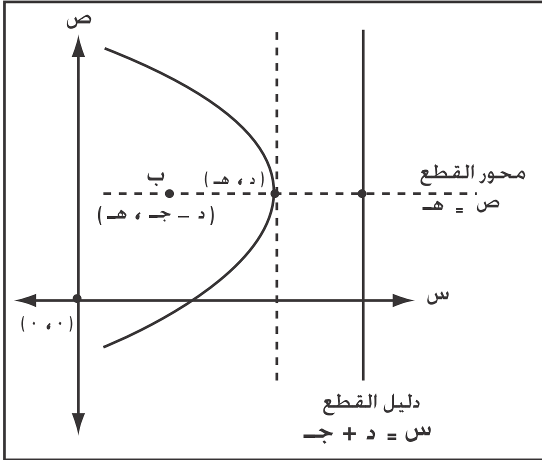
معادلة القطع المكافىء هي :

(ص _ هـ)^{٢} = _ ٤ جـ (س _ د)

_ معادلة محور التماثل : ص = هـ

_ البؤرة : (د _ جـ ، هـ)

_ معادلة الدليل : س = د + جـ



---

٢ / أ

_ محـور التمـاثل يوازي محـور الصادات .
و فتحـة القطـع إلى أعلى .

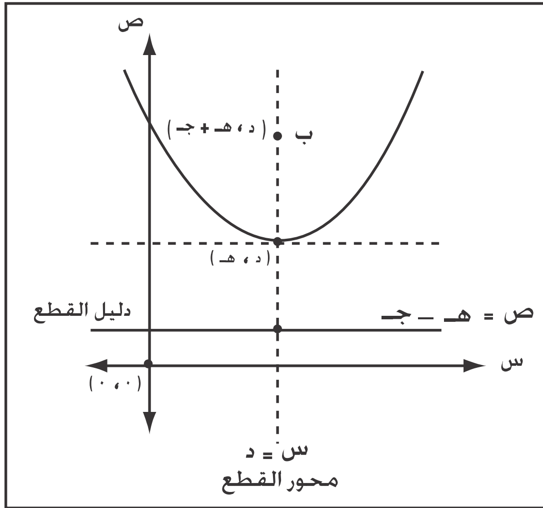
معادلة القطع المكافىء هي :

(س _ د)^{٢} = ٤ جـ (ص _ هـ)

_ معادلة محور التماثل : س = د

_ البؤرة : (د ، هـ + جـ)

_ معادلة الدليل : ص = هـ _ جـ



---

٢ / ب

_ محـور التمـاثل يوازي محـور السينات
و فتحـة القطـع إلى أسفل .

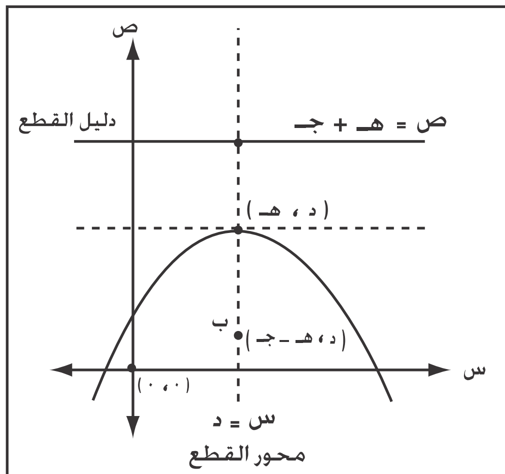
معادلة القطع المكافىء هي :

(س _ د)^{٢} = _ ٤ جـ (ص _ هـ)

_ معادلة محور التماثل : س = د

_ البؤرة : (د ، هـ _ جـ)

_ معادلة الدليل : ص = هـ + جـ



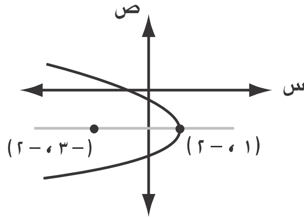
ملاحظة لإيجاد معادلة القطع المكافىء في الصورة القياسية يجب معرفة :

١ _ اتجاه فتحة القطع .

٢ _ إحداثيات الرأس .

٣ _ قيمة جـ .

مثال جد معادلة القطع المكافىء الذي رأسه (١ ، −٢) وبؤرته (−٣ ، −٢) .

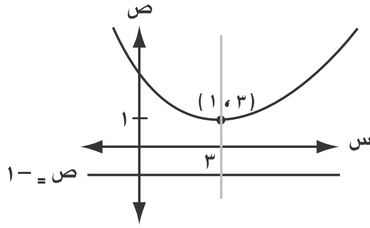


الحل اتجاه فتحة القطع لليسار .

جـ = ١ − −٣ = ٤

معادلة القطع هي : $(ص + ٢)^٢ = -١٦(س - ١)$

مثال جد معادلة القطع المكافىء الذي رأسه (٣ ، ١) ومعادلة دليله ص + ١ = ٠

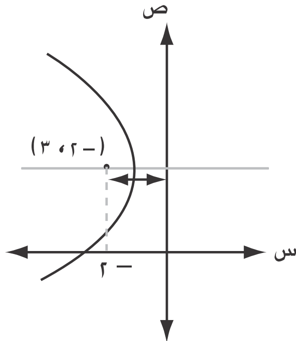


الحل اتجاه فتحة القطع لأعلى .

جـ = ١ − −١ = ٢

معادلة القطع هي : $(س - ٣)^٢ = ٨ (ص - ١)$

مثال جد معادلة القطع المكافىء الذي بؤرته (−٢ ، ٣) و دليله محور الصادات .



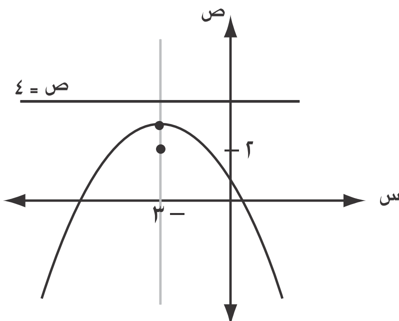
الحل اتجاه فتحة القطع لليسار .

٢جـ = ٠ − −٢ ⟵ جـ = ١

رأس القطع المكافىء (−٢ + ١ ، ٣) = (−١ ، ٣)

معادلة القطع هي : $(ص - ٣)^٢ = -٤(س + ١)$

مثال جد معادلة القطع المكافىء الذي بؤرته (−٣ ، ٢) ومعادلة دليله ص = ٤ .



الحل اتجاه فتحة القطع لأسفل .

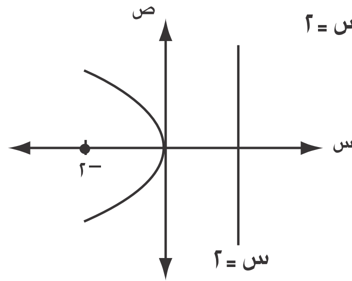
٢جـ = ٤ − ٢ ⟵ جـ = ١

رأس القطع المكافىء (−٣ ، ٢ + ١) = (−٣ ، ٣)

معادلة القطع هي : $(س + ٣)^٢ = -٤ (ص - ٣)$

مثال جد معادلة القطع المكافىء إذا كان هو مجموعة جميع النقط التي كل منها على مسافات متساوية من النقطة $(-٢ ، ٠)$ ومن المستقيم $س = ٢$.

الحل بؤرة القطع : $(-٢ ، ٠)$ ، معادلة دليله : $س = ٢$



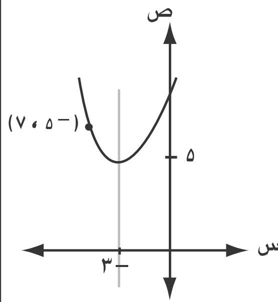
اتجاه فتحة القطع لليسار .

$٢جـ = ٢ - -٢ = ٤ \longleftarrow جـ = ٢$

رأس القطع المكافىء $(-٢ + ٢ ، ٠) = (٠ ، ٠)$

معادلة القطع هي : $ص^٢ = -٨ س$

مثال جد معادلة القطع المكافىء الذي رأسه النقطة $(-٣ ، ٥)$ ومحوره يوازي محور الصادات ويمر منحناه بالنقطة $(-٥ ، ٧)$.



الحل اتجاه فتحة القطع لأعلى .

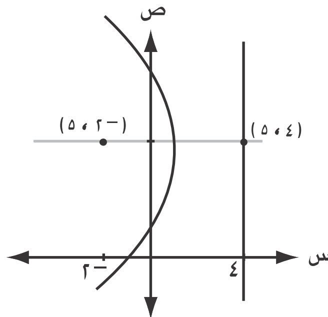
معادلة القطع : $(س + ٣)^٢ = ٤جـ (ص - ٥)$

$(-٥ ، ٧)$ تحقق معادلة القطع $\longleftarrow$

$(-٥ + ٣)^٢ = ٤جـ (٧ - ٥) \longleftarrow ٤ = ٨ جـ \longleftarrow جـ = \frac{١}{٢}$

$\therefore$ معادلة القطع هي : $(س + ٣)^٢ = ٢ (ص - ٥)$

مثال جد معادلة القطع المكافىء الذي بؤرته النقطة $(-٢ ، ٥)$ ويتقاطع دليله مع محور تماثله في النقطة $(٤ ، ٥)$.



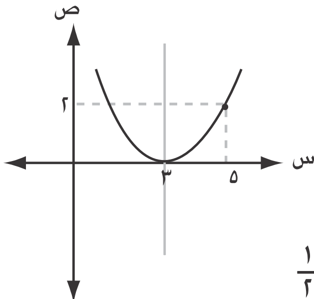
الحل اتجاه فتحة القطع لليسار .

$٢جـ = ٤ - -٢ = ٦ \longleftarrow جـ = ٣$

رأس القطع $(-٢ + ٣ ، ٥) = (١ ، ٥)$

$\therefore$ معادلة القطع هي : $(ص - ٥)^٢ = -١٢ (س - ١)$

مثال جد معادلة القطع المكافىء المار بالنقطة $(٥ ، ٢)$ ، ومحور السينات يمس رأسه عند النقطة $(٣ ، ٠)$.



الحل اتجاه فتحة القطع لأعلى .

رأس القطع $(٣ ، ٠)$

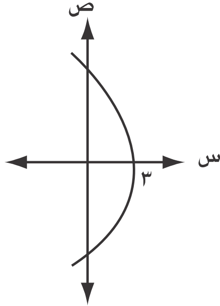
معادلة القطع : $(س - ٣)^٢ = ٤جـ (ص - ٠)$

$(٥ ، ٢)$ تحقق معادلة القطع $\longleftarrow$

$(٥ - ٣)^٢ = ٤جـ (٢) \longleftarrow ٤ = ٨ جـ \longleftarrow جـ = \frac{١}{٢}$

∴ معادلة القطع هي : $(س - ٣)^٢ = ٢ ص$

مثال جد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته نقطة الأصل ورأسه مركز الدائرة التي معادلتها $س^٢ + ص^٢ - ٦ س + ٥ = ٠$



الحل

مركز الدائرة = (- ل ، - ك) = (٣ ، ٠)

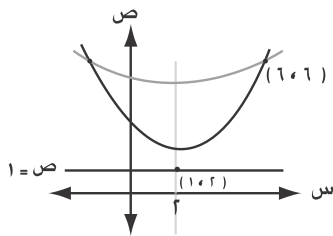
⟵ رأس القطع = (٣ ، ٠)

اتجاه فتحة القطع لليسار

جـ = ٣ - ٠ = ٣

معادلة القطع هي : $ص^٢ = -١٢ (س - ٣)$

مثال جد معادلة القطع المكافئ الذي معادلة محوره س = ٢ ، ومعادلة دليله ص = ١ ، ويمر منحناه بالنقطة (٦ ، ٦) .



الحل

اتجاه فتحة القطع لأعلى .

رأس القطع (٢ ، جـ + ١)

معادلة القطع $(س - ٢)^٢ = ٤ جـ (ص - جـ - ١)$

(٦ ، ٦) تحقق معادلة القطع ⟵

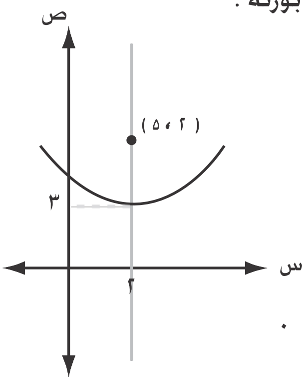
$(٦ - ٢)^٢ = ٤ جـ (٦ - جـ - ١)$ ⟵ ١٦ = ٢٠ جـ - ٤ $جـ^٢$ ⟵ بقسمة طرفي المعادلة على ٤ وترتيب الحدود

$جـ^٢ - ٥ جـ + ٤ = ٠$ ⟵ (جـ - ٤) (جـ - ١) = ٠ ⟵ جـ = ٤ ، جـ = ١

عندما جـ = ٤ | عندما جـ = ١

معادلة القطع هي : $(س - ٢)^٢ = ١٦ (ص - ٥)$ | معادلة القطع هي : $(س - ٢)^٢ = ٤ (ص - ٢)$

مثال جد معادلة القطع المكافئ الذي محوره يوازي محور الصادات ، وبؤرته النقطة (٢ ، ٥) ، ويمر بالنقطة (٠ ، ٣,٥) ويقع رأسه أسفل بؤرته .



الحل اتجاه فتحة القطع لأعلى .

رأس القطع (٢ ، ٥ - جـ)

معادلة القطع $(س - ٢)^٢ = ٤ جـ (ص - ٥ + جـ)$

(٠ ، ٣,٥) تحقق معادلة القطع ⟵

$(٠ - ٢)^٢ = ٤ جـ (٣,٥ - ٥ + جـ)$

⟵ ٤ = ٤ جـ (جـ - ١,٥) ⟵ ٤ $جـ^٢$ - ٦ جـ - ٤ = ٠

⟵ ٢ $جـ^٢$ - ٣ جـ - ٢ = ٠ ⟵ (٢ جـ + ١) (جـ - ٢) = ٠

⟵ جـ = ٢ ، جـ = $\frac{-١}{٢}$ ✗ مرفوض

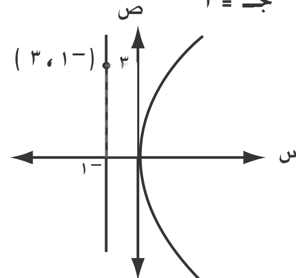
∴ معادلة القطع هي : $(س - ٢)^٢ = ٨ (ص - ٣)$

مثال جد معادلة القطع المكافىء الذي رأسه نقطة الأصل ويمر دليله بالنقطة ($^-1$ ، ٣).

الحل حالتان

اتجاه فتحة القطع لليمين .

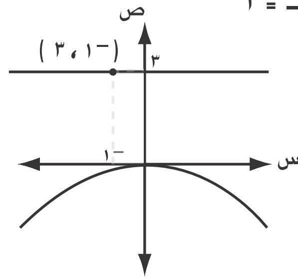
جـ = ١



∴ معادلة القطع هي : $ص^2 = ٤ س$

اتجاه فتحة القطع لأسفل .

جـ = ٣



∴ معادلة القطع هي : $س^2 = {}^-١٢ ص$

مثال جد معادلة القطع المكافىء الذي محوره هو محور السينات ودليله هو محور الصادات ويبعد رأسه عن مركز الدائرة $س^2 + ص^2 = ٤$ بمقدار يساوي طول قطرها .

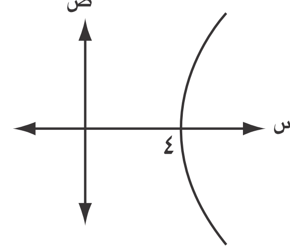
الحل $س^2 + ص^2 = ٤$ هي دائرة مركزها (٠ ، ٠) ونصف قطرها = ٢ .

طول القطر = ٤ .

حالتان

اتجاه فتحة القطع لليمين .

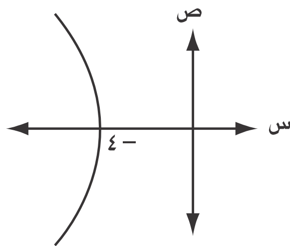
الرأس (٤ ، ٠) ، جـ = ٤



معادلة القطع هي : $ص^2 = ١٦ (س - ٤)$

اتجاه فتحة القطع لليسار .

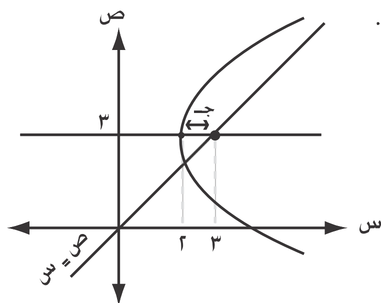
الرأس ($^-٤$ ، ٠) ، جـ = ٤



معادلة القطع هي : $ص^2 = -١٦ (س + ٤)$

مثال جد معادلة القطع المكافىء الذي رأسه النقطة (٢ ، ٣)، ومحوره يوازي محور السينات وبؤرته تقع على المستقيم ص = س .

الحل انظر الشكل المجاور .

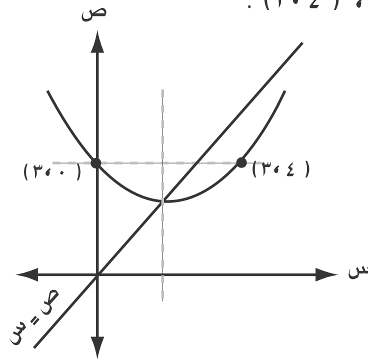


البؤرة (٢ + جـ ، ٣) تقع على المستقيم ص = س

⟵ ٣ = ٢ + جـ ⟵ جـ = ١

∴ معادلة القطع هي : $(ص - ٣)^2 = ٤ (س - ٢)$

مثال جد معادلة القطع المكافىء الذي محوره يوازي محور الصادات ورأسه يقع على المستقيم ص = س ، ويمر بالنقطتين (٣،٠) ، (٣،٤) .



الحل انظر الشكل المجاور

الرأس يقع على المستقيم ص = س

⟵ الرأس (د ، د)

معادلة القطع : $(س - د)^{٢}$ = ٤ جـ (ص - د)

القطع يمر بـ (٣،٠) ⟵

$(٠ - د)^{٢}$ = ٤ جـ (٣ - د) ... (١)

القطع يمر بـ (٣،٤) ⟵

$(٤ - د)^{٢}$ = ٤ جـ (٣ - د) ... (٢)

بقسمة المعادلة (١) على (٢) ⟵ $\frac{د^{٢}}{(٤ - د)^{٢}}$ = ١ ⟵ ١٦ - ٨ د + $د^{٢}$ = $د^{٢}$

⟵ ٨ د = ١٦ ⟵ د = ٢

عوض د = ٢ في المعادلة (١) ⟵ ٤ = ٤ جـ (٣ - ٢) ⟵ جـ = ١

∴ معادلة القطع هي : $(س - ٢)^{٢}$ = ٤ (ص - ٢)

حل اخر

بما أن النقطتين (٣،٠) ، (٣،٤) لهما نفس الإحداثي الصادي

تكون معادلة محور التماثل : س = $\frac{٠ + ٤}{٢}$ = ٢ ⟵ الرأس (٢ ، هـ)

أيضا الرأس يقع على المستقيم ص = س ⟵ الرأس (٢ ، ٢) ⟸ اتجاه فتحة القطع لأعلى .

معادلة القطع : $(س - ٢)^{٢}$ = ٤ جـ (ص - ٢)

القطع يمر بـ (٣،٠) ⟵ $(٠ - ٢)^{٢}$ = ٤ جـ (٣ - ٢) ⟵ جـ = ١

∴ معادلة القطع هي : $(س - ٢)^{٢}$ = ٤ (ص - ٢)

مثال اكتب معادلة القطع المكافىء الذي بؤرته النقطة (٣ ، ١) ومحوره يوازي محور السينات ويمر منحناه بالنقطة (٥،٠) .

الحل حالتان

الحالة الأولى : اتجاه فتحة القطع لليسار .

رأس القطع : (٣+ جـ ، ١)

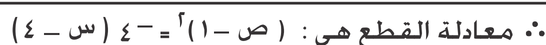
معادلة القطع : $(ص - ١)^{٢}$ = - ٤ جـ (س - ٣ - جـ)

القطع يمر بالنقطة (٥،٠) ⟵ $(٥ - ١)^{٢}$ = - ٤ جـ (٠ - ٣ - جـ)

⟵ ١٦ = ١٢ جـ + ٤ $جـ^{٢}$ ⟵ $جـ^{٢}$ + ٣ جـ - ٤ = ٠

⟵ (جـ + ٤) (جـ - ١) = ٠ ⟵ جـ = ١ ، جـ = -٤ ✕ مرفوض

∴ معادلة القطع هي : (ص − ١)^{٢} = −٤ (س − ٤)



الحالة الثانية : اتجاه فتحة القطع لليمين .

رأس القطع : (٣ − جـ ، ١)

معادلة القطع : (ص − ١)^{٢} = ٤ جـ (س − ٣ + جـ)

القطع يمر بالنقطة (٠ ، ٥) ⟵ (٥ − ١)^{٢} = ٤ جـ (٠ − ٣ + جـ)

⟵ ١٦ = −١٢ جـ + ٤ جـ^{٢} ⟵ جـ^{٢} − ٣ جـ − ٤ = ٠

⟵ (جـ − ٤) (جـ + ١) = ٠ ⟵ جـ = ٤ ، جـ = −١ ✕ مرفوض

∴ معادلة القطع هي : (ص − ١)^{٢} = ١٦ (س + ١)

الصورة العامة لمعادلة القطع المكافىء

١ معادلة القطع المكافىء الذي محوره يوازي محور الصادات هي :

ص = أ س^{٢} + ب س + جـ ، أ ≠ ٠ ، أ ، ب ، جـ ∈ ح

وتكون : اتجاه فتحة القطع لأعلى عندما أ موجبة .

اتجاه فتحة القطع لأسفل عندما أ سالبة .

و معادلة محور التماثل هي الإحداثي السيني لرأس القطع : س = $\frac{-ب}{٢ أ}$

٢ معادلة القطع المكافىء الذي محوره يوازي محور السينات هي :

س = أ ص^{٢} + ب ص + جـ ، أ ≠ ٠ ، أ ، ب ، جـ ∈ ح

وتكون : اتجاه فتحة القطع لليمين عندما أ موجبة .

اتجاه فتحة القطع لليسار عندما أ سالبة .

و معادلة محور التماثل هي الإحداثي الصادي لرأس القطع : ص = $\frac{-ب}{٢ أ}$

ملاحظة : يفضل استخدام الصورة العامة لإيجاد معادلة القطع المكافىء في حال :

١ − علمت (٣) نقاط يمر بها منحنى القطع المكافىء وعلم اتجاه محور التماثل .

٢ − علمت نقطتان يمر بهما القطع المكافىء وعلمت معادلة محور التماثل .

مثال جد معادلة القطع المكافىء الذي محوره يوازي محور السينات ، ويمر منحناه بالنقاط (٣ ، ١) ، (٦ ، ٣) ، (٣ ، −٣) .

الحل س = أ ص^{٢} + ب ص + جـ

القطع يمر بـ (٣ ، ١) ⟵ ٣ = أ (١)^{٢} + ب (١) + جـ

⟵ أ + ب + جـ = ٣ . . . (١)

القطع يمر بـ (٦ ، ٣) ⟵ ٦ = أ (٣)^{٢} + ب (٣) + جـ

⟵ ٩ أ + ٣ ب + جـ = ٦ . . . (٢)

القطع يمر بـ (٣ ، −٣) ⟵ ٣ = أ (−٣)^{٢} + ب (−٣) + جـ

⟵ ٩ أ − ٣ ب + جـ = ٣ . . . (٣)

بطرح المعادلة (١) من المعادلة (٢)

٩ أ + ٣ ب + جـ = ٦

− (أ + ب + جـ = ٣)

٨ أ + ٢ ب = ٣ . . . (٤)

بطرح المعادلة (١) من المعادلة (٣)

٩ أ − ٣ ب + جـ = ٣

− (أ + ب + جـ = ٣)

٨ أ − ٤ ب = ٠ . . . . (٥)

بطرح المعادلة (٤) من المعادلة (٥)

٨ أ − ٤ ب = ٠

− (٨ أ + ٢ ب = ٣)

−٦ ب = −٣ ⟵ ب = $\frac{١}{٢}$

بتعويض ب = $\frac{١}{٢}$ في المعادلة (٥)

⟵ ٨ أ − ٤ ($\frac{١}{٢}$) = ٠ ⟵ أ = $\frac{١}{٤}$

بتعويض أ = $\frac{١}{٤}$ ، ب = $\frac{١}{٢}$ في المعادلة (١) ⟵ $\frac{١}{٤}$ + $\frac{١}{٢}$ + جـ = ٣ ⟵ جـ = $\frac{٩}{٤}$

∴ س = $\frac{١}{٤}$ ص^{٢} + $\frac{١}{٢}$ ص + $\frac{٩}{٤}$

مثال جد معادلة القطع المكافىء الذي يمر بالنقاط (٠ ، ١) ، (٦ ، ١) ، (٣ ، ٢) ودليله يوازي محور السينات .

الحل الدليل يوازي محور السينات ⟵ محور القطع المكافىء يوازي محور الصادات .

ص = أ س^{٢} + ب س + جـ

القطع يمر بـ (٠ ، ١) ⟵ ١ = أ (٠)^{٢} + ب (٠) + جـ ⟵ جـ = ١

القطع يمر بـ (٦ ، ١) ⟵ ١ = أ (٦)^{٢} + ب (٦) + ١

⟵ ٣٦ أ + ٦ ب = ٠ . . . (١)

القطع يمر بـ (٣ ، ٢) ⟵ ٢ = أ (٣)^{٢} + ب (٣) + ١

⟵ ٩ أ + ٣ ب = ١ . . . (٢)

بحل النظام المكون من المعادلتين (١) و (٢) .

٣٦ أ + ٦ ب = ٠

−٢ (٩ أ + ٣ ب = ١)

١٨ أ = −٢ ⟵ أ = $\frac{-١}{٩}$

بتعويض أ = $\frac{-١}{٩}$ في المعادلة (٢)

⟵ ٩ ($\frac{-١}{٩}$) + ٣ ب = ١ ⟵ ب = $\frac{٢}{٣}$

∴ ص = $\frac{-١}{٩}$ س^{٢} + $\frac{٢}{٣}$ س + ١

مثال جد معادلة القطع المكافىء الذي يمر بالنقطتين (٨ ، ١٠) ، (٤ ، ٤) ومحوره هو محور السينات .

الحل معادلة المحور ص = ٠ ⟵ $\frac{-ب}{٢أ}$ = ٠ ⟵ ب = ٠

س = أ ص^٢ + جـ

القطع يمر بـ (٨ ، ١٠) ⟵ ٨ = أ (١٠)^٢ + جـ ⟵ ١٠٠ أ + جـ = ٨ . . . (١)

القطع يمر بـ (٤ ، ٤) ⟵ ٤ = أ (٤)^٢ + جـ ⟵ ١٦ أ + جـ = ٤ . . . (٢)

بطرح المعادلة (٢) من المعادلة (١) .

١٠٠ أ + جـ = ٨

− (١٦ أ + جـ = ٤)

٨٤ أ = ٤ ⟵ أ = $\frac{١}{٢١}$ ⟸ بتعويض أ = $\frac{١}{٢١}$ في المعادلة (١)

⟵ ١٠٠ ($\frac{١}{٢١}$) + جـ = ٨ ⟵ جـ = $\frac{٦٨}{٢١}$

∴ معادلة القطع المكافىء : س = $\frac{١}{٢١}$ ص^٢ + $\frac{٦٨}{٢١}$

مثال جد معادلة القطع المكافىء الذي يمر بالنقطتين (٣ ، −١) ، (٥ ، ٣) ومعادلة محور تماثله س = ٢ .

الحل ص = أ س^٢ + ب س + جـ

معادلة المحور س = ٢ ⟵ $\frac{-ب}{٢أ}$ = ٢ ⟵ ٤ أ + ب = ٠ . . . . . (١)

القطع يمر بـ (٣ ، −١) ⟵ −١ = أ (٣)^٢ + ب (٣) + جـ

⟵ ٩ أ + ٣ ب + جـ = −١ . . . (٢)

القطع يمر بـ (٥ ، ٣) ⟵ ٣ = أ (٥)^٢ + ب (٥) + جـ

⟵ ٢٥ أ + ٥ ب + جـ = ٣ . . . (٣)

بطرح المعادلة (٢) من المعادلة (٣) .

٢٥ أ + ٥ ب + جـ = ٣

− (٩ أ + ٣ ب + جـ = −١)

١٦ أ + ٢ ب = ٤ ⟵ ٨ أ + ب = ٢ . . . (٤)

بطرح المعادلة (١) من المعادلة (٤) .

٨ أ + ب = ٢

− (٤ أ + ب = ٠)

٤ أ = ٢ ⟵ أ = $\frac{١}{٢}$ ⟸ عوض أ = $\frac{١}{٢}$ في المعادلة (٤) ⟵

٨ ($\frac{١}{٢}$) + ب = ٢ ⟵ ب = −٢

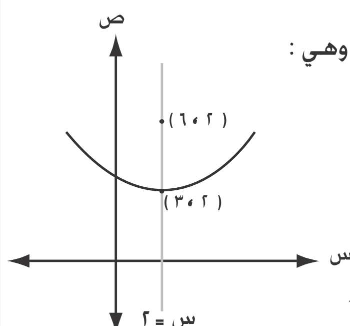
عوض أ = $\frac{١}{٢}$ ، ب = −٢ في المعادلة (٢)

⟵ ٩ ($\frac{١}{٢}$) + ٣ (−٢) + جـ = −١ ⟵ جـ = $\frac{١}{٢}$ ∴ ص = $\frac{١}{٢}$ س^٢ − ٢ س + $\frac{١}{٢}$

إيجاد عناصر القطع المكافىء إذا علمت معادلته

مثال عين الرأس والبؤرة ومعادلة المحور ومعادلة الدليل للقطع المكافىء :

$(س - ٢)^٢ = ١٢ (ص - ٣)$ ، ثم ارسم منحناه .



الحل بمقارنة المعادلة المعطاة بالصورة القياسية لها وهي :

$(س - د)^٢ = ٤ جـ (ص - هـ)$

اتجاه فتحة القطع لأعلى .

الرأس (٢ ، ٣) ، ٤ جـ = ١٢ ⟵ جـ = ٣

البؤرة (٢ ، ٣+٣) = (٢ ، ٦)

معادلة المحور س = ٢ ، معادلة الدليل ص = ٣ - ٣ = ٠

مثال جد إحداثيي الرأس والبؤرة ومعادلتي الدليل والمحور للقطع المكافىء :

$ص^٢ = -٨ (س - ٢)$

الحل بمقارنة المعادلة المعطاة بالصورة القياسية لها وهي :

$(ص - هـ)^٢ = -٤ جـ (س - د)$ اتجاه فتحة القطع لليسار .

الرأس (٢ ، ٠) ، ⁻٤ جـ = ⁻٨ ⟵ جـ = ٢

البؤرة (٢-٢ ، ٠) = (٠ ، ٠)

معادلة المحور ص = ٠ ، معادلة الدليل س = ٢ + ٢ = ٤

مثال جد إحداثيي الرأس والبؤرة ومعادلتي الدليل والمحور للقطع المكافىء :

$٢ س^٢ - ٨ ص = ٠$

الحل $٢ س^٢ = ٨ ص$ ⟵ $س^٢ = ٤ ص$

بمقارنة المعادلة الأخيرة بالصورة القياسية وهي : $(س - د)^٢ = ٤ جـ (ص - هـ)$

اتجاه فتحة القطع لأعلى .

الرأس (٠ ، ٠) ، ٤ جـ = ٤ ⟵ جـ = ١

البؤرة (٠ ، ٠+١) = (٠ ، ١)

معادلة المحور س = ٠ ، معادلة الدليل ص = ٠ - ١ = ⁻١

مثال جد إحداثيي الرأس والبؤرة ومعادلتي الدليل والمحور للقطع المكافىء :

$(ص + ١)^٢ = ٤ س - ٨$

الحل $(ص + ١)^٢ = ٤ (س - ٢)$ اتجاه فتحة القطع لليمين .

الرأس (٢ ، ⁻١) ، ٤ جـ = ٤ ⟵ جـ = ١

البؤرة (٢+١ ، ⁻١) = (٣ ، ⁻١)

معادلة المحور ص = ⁻١ ، معادلة الدليل س = ٢ - ١ = ١

مثال جد إحداثيي الرأس والبؤرة ومعادلتي الدليل والمحور للقطع المكافىء :

$(ص - ١) = ٢ (١ - س)^٢$

الحل

$(١ - س)^٢ = \frac{١}{٢} (ص - ١) \longrightarrow (س - ١)^٢ = \frac{١}{٢} (ص - ١)$

بمقارنة المعادلة الأخيرة بالصورة القياسية وهي : $(س - د)^٢ = ٤ جـ (ص - هـ)$

اتجاه فتحة القطع لأعلى .

الرأس $(١ ، ١)$ ، $٤ جـ = \frac{١}{٢} \longrightarrow جـ = \frac{١}{٨}$

البؤرة $(١ ، ١ + \frac{١}{٨}) = (١ ، \frac{٩}{٨})$

معادلة المحور $س = ١$ ، معادلة الدليل $ص = ١ - \frac{١}{٨} = \frac{٧}{٨}$

مثال جد معادلة المحور وإحداثيات الرأس للقطع المكافىء : $ص = \frac{-١}{٨} س^٢ + ٣ س + ٦$

الحل

بمقارنة المعادلة المعطاة بالصورة العامة لها وهي : $ص = أ س^٢ + ب س + جـ$

معادلة محور التماثل : $س = \frac{-ب}{٢ أ} = \frac{-٣}{٢ (\frac{-١}{٨})} = ١٢$

$ص |_{س = ١٢} = \frac{-١}{٨} (١٢)^٢ + ٣ (١٢) + ٦ = ٢٤$

الرأس $(١٢ ، ٢٤)$

مثال جد إحداثيي الرأس والبؤرة ومعادلتي الدليل والمحور للقطع المكافىء :

$٤ ص - س^٢ + ٦ س - ١٣ = ٠$

الحل

نكتب المعادلة $٤ ص - س^٢ + ٦ س - ١٣ = ٠$ بالشكل $س^٢ - ٦ س = ٤ ص - ١٣$

وبإكمال المربع في س (بإضافة مربع نصف معامل س إلى طرفي المعادلة)

$س^٢ - ٦ س + ٩ = ٤ ص - ١٣ + ٩ \longrightarrow (س - ٣)^٢ = ٤ ص - ٤ = ٤ (ص - ١)$

اتجاه فتحة القطع لأعلى .

الرأس $(٣ ، ١)$ ، $٤ جـ = ٤ \longrightarrow جـ = ١$

البؤرة $(٣ ، ١ + ١) = (٣ ، ٢)$

معادلة المحور $س = ٣$ ، معادلة الدليل $ص = ١ - ١ = ٠$

مثال جد إحداثيي الرأس والبؤرة ومعادلتي الدليل والمحور للقطع المكافىء :

$٨ س - ٩ ص^٢ + ١٨ ص + ٣٣ = ٠$

الحل

$٩ ص^٢ - ١٨ ص = ٨ س + ٣٣$

$٩ (ص^٢ - ٢ ص) = ٨ س + ٣٣$

$٩ (ص^٢ - ٢ ص + ١) = ٨ س + ٣٣ + ٩$

$٩ (ص - ١)^٢ = ٨ س + ٤٢$

٩ (ص ـ ١)^٢ = ٨ (س + $\frac{٢١}{٤}$)

(ص ـ ١)^٢ = $\frac{٨}{٩}$ (س + $\frac{٢١}{٤}$)   اتجاه فتحة القطع لليمين .

الرأس ($\frac{-٢١}{٤}$ ، ١) ، ٤ جـ = $\frac{٨}{٩}$ ⟵ جـ = $\frac{٢}{٩}$

البؤرة ($\frac{-٢١}{٤}$ + $\frac{٢}{٩}$ ، ١) = ($\frac{-١٨١}{٣٦}$ ، ١)

معادلة المحور ص = ١ ، معادلة الدليل س = $\frac{-٢١}{٤}$ ـ $\frac{٢}{٩}$ = $\frac{-١٩٧}{٣٦}$

مثال جد إحداثيي الرأس والبؤرة ومعادلتي الدليل والمحور للقطع المكافىء :

٤ ص^٢ ـ ٤ س ـ ٨ ص = ٣

الحل

٤ ص^٢ ـ ٨ ص = ٤ س + ٣

٤ (ص^٢ ـ ٢ ص) = ٤ س + ٣

٤ (ص^٢ ـ ٢ ص + ١) = ٤ س + ٣ + ٤

٤ (ص ـ ١)^٢ = ٤ (س + $\frac{٧}{٤}$)

(ص ـ ١)^٢ = (س + $\frac{٧}{٤}$)   اتجاه فتحة القطع لليمين .

الرأس ($\frac{-٧}{٤}$ ، ١) ، ٤ جـ = ١ ⟵ جـ = $\frac{١}{٤}$

البؤرة ($\frac{-٧}{٤}$ + $\frac{١}{٤}$ ، ١) = ($\frac{-٣}{٢}$ ، ١)

معادلة المحور ص = ١ ، معادلة الدليل س = $\frac{-٧}{٤}$ ـ $\frac{١}{٤}$ = ـ٢

مثال المعادلة ص = ـ٦(س + ٣)^٢ ـ ٥ تمثل قطعا مكافئا . أجب عما يأتي :

١ ـ حدد اتجاه فتحة القطع .

٢ ـ جد إحداثيات رأس القطع .

٣ ـ جد معادلة محور التماثل للقطع .

٤ ـ جد الإحداثي الصادي لنقطة تقاطع منحنى القطع مع محور الصادات .

الحل (س + ٣)^٢ = $\frac{-١}{٦}$ (ص + ٥)

اتجاه فتحة القطع لأسفل .

الرأس (ـ٣ ،ـ٥) ، معادلة المحور : س = ـ٣

ص|ـس = ٠ = ـ٦(٠ + ٣)^٢ ـ ٥ = ـ ٥٩ (الإحداثي الصادي لنقطة تقاطع منحنى القطع مع محور الصادات)

مثال جد إحداثيي الرأس والبؤرة ومعادلتي الدليل والمحور للقطع المكافىء :

٢ ص^٢ ـ ٨ ص = ٦ ـ ٤ س

الحل

بقسمة طرفي المعادلة على ٢ ⟵ ص^{٢} ـ ٤ ص = ٣ ـ ٢ س

ص^{٢} ـ ٤ ص + ٤ = ٣ ـ ٢ س + ٤

(ص ـ ٢)^{٢} = ـ ٢ (س ـ $\frac{٧}{٢}$)

اتجاه فتحة القطع لليسار .

الرأس ($\frac{٧}{٢}$ ، ٢) ، ٤ جـ = ٢ ⟵ جـ = $\frac{١}{٢}$

البؤرة ($\frac{٧}{٢}$ ـ $\frac{١}{٢}$ ، ٢) = (٣ ، ٢)

معادلة المحور ص = ٢ ، معادلة الدليل س = $\frac{٧}{٢}$ + $\frac{١}{٢}$ = ٤

مثال إذا كانت ص^{٢} ـ ١٠ ص = ـ ٤ س ـ ك هي معادلة قطع مكافىء رأسه (٥ ، ٥) فأوجد قيمة ك ، ثم اكتب معادلة هذا القطع على الصورة القياسية ، وأوجد كل من بؤرته ومعادلتي محوره و دليله .

الحل الرأس يحقق معادلة القطع ⟵ (٥)^{٢} ـ ١٠(٥) = ـ٤ (٥) ـ ك

⟵ ك = ٥

فتصبح معادلة القطع : ص^{٢} ـ ١٠ ص = ـ ٤ س ـ ٥

ص^{٢} ـ ١٠ ص + ٢٥ = ـ ٤ س ـ ٥ + ٢٥

(ص ـ ٥)^{٢} = ـ ٤ (س ـ ٥) الصورة القياسية لمعادلة القطع .

اتجاه فتحة القطع لليسار .

٤ جـ = ٤ ⟵ جـ = ١

البؤرة (٥ ـ ١ ، ٥) = (٤ ، ٥)

معادلة المحور ص = ٥ ، معادلة الدليل س = ٥ + ١ = ٦

مثال إذا كانت (٣ ، ـ١) هي بؤرة القطع المكافىء الذي معادلته (ص + ١)^{٢} = ـ ٨ (س + د) فما قيمة الثابت د .

الحل اتجاه فتحة القطع لليسار .

الرأس (ـ د ، ـ١) ، ٤ جـ = ٨ ⟵ جـ = ٢

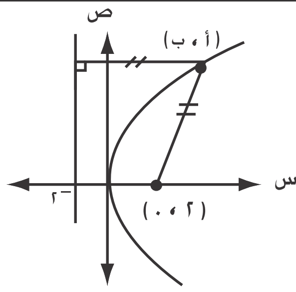
البؤرة (ـ د ـ ٢ ، ـ١) = (٣ ، ـ١)

ـ د ـ ٢ = ٣ ⟵ د = ـ ٥

مثال جد إحداثيات النقاط التي تنتمي للقطع المكافىء ص^{٢} ـ ٨ س = ٠ والتي تبعد عن بؤرته بمقدار (١٠) وحدات .

الحل ص^{٢} ـ ٨ س = ٠ ⟵ ص^{٢} = ٨ س اتجاه فتحة القطع لليمين .

الرأس (٠ ، ٠) ، ٤ جـ = ٨ ⟵ جـ = ٢ ، معادلة الدليل س = ٠ ـ ٢ = ـ٢
: س + ٢ = ٠



البؤرة (٠ + ٢ ، ٠) = (٢ ، ٠)

افرض النقطة المطلوبة (أ ، ب)

بعد النقطة عن البؤرة = بعدها عن الدليل .

$١٠ = \frac{|١ (أ) + ٠ (ب) + ٢|}{\sqrt{(١)^{٢} + (٠)^{٢}}}$ ⟵ | أ + ٢ | = ١٠

⟵ أ + ٢ = ١٠ ، أ + ٢ = ١٠⁻

أ = ٨   أ = ١٢⁻ ✕ مرفوض

عندما س = أ = ٨ ⟵ $ص^{٢}$ = ٨ (٨) = ٦٤ ⟵ ص = ± ٨

∴ النقطتان : (٨ ، ٨) ، (٨ ، ٨⁻)

أمثلة متنوعة

مثال قطع مكافىء رأسه نقطة الأصل ومعادلة دليله ص = ٤ فإذا كان منحنى القطع يمر بالنقطة (٨ ، د) فأوجد قيمة د .

الحل اتجاه فتحة القطع لأسفل .

جـ = ٤

∴ معادلة القطع هي : $س^{٢}$ = ١٦⁻ ص

(٨ ، د) تحقق معادلة القطع ⟵ $(٨)^{٢}$ = ١٦⁻ (د)

⟵ د = ٤⁻

مثال جد معادلة القطع المكافىء الذي رأسه نقطة الأصل ومعادلة دليله ص = − أ ، أ > ٠ ويمر بالنقطة (١ ، ١) .

الحل اتجاه فتحة القطع لأعلى .

جـ = أ

معادلة القطع : $س^{٢}$ = ٤ أ ص

(١ ، ١) تحقق معادلة القطع ⟵ $(١)^{٢}$ = ٤ أ (١)

⟵ أ = $\frac{١}{٤}$

∴ معادلة القطع هي : $س^{٢}$ = ص

مثال جد إحداثيي الرأس والبؤرة ومعادلتي الدليل والمحور للقطع المكافىء :

$س^{٢} - س = ٤ ص - \frac{١}{٤}$

الحل

$س^{٢} - س + \frac{١}{٤} = ٤ ص - \frac{١}{٤} + \frac{١}{٤}$ ⟵ $(س - \frac{١}{٢})^{٢} = ٤ ص$

اتجاه فتحة القطع لأعلى .

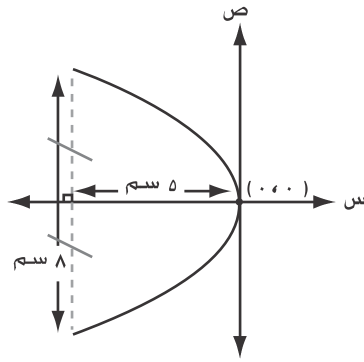
الرأس ($\frac{١}{٢}$ ، ٠) ، ٤ جـ = ٤ ⟵ جـ = ١

البؤرة $(\frac{1}{2} ، ٠ + ١) = (\frac{1}{2} ، ١)$

معادلة المحور س = $\frac{1}{2}$

معادلة الدليل : ص = ٠ ـ ١ = $^{-}$١

مثال استخدم المعلومات الواردة في الشكل المجاور لإيجاد معادلة القطع المكافىء .



(الحل) الرأس (٠ ، ٠)

معادلة القطع ص^{2} = ـ ٤ جـ س

النقطة ($^{-}$٥ ، ٤) تحقق معادلة القطع

⟵ (٤)^{2} = ـ ٤ جـ ($^{-}$٥)

⟵ جـ = $\frac{٤}{٥}$

∴ معادلة القطع هي : ص^{2} = $^{-}\frac{١٦}{٥}$ س

مثال من سطح الأرض قذف جسم رأسيا إلى أعلى حسب العلاقة : ف (ن) = ٢٠ ن ـ ٥ ن^{2} ، حيث ن الزمن بالثواني ، ف الارتفاع بالأمتار، احسب أقصى ارتفاع يصل إليه الجسم عن سطح الأرض مستخدما تعريف القطع المكافىء .

(الحل) بمقارنة المعادلة المعطاة بالصورة العامة لمعادلة القطع المكافىء وهي :

ف = أ ن^{2} + ب ن + جـ

يكون اتجاه فتحة القطع لأسفل .

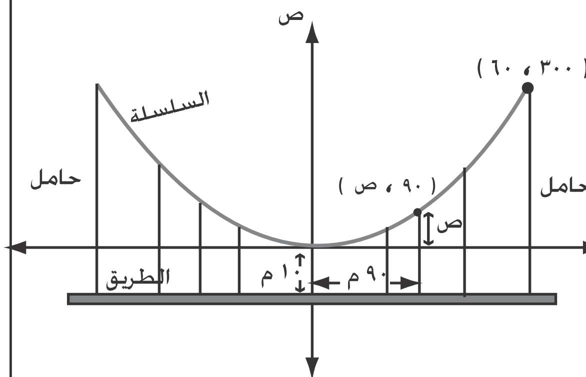
الرأس = $(\frac{-ب}{٢أ} ، ف(\frac{-ب}{٢أ}))$

$\frac{-ب}{٢أ} = \frac{-٢٠}{٢(-٥)} = ٢$ ، ف (٢) = ٢٠ (٢) ـ ٥ (٢)^{2} = ٢٠

الرأس (٢ ، ٢٠)

∴ أقصى ارتفاع يصل إليه الجسم عن سطح الأرض = الإحداثي الصادي للرأس = ٢٠ مترا .

مثال الشكل المجاور يمثل جسرا معلقا ارتفاع كل من حامليه ٧٠ مترا والمسافة بينهما ٦٠٠ مترا وسلسلته على شكل قطع مكافىء، أدنى نقطة فيه على ارتفاع ١٠ أمتار عن الطريق . أوجد معادلة القطع المكافىء اخذا محور الصادات منطبقا على محوره ومتجها نحو الأعلى



والعمودي عليه من رأس القطع محورا للسينات . ثم أوجد طول القضيب الذي يحمل الجسر والواقع على بعد ٩٠ مترا من رأسه .

(الحل) من الشكل نلاحظ أن اتجاه فتحة القطع لأعلى .

معادلة القطع : $س^2 = ٤ جـ ص$

النقطة (٣٠٠ ، ٦٠) تحقق معادلة القطع ⟵ $(٣٠٠)^2 = ٤ جـ (٦٠)$

⟵ ٤ جـ = ١٥٠٠

∴ معادلة القطع هي : $س^2 = ١٥٠٠ ص$

افرض نقطة تقاطع القضيب المذكور هي (٩٠ ، ص) وهي تحقق معادلة القطع

⟵ $(٩٠)^2 = ١٥٠٠ (ص)$ ⟵ ص = $\frac{٢٧}{٥}$ = ٥,٤

وعليه فإن طول القضيب = ١٠ + ٥,٤ = ١٥,٤ مترا .

مثال مصباح كشاف في باخرة على شكل قطع مكافىء دوراني (أي السطح الناشىء عن دوران قطع مكافىء حول محوره) فإذا كان قطر فتحة المصباح ٣٠ سم وأكبر عمق له ٢٠ سم ، أوجد البعد البؤري للمصباح (أي بعد البؤرة عن الرأس) .

(الحل) نختار المحورين كما هو مبين في الشكل المجاور بحيث نقطة الأصل تمثل رأس القطع وبؤرته تنتمي لمحور السينات وفتحته إلى اليسار .

الرأس (٠ ، ٠)

معادلة القطع $ص^2 = - ٤ جـ س$

النقطة (-٢٠ ، ١٥) تحقق معادلة القطع

⟵ $(١٥)^2 = - ٤ جـ (-٢٠)$ ⟵ جـ = $\frac{٤٥}{١٦}$

∴ البعد البؤري المطلوب = $\frac{٤٥}{١٦}$ سم .

مثال صمم أحد المهندسين جسرا علويا مقطعه على شكل قطع مكافىء على أحد الطرق السريعة (انظر الشكل المجاور) ، فإذا كانت بؤرته على بعد (٢) متر من الرأس وكان أقصى ارتفاع للجسر (٥) متر . احسب المسافة الأفقية (أ ب) بين نهايتي القوس الذي يمثل مقطع الجسر .

(الحل) أ نقطة واقعة على القطع المكافىء :

أ جـ = أ هـ = ٧ م (من تعريف القطع المكافىء)

△ جـ د أ قائم الزاوية في د :

(أ جـ)^{٢} = (أ د)^{٢} + (د جـ)^{٢}

(٧)^{٢} = (أ د)^{٢} + (٣)^{٢}

(أ د)^{٢} = ٤٠ ⟵ أ د = $\sqrt{٤٠}$ م ⟵ أ ب = ٢ $\sqrt{٤٠}$ م

مثال إذا قطع منحنى القطع المكافىء الذي معادلته ص = م س^{٢} + ٥ س المستقيم الذي معادلته ص − ٣ س − ١ = ٠ عندما س = ١، فأوجد بؤرة ذلك القطع .

الحل س = ١ ⟵ ص − ٣ (١) − ١ = ٠ ⟵ ص = ٤ (التعويض في معادلة المستقيم)

النقطة (١ ، ٤) تحقق معادلة القطع ⟵ ٤ = م (١)^{٢} + ٥ (١) ⟵ م = $^{-}$١

معادلة القطع : ص = $^{-}$س^{٢} + ٥ س اتجاه فتحة القطع لأسفل

ص = − (س^{٢} − ٥ س) وبإكمال المربع

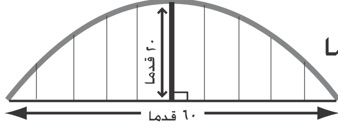
ص − $\frac{٢٥}{٤}$ = − (س^{٢} − ٥ س + $\frac{٢٥}{٤}$)

(س − $\frac{٥}{٢}$)^{٢} = − (ص − $\frac{٢٥}{٤}$)

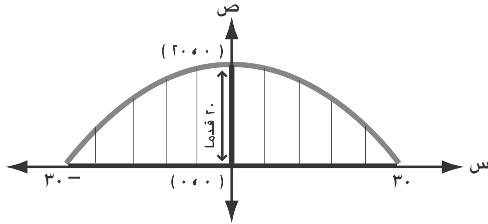
الرأس : ($\frac{٥}{٢}$ ، $\frac{٢٥}{٤}$) ، ٤ جـ = ١ ⟵ جـ = $\frac{١}{٤}$

البؤرة : ($\frac{٥}{٢}$ ، $\frac{٢٥}{٤}$ − $\frac{١}{٤}$) = ($\frac{٥}{٢}$ ، ٦)

مثال بوابة على شكل قوس من قطع مكافىء كما بالشكل المجاور، فإذا كان أعلى ارتفاع لها ٢٠ قدما وكان عرضها ٦٠ قدما،أوجد ارتفاع البوابة عن كل من النقطتين التي تبعد كل منهما عن منتصف القاعدة بمقدار ١٦ قدما .



الحل نختار محوري الإحداثيات كما هو مبين في الشكل المجاور .



اتجاه فتحة القطع لأسفل .

الرأس (٠ ، ٢٠)

معادلة القطع : س^{٢} = − ٤ جـ (ص − ٢٠)

النقطة (٣٠ ، ٠) تحقق معادلة القطع

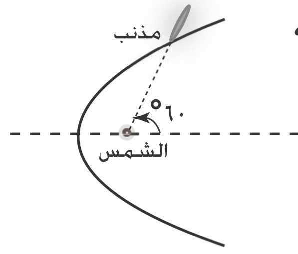
⟵ (٣٠)^{٢} = − ٤ جـ (٠ − ٢٠) ⟵ ٤ جـ = ٤٥

∴ معادلة القطع هي : س^{٢} = − ٤٥ (ص − ٢٠)

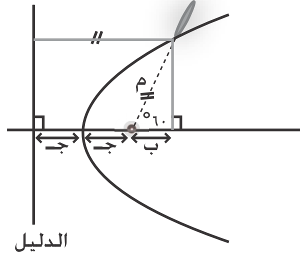
عندما س = ١٦ ⟵ (١٦)^{٢} = − ٤٥ (ص − ٢٠) ⟵ ص = $\frac{٦٤٤}{٤٥}$

وعليه فإن ارتفاع البوابة عن كل من النقطتين التي تبعد كل منهما عن منتصف القاعدة بمقدار ١٦ قدما = $\frac{٦٤٤}{٤٥}$ قدم .

مثال يتحرك مذنب في مدار على شكل قطع مكافىء ، الشمس بؤرته . و عندما يكون المذنب على بعد (م) وحدة فلكية عن الشمس تكون الزاوية المحصورة بين محور القطع والخط المستقيم الواصل بين المذنب والشمس 60° . جد أقرب مسافة بين المذنب و الشمس .
(انظر الشكل المجاور)



الحل



رأس القطع المكافىء هو أقرب نقاط القطع إلى البؤرة .
(جـ هي أقرب مسافة بين المذنب و الشمس)

بعد المذنب عن البؤرة = بعد المذنب عن الدليل

م = ب + ٢ جـ ..... (١)

نجد قيمة ب .

جتا٦٠ = $\frac{١}{٢}$ = $\frac{ب}{م}$ ⟵ ب = $\frac{م}{٢}$

عوض ب = $\frac{م}{٢}$ في المعادلة (١) ⟵ م = $\frac{م}{٢}$ + ٢ جـ ⟵ جـ = $\frac{م}{٤}$

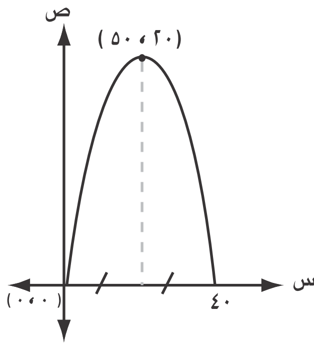
∴ أقرب مسافة بين المذنب و الشمس = $\frac{م}{٤}$ وحدة فلكية .

ملاحظة : الوحدة الفلكية الواحدة ≃ ٩٢,٦ مليون ميل .

مثال أطلقت قذيفة من مستوى سطح أرض أفقية إلى الأعلى وعادت إلى نفس المستوى ، وكان مسارها على منحنى قطع مكافىء . فإذا كان أعلى ارتفاع وصلته القذيفة (٥٠) مترا وأقصى مدى أفقي لها هو (٤٠) مترا ، معتبرا نقطة الانطلاق هي (٠ ، ٠)
جد ما يأتي :

١) معادلة القطع المكافىء .

٢) ارتفاع القذيفة عن سطح الأرض عندما يكون هذا الارتفاع مساويا للمسافة بين نقطة انطلاق القذيفة ومسقطها على الأرض .



الحل

نختار المحورين كما هو مبين في الشكل المجاور .

اتجاه فتحة القطع لأسفل ، الرأس : (٢٠ ، ٥٠)

معادلة القطع : $(س - ٢٠)^٢ = -٤جـ (ص - ٥٠)$

(٠ ، ٠) تحقق معادلة القطع ⟵ $(٠ - ٢٠)^٢ = -٤جـ (٠ - ٥٠)$

⟵ ٤ جـ = ٨

∴ معادلة القطع هي : $(س - ٢٠)^٢ = -٨ (ص - ٥٠)$

٢) المطلوب ص عندما س = ص .

عوض ص بدلا من س في معادلة القطع

← $ص^{٢} - ٤٠ ص + ٤٠٠ = -٨ ص + ٤٠٠$

← $ص^{٢} - ٣٢ ص = ٠$ ← ص (ص - ٣٢) = ٠ .

← ص = ٠ ، ص = ٣٢

مثال احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى قطع مكافىء ومحور السينات إذا كانت النقطة (٣ ، ١) تمثل رأس القطع ، ومعادلة الدليل : ص = ٢

الحل نجد معادلة القطع المكافىء .

اتجاه فتحة القطع لأسفل .

جـ = ٢ - ١ = ١

معادلة القطع هي : $(س - ٣)^{٢} = -٤ (ص - ١)$

← $س^{٢} - ٦ س + ٩ = -٤ ص + ٤$

← $ص = \frac{-١}{٤} (س^{٢} - ٦ س + ٥)$

نجد حدود التكامل

$\frac{-١}{٤} (س^{٢} - ٦ س + ٥) = ٠$ ← $(س^{٢} - ٦ س + ٥) = ٠$

← (س - ٥) (س - ١) = ٠ ← س = ٥ ، س = ١

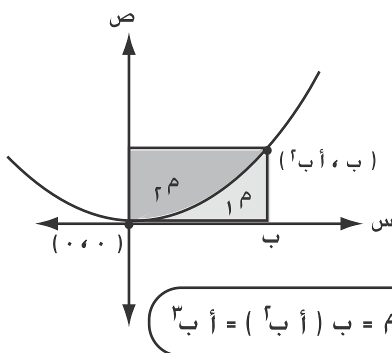
$$م = \frac{-١}{٤} \int_{١}^{٥} (س^{٢} - ٦ س + ٥) . د س = \frac{-١}{٤} \left(\frac{١}{٣} س^{٣} - ٣ س^{٢} + ٥ س \right) \Big|_{١}^{٥}$$

$$= \frac{-١}{٤} \left(\left(\frac{١}{٣} (٥)^{٣} - ٣ (٥)^{٢} + ٥ (٥) \right) - \left(\frac{١}{٣} (١)^{٣} - ٣ (١)^{٢} + ٥ (١) \right) \right)$$

$= \frac{٨}{٣}$ وحدة مساحة .

مثال إذا قطع منحنى القطع المكافىء الذي معادلته ص = أ $س^{٢}$ ، أ > ٠ مستطيلا مساحته (م) وحدة في رأسين متقابلين و انطبق أحد أضلاع المستطيل على محور القطع . بين أن القطع يقسم مساحة المستطيل إلى جزأين إحداها تساوي $\frac{م}{٣}$ والأخرى $\frac{٢م}{٣}$.

الحل نرسم شكلا مناسبا كالشكل المجاور .



$م = ب (أ ب^{٢}) = أ ب^{٣}$

إحدى نقطتي التقاطع ستكون (٠ ، ٠)

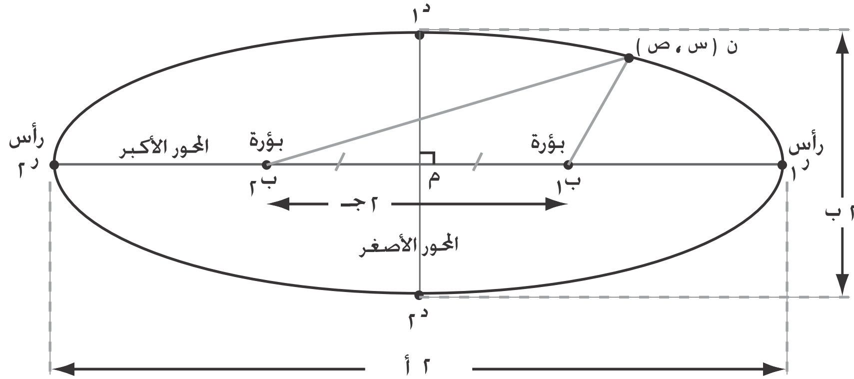
والأخرى على الصورة (ب ، أ $ب^{٢}$) ، ب > ٠

$$م_{١} = \int_{٠}^{ب} أ س^{٢} . د س = \frac{أ}{٣} س^{٣} \Big|_{٠}^{ب} = \frac{١}{٣} أ ب^{٣} = \frac{م}{٣}$$

$$م_{٢} = م - \frac{م}{٣} = \frac{٢م}{٣}$$

القطع الناقص

تعريف القطع الناقص هو المحل الهندسي للنقطة ن (س ، ص) المتحركة في المستوى والتي يكون مجموع بعديها عن نقطتين ثابتتين (تسميان البؤرتين) يساوي مقدارا ثابتا (طول المحور الأكبر) .



الشكل العلوي يمثل قطعا ناقصا (حيث م المركز) وفيه.

١) $ر_1$ ، $ر_2$ رأسا القطع ، ويسمى $ر_1 ر_2$ بالمحور الأكبر ، ويكون $ر_1 ر_2$ = ٢أ

حيث أ بعد الرأس عن المركز .

(أ > ب)

٢) تسمى $ب_1$ ، $ب_2$ بؤرتا القطع ويكون $ب_1 ب_2$ = ٢ جـ (البعد البؤري) .

حيث جـ بعد البؤرة عن المركز .

(أ ، ب ، جـ أعداد موجبة أكبرها أ)

٣) تسمى $د_1$ ، $د_2$ طرفا المحور الأصغر ، ويكون $د_1 د_2$ = ٢ ب

حيث ب بعد أحد طرفي المحور الأصغر عن المركز.

٤) محورا القطع هما محورا تناظر متعامدان وينصف كل منهما الاخر ويتقاطعان في نقطة تسمى مركز القطع الناقص .

٥) مركز القطع الناقص ينصف $\overline{ر_1 ر_2}$ ، $\overline{د_1 د_2}$ ، $\overline{ب_1 ب_2}$.

ملاحظات :

١) ن $ب_1$ + ن $ب_2$ = ٢ أ (من تعريف القطع الناقص) .

٢) $جـ^2 = أ^2 - ب^2$

تعريف الاختلاف المركزي للقطع الناقص (هـ) هو النسبة بين نصف البعد البؤري إلى نصف طول المحور الأكبر .

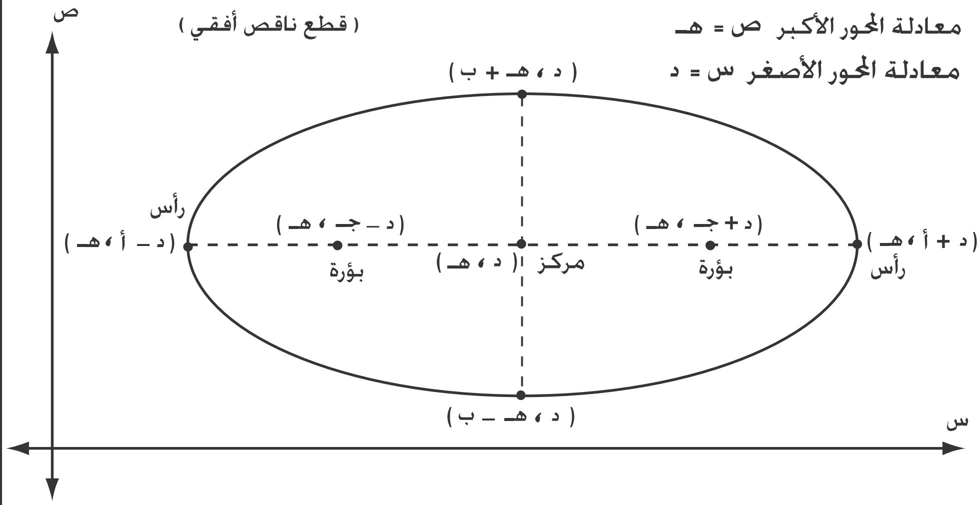
هـ = $\frac{جـ}{أ}$ < ١ لأن جـ < أ (٠ < هـ < ١)

★ الصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص إذا كان مركزه (د ، هـ) ومحوره الأكبر يوازي محور السينات هي:

$$\frac{(\text{س} - \text{د})^2}{\text{أ}^2} + \frac{(\text{ص} - \text{هـ})^2}{\text{ب}^2} = 1$$

معادلة المحور الأكبر ص = هـ

معادلة المحور الأصغر س = د

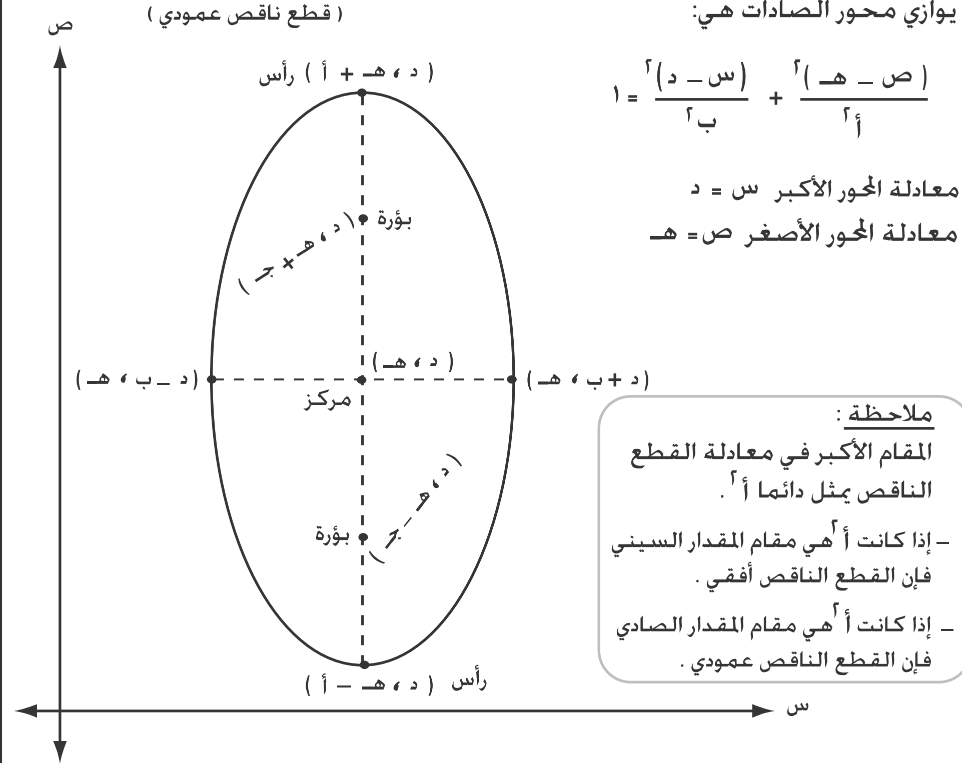


★ الصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص إذا كان مركزه (د ، هـ) ومحوره الأكبر يوازي محور الصادات هي:

$$\frac{(\text{ص} - \text{هـ})^2}{\text{أ}^2} + \frac{(\text{س} - \text{د})^2}{\text{ب}^2} = 1$$

معادلة المحور الأكبر س = د

معادلة المحور الأصغر ص= هـ



ملاحظة :

المقام الأكبر في معادلة القطع الناقص يمثل دائما أ^2 .

- إذا كانت أ^2 هي مقام المقدار السيني فإن القطع الناقص أفقي .
- إذا كانت أ^2 هي مقام المقدار الصادي فإن القطع الناقص عمودي .

ملاحظة : لإيجاد عناصر القطع الناقص نكتب معادلة القطع بالصورة القياسية ونحدد نوعه ثم نجد إحداثيات المركز وقيمة أ، ب ، جـ ثم نجد بقية العناصر .

مثال جد إحداثيات المركز والرؤوس والبؤرتين ، ومعادلة وطول كل من المحورين الأكبر والأصغر والبعد البؤري والاختلاف المركزي لكل من القطوع الناقصة الاتية :

١) $\frac{س^٢}{٢٥} + \frac{ص^٢}{١٤٤} = ١$ ٢) $\frac{(٤ - س)^٢}{٨١} + \frac{(ص + ١)^٢}{٢٥} = ١$

٣) $٤ س^٢ + ٩ ص^٢ = ١$ ٤) $\frac{(٣ ص + ٦)^٢}{٩} + \frac{س^٢}{٤} - ١ = ٠$

٥) $٩ س^٢ + ٤ ص^٢ + ١٨ س = ٨ ص + ٢٣$ ٦) $١٦ (س - ٢)^٢ + ٢٥ (ص - ٣)^٢ = ٤٠٠$

الحل

١) $\frac{س^٢}{٢٥} + \frac{ص^٢}{١٤٤} = ١$ (المعادلة في الصورة القياسية) وبما أن $١٤٤ > ٢٥$ فالقطع عمودي

المركز $(٠ ، ٠)$ ، $أ^٢ = ١٤٤ \longrightarrow أ = ١٢$ ، $ب^٢ = ٢٥ \longrightarrow ب = ٥$

$جـ^٢ = أ^٢ - ب^٢ = ١٤٤ - ٢٥ = ١١٩ \longrightarrow جـ = \sqrt{١١٩}$

الرأسان : $(٠ ، \pm ١٢)$ ، البؤرتان : $(٠ ، \pm \sqrt{١١٩})$

طرفا المحور الأصغر : $(\pm ٥ ، ٠)$

معادلة المحور الأكبر : $س = ٠$ وطوله $٢ أ = ٢ (١٢) = ٢٤$

معادلة المحور الأصغر : $ص = ٠$ وطوله $٢ ب = ٢ (٥) = ١٠$

البعد البؤري $= ٢ جـ = ٢ \sqrt{١١٩}$ ، الاختلاف المركزي $هـ = \frac{جـ}{أ} = \frac{\sqrt{١١٩}}{١٢}$

---

٢) $\frac{(٤ - س)^٢}{٨١} + \frac{(ص + ١)^٢}{٢٥} = ١ \longrightarrow \frac{(س - ٤)^٢}{٨١} + \frac{(ص + ١)^٢}{٢٥} = ١$

القطع أفقي .

المركز $(٤ ، -١)$ ، $أ^٢ = ٨١ \longrightarrow أ = ٩$ ، $ب^٢ = ٢٥ \longrightarrow ب = ٥$

$جـ^٢ = ٨١ - ٢٥ = ٥٦ \longrightarrow جـ = \sqrt{٥٦} = ٢ \sqrt{١٤}$

الرأسان : $(٤ \pm ٩ ، -١) = (١٣ ، -١) ، (-٥ ، -١)$

البؤرتان : $(٤ \pm ٢ \sqrt{١٤} ، -١) = (٤ + ٢ \sqrt{١٤} ، -١)$ ، $(٤ - ٢ \sqrt{١٤} ، -١)$

طرفا المحور الأصغر : $(٤ ، -١ \pm ٥) = (٤ ، ٤)$ ، $(٤ ، -٦)$

معادلة المحور الأكبر : $ص = -١$ وطوله $٢ أ = ٢ (٩) = ١٨$

معادلة المحور الأصغر : $س = ٤$ وطوله $٢ ب = ٢ (٥) = ١٠$

البعد البؤري = ٢ جـ = ٤ $\sqrt{١٤}$ ، الاختلاف المركزي هـ = $\frac{جـ}{أ} = \frac{٢\sqrt{١٤}}{٩}$

---

٣) ٤ س^{٢} + ٩ ص^{٢} = ١

نكتب المعادلة على الصورة القياسية : $\frac{س^{٢}}{\frac{١}{٤}} + \frac{ص^{٢}}{\frac{١}{٩}} = ١$

القطع أفقي .

المركز (٠ ، ٠) ، أ^{٢} = $\frac{١}{٤}$ ⟵ أ = $\frac{١}{٢}$ ، ب^{٢} = $\frac{١}{٩}$ ⟵ ب = $\frac{١}{٣}$

جـ^{٢} = $\frac{١}{٤} - \frac{١}{٩} = \frac{٥}{٣٦}$ ⟵ جـ = $\frac{\sqrt{٥}}{٦}$

الرأسان : (± $\frac{١}{٢}$ ، ٠) ، البؤرتان : (± $\frac{\sqrt{٥}}{٦}$ ، ٠)

معادلة المحور الأكبر : ص = ٠ وطوله ٢ أ = ٢ ($\frac{١}{٢}$) = ١

معادلة المحور الأصغر : س = ٠ وطوله ٢ ب = ٢ ($\frac{١}{٣}$) = $\frac{٢}{٣}$

طرفا المحور الأصغر : (٠ ، ± $\frac{١}{٣}$)

البعد البؤري = ٢ جـ = $\frac{\sqrt{٥}}{٣}$ ، الاختلاف المركزي هـ = $\frac{جـ}{أ} = \frac{\frac{\sqrt{٥}}{٦}}{\frac{١}{٢}} = \frac{\sqrt{٥}}{٣}$

---

٤) $\frac{(٣ص + ٦)^{٢}}{٩} + \frac{س^{٢}}{٤} - ١ = ٠$

$\frac{(٣(ص + ٢))^{٢}}{٩} + \frac{س^{٢}}{٤} = ١$ ⟵ $\frac{٩(ص + ٢)^{٢}}{٩} + \frac{س^{٢}}{٤} = ١$

⟵ (ص + ٢)^{٢} + $\frac{س^{٢}}{٤}$ = ١ القطع أفقي

المركز (٠ ، ⁻٢) ، أ^{٢} = ٤ ⟵ أ = ٢ ، ب^{٢} = ١ ⟵ ب = ١

جـ^{٢} = ٤ − ١ = ٣ ⟵ جـ = $\sqrt{٣}$

الرأسان : (٠ ± ٢ ، ⁻٢) = (٢ ، ⁻٢) ، (⁻٢ ، ⁻٢)

البؤرتان : (٠ ± $\sqrt{٣}$ ، ⁻٢) = ($\sqrt{٣}$ ، ⁻٢) ، (⁻$\sqrt{٣}$ ، ⁻٢)

طرفا المحور الأصغر : (٠ ، ⁻٢ ± ١) = (٠ ، ⁻١) ، (٠ ، ⁻٣)

معادلة المحور الأكبر : ص = ⁻٢ وطوله ٢ أ = ٢ (٢) = ٤

معادلة المحور الأصغر : س = ٠ وطوله ٢ ب = ٢ (١) = ٢

البعد البؤري = ٢ جـ = ٢ $\sqrt{٣}$ ، الاختلاف المركزي هـ = $\frac{جـ}{أ} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

٥) ٩ س^{٢} + ٤ ص^{٢} + ١٨ س = ٨ ص + ٢٣

٩ س^{٢} + ١٨ س + ٤ ص^{٢} ـ ٨ ص = ٢٣

٩ (س^{٢} + ٢ س) + ٤ (ص^{٢} ـ ٢ ص) = ٢٣

٩ (س^{٢} + ٢ س + ١) + ٤ (ص^{٢} ـ ٢ ص + ١) = ٢٣ + ٩ + ٤

٩ (س + ١)^{٢} + ٤ (ص ـ ١)^{٢} = ٣٦   بقسمة الطرفين على ٣٦

$\longleftarrow \frac{(\text{س} + ١)^{٢}}{٤} + \frac{(\text{ص} - ١)^{٢}}{٩} = ١$ القطع عمودي .

المركز ($^{-}$١ ، ١) ، أ^{٢} = ٩ ⟵ أ = ٣ ، ب^{٢} = ٤ ⟵ ب = ٢

جـ^{٢} = ٩ ـ ٤ = ٥ ⟵ جـ = $\sqrt{٥}$

الرأسان : ($^{-}$١ ، ١ ± ٣) = ($^{-}$١ ، ٤) ، ($^{-}$١ ، $^{-}$٢)

البؤرتان : ($^{-}$١ ، ١ ± $\sqrt{٥}$) = ($^{-}$١ ، ١ + $\sqrt{٥}$) ، ($^{-}$١ ، ١ ـ $\sqrt{٥}$)

طرفا المحور الأصغر : ($^{-}$١ ± ٢ ، ١) = (١ ، ١) ، (ـ٣ ، ١)

معادلة المحور الأكبر : س = $^{-}$١ وطوله ٢ أ = ٢ (٣) = ٦

معادلة المحور الأصغر : ص = ١ وطوله ٢ ب = ٢ (٢) = ٤

البعد البؤري = ٢ جـ = ٢ $\sqrt{٥}$ ، الاختلاف المركزي هـ = $\frac{\text{جـ}}{\text{أ}} = \frac{\sqrt{٥}}{٣}$

---

٦) ١٦ (س ـ ٢)^{٢} + ٢٥ (ص ـ ٣)^{٢} = ٤٠٠

بقسمة طرفي المعادلة على ٤٠٠

$\longleftarrow \frac{(\text{س} - ٢)^{٢}}{٢٥} + \frac{(\text{ص} - ٣)^{٢}}{١٦} = ١$ القطع أفقي

المركز (٢ ، ٣) ، أ^{٢} = ٢٥ ⟵ أ = ٥ ، ب^{٢} = ١٦ ⟵ ب = ٤

جـ^{٢} = ٢٥ ـ ١٦ = ٩ ⟵ جـ = ٣

الرأسان : (٢ ± ٥ ، ٣) = ($^{-}$٣ ، ٣) ، (٧ ، ٣)

البؤرتان : (٢ ± ٣ ، ٣) = ($^{-}$١ ، ٣) ، (٥ ، ٣)

طرفا المحور الأصغر : (٢ ، ٣ ± ٤) = (٢ ، ٧) ، (٢ ، $^{-}$١)

معادلة المحور الأكبر : ص = ٣ وطوله ٢ أ = ٢ (٥) = ١٠

معادلة المحور الأصغر : س = ٢ وطوله ٢ ب = ٢ (٤) = ٨

البعد البؤري = ٢ جـ = ٦ ، الاختلاف المركزي هـ = $\frac{\text{جـ}}{\text{أ}} = \frac{٣}{٥}$

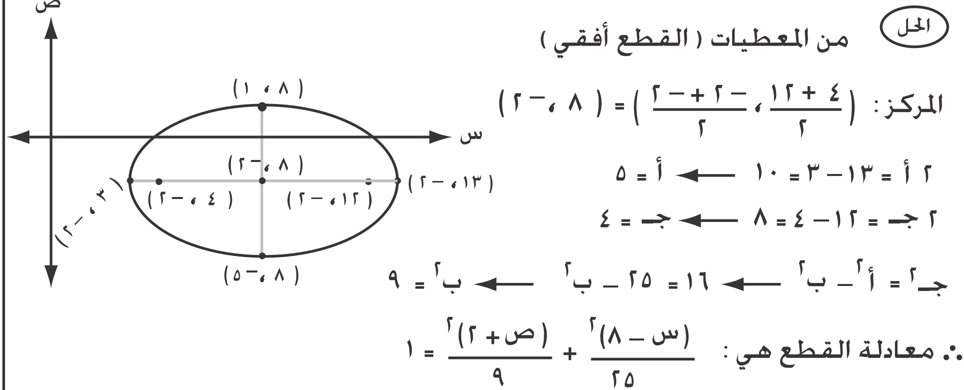
ملاحظة : لإيجاد معادلة القطع الناقص في الصورة القياسية يجب معرفة :

١ـ نوع القطع (أفقي أم عمودي) .

٢ـ إحداثيات المركز .

٣ـ قيمة أ ، ب .

مثال جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه النقطتان : (٤ ، −٢) ، (١٢ ، −٢) ورأساه النقطتان : (١٣ ، −٢) ، (٣ ، −٢) ، ثم ارسم المنحنى البياني له .



الحل

من المعطيات (القطع أفقي)

المركز : $\left(\frac{٤ + ١٢}{٢} ، \frac{−٢ + −٢}{٢} \right)$ = (٨ ، −٢)

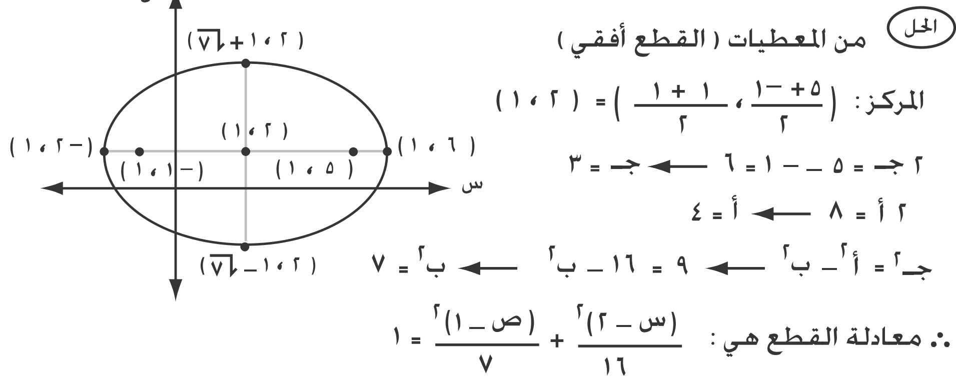
٢ أ = ١٣ − ٣ = ١٠ ⟵ أ = ٥

٢ جـ = ١٢ − ٤ = ٨ ⟵ جـ = ٤

$جـ^٢ = أ^٢ − ب^٢$ ⟵ $١٦ = ٢٥ − ب^٢$ ⟵ $ب^٢ = ٩$

∴ معادلة القطع هي : $\frac{(س − ٨)^٢}{٢٥} + \frac{(ص + ٢)^٢}{٩} = ١$

مثال جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه النقطتان : (٥ ، ١) ، (−١ ، ١) وطول محوره الأكبر (٨) وحدات ، ثم ارسم المنحنى البياني له .



الحل

من المعطيات (القطع أفقي)

المركز : $\left(\frac{٥ + −١}{٢} ، \frac{١ + ١}{٢} \right)$ = (٢ ، ١)

٢ جـ = ٥ − −١ = ٦ ⟵ جـ = ٣

٢ أ = ٨ ⟵ أ = ٤

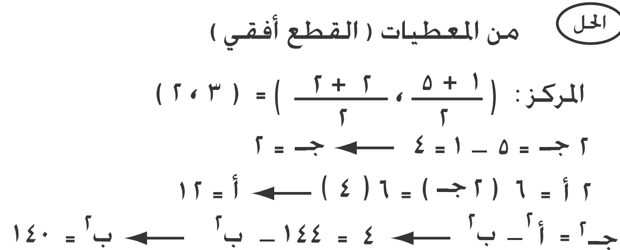
$جـ^٢ = أ^٢ − ب^٢$ ⟵ $٩ = ١٦ − ب^٢$ ⟵ $ب^٢ = ٧$

∴ معادلة القطع هي : $\frac{(س − ٢)^٢}{١٦} + \frac{(ص − ١)^٢}{٧} = ١$

مثال جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه النقطتان : (١ ، ٢) ، (٥ ، ٢) وطول محوره الأكبر يساوي ٦ أمثال البعد البؤري له ، ثم ارسم المنحنى البياني له .

الحل

من المعطيات (القطع أفقي)



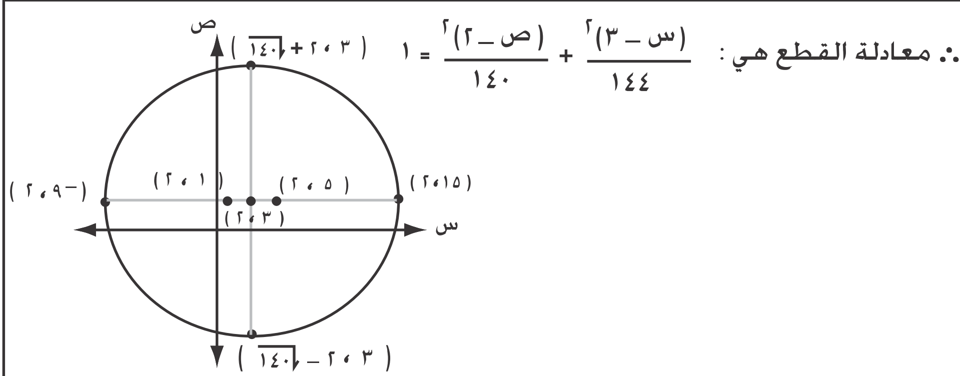
المركز : $\left(\frac{١ + ٥}{٢} ، \frac{٢ + ٢}{٢} \right)$ = (٣ ، ٢)

٢ جـ = ٥ − ١ = ٤ ⟵ جـ = ٢

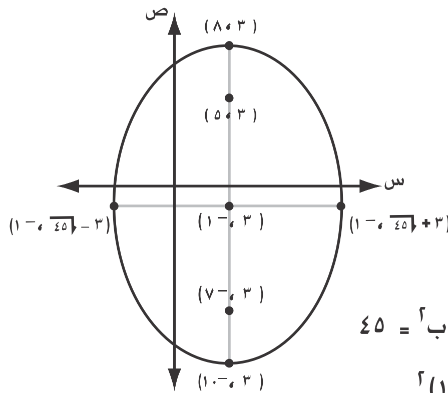
٢ أ = ٦ (٢جـ) = ٦ (٤) ⟵ أ = ١٢

$جـ^٢ = أ^٢ − ب^٢$ ⟵ $٤ = ١٤٤ − ب^٢$ ⟵ $ب^٢ = ١٤٠$

$\therefore$ معادلة القطع هي : $\frac{(س - ٣)^٢}{١٤٤} + \frac{(ص - ٢)^٢}{١٤٠} = ١$



مثال جد معادلة القطع الناقص الذي رأساه : (٣ ، ١٠-) ، (٣ ، ٨) واختلافه المركزي $\frac{٢}{٣}$ ، ثم ارسم المنحنى البياني له .



الحل من المعطيات (القطع عمودي) .

المركز : $\left(\frac{٣ + ٣}{٢} ، \frac{-١٠ + ٨}{٢} \right) = (٣ ، -١)$

$٢ أ = ٨ - ^-١٠ = ١٨ \longrightarrow أ = ٩$

$هـ = \frac{جـ}{أ} \longrightarrow \frac{٢}{٣} = \frac{جـ}{٩} \longrightarrow جـ = ٦$

$جـ^٢ = أ^٢ - ب^٢ \longrightarrow ٣٦ = ٨١ - ب^٢ \longrightarrow ب^٢ = ٤٥$

$\therefore$ معادلة القطع هي : $\frac{(س - ٣)^٢}{٤٥} + \frac{(ص + ١)^٢}{٨١} = ١$

مثال جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه (٢ ، ١) وإحدى بؤرتيه (٢ ، ٢) وطول محوره الأكبر ١٠ وحدات .

الحل من المعطيات (القطع عمودي) .

$جـ = ٢ - ١ = ١$

$٢ أ = ١٠ \longrightarrow أ = ٥$

$جـ^٢ = أ^٢ - ب^٢ \longrightarrow ١ = ٢٥ - ب^٢ \longrightarrow ب^٢ = ٢٤$

$\therefore$ معادلة القطع هي : $\frac{(س - ٢)^٢}{٢٤} + \frac{(ص - ١)^٢}{٢٥} = ١$

مثال جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه (١ ، ٢) وإحدى بؤرتيه النقطة (-٣ ، ٢) واختلافه المركزي يساوي ٠,٨ ، ثم عين باقي عناصره وارسم منحناه .

الحل من المعطيات (القطع أفقي) .

$جـ = ١ - ^-٣ = ٤$ ، $هـ = \frac{جـ}{أ} \longrightarrow \frac{٨}{١٠} = \frac{٤}{أ} \longrightarrow أ = ٥$

$جـ^٢ = أ^٢ - ب^٢ \longrightarrow ١٦ = ٢٥ - ب^٢ \longrightarrow ب^٢ = ٩ \longrightarrow ب = ٣$

∴ معادلة القطع هي : $\frac{(س - ١)^٢}{٢٥} + \frac{(ص - ٢)^٢}{٩} = ١$

الرأسان : (١ ± ٥ ، ٢) = (٦ ، ٢) ، (⁻٤ ، ٢)

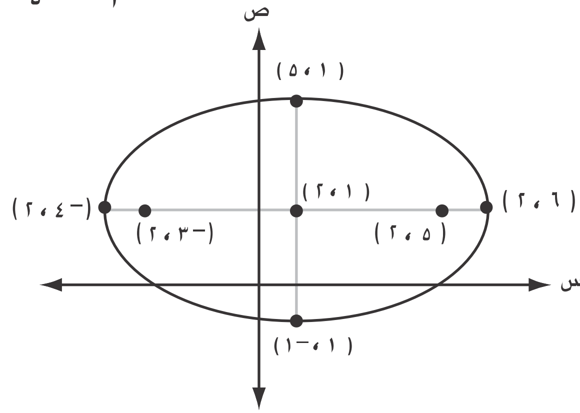
البؤرتان : (١ ± ٤ ، ٢) = (٥ ، ٢) ، (⁻٣ ، ٢)

طرفا المحور الأصغر : (١ ، ٢ ± ٣) = (١ ، ٥) ، (١ ، ⁻١)

معادلة المحور الأكبر : ص = ٢ وطوله ٢ أ = ٢ (٥) = ١٠

معادلة المحور الأصغر : س = ١ وطوله ٢ ب = ٢ (٣) = ٦

البعد البؤري = ٢ جـ = ٨ ، الاختلاف المركزي هـ = $\frac{جـ}{أ} = \frac{٤}{٥}$



مثال جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وأحد رأسيه النقطة (٠ ، ١٠) وإحدى نهايتي محوره الأصغر النقطة (⁻٨ ، ٠) .

الحل من المعطيات (القطع عمودي) .

أ = ١٠ ، ب = ٨

∴ معادلة القطع هي : $\frac{س^٢}{٦٤} + \frac{ص^٢}{١٠٠} = ١$

مثال جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه (٥ ، ⁻١) وأحد رأسيه النقطة (٥ ، ٤) وإحدى بؤرتيه النقطة (٥ ، ١) .

الحل من المعطيات (القطع عمودي) .

أ = ٤ - ⁻١ = ٥ ، جـ = ١ - ⁻١ = ٢

جـ^٢ = أ^٢ - ب^٢ ⟵ ٤ = ٢٥ - ب^٢ ⟵ ب^٢ = ٢١

∴ معادلة القطع هي : $\frac{(س - ٥)^٢}{٢١} + \frac{(ص + ١)^٢}{٢٥} = ١$

مثال جد معادلة القطع الناقص الذي نهايتا محوره الأكبر النقطتان : (٢ ، ١٢) ، (٢ ، ⁻٤) ونهايتا محوره الأصغر النقطتان : (٤ ، ٤) ، (٠ ، ٤) .

(الحل) من المعطيات (القطع عمودي) .

المركز : $\left(\frac{٢ + ٢}{٢} ، \frac{-٤ + ١٢}{٢} \right) = (٢ ، ٤)$

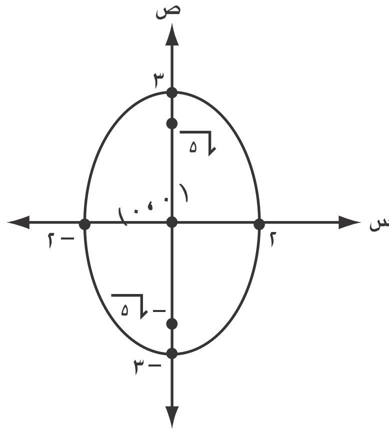
$٢أ = ١٢ - {}^{-}٤ = ١٦ \longrightarrow أ = ٨$

$٢ب = ٤ - ٠ = ٤ \longrightarrow ب = ٢$

∴ معادلة القطع هي : $\frac{(س - ٢)^٢}{٤} + \frac{(ص - ٤)^٢}{٦٤} = ١$

مثال جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل، ومحوره الأكبر على محور الصادات، وطول محوره الأصغر يساوي ٤ وحدات، وبعده البؤري يساوي $٢\sqrt{٥}$ وحدة، ثم ارسم منحناه .

(الحل) من المعطيات (القطع عمودي) .



$٢جـ = ٢\sqrt{٥} \longrightarrow جـ = \sqrt{٥}$

$٢ب = ٤ \longrightarrow ب = ٢$

$جـ^٢ = أ^٢ - ب^٢ \longrightarrow ٥ = أ^٢ - ٤ \longrightarrow أ^٢ = ٩$

∴ معادلة القطع هي : $\frac{س^٢}{٤} + \frac{ص^٢}{٩} = ١$

مثال جد معادلة القطع الناقص الذي رأساه هما النقطتان : (٣ ، ٤) ، (٣ ، ⁻٤) ويمر في نقطة الأصل .

(الحل) من المعطيات (القطع عمودي) .

المركز : $\left(\frac{٣ + ٣}{٢} ، \frac{-٤ + ٤}{٢} \right) = (٣ ، ٠)$

$٢أ = ٤ - {}^{-}٤ = ٨ \longrightarrow أ = ٤$

معادلة القطع : $\frac{ص^٢}{١٦} + \frac{(س - ٣)^٢}{ب^٢} = ١$

(٠ ، ٠) تحقق معادلة القطع $\longrightarrow \frac{(٠)^٢}{١٦} + \frac{(٠ - ٣)^٢}{ب^٢} = ١ \longrightarrow ب^٢ = ٩$

∴ معادلة القطع هي : $\frac{ص^٢}{١٦} + \frac{(س - ٣)^٢}{٩} = ١$

مثال جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل ويمر بالنقطتين (١ ، ⁻١) ، ($\frac{1}{\sqrt{2}}$ ، $\sqrt{2}$) ومحوره الأصغر ينطبق على محور السينات .

الحل من المعطيات (القطع عمودي) .

∴ معادلة القطع : $\frac{س^2}{ب^2} + \frac{ص^2}{أ^2} = 1$

(١ ، ⁻١) تحقق معادلة القطع ← $\frac{(1)^2}{ب^2} + \frac{(-1)^2}{أ^2} = 1$

← $\frac{1}{ب^2} + \frac{1}{أ^2} = 1$ ..... (١)

($\frac{1}{\sqrt{2}}$ ، $\sqrt{2}$) تحقق معادلة القطع ← $\frac{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2}{ب^2} + \frac{(\sqrt{2})^2}{أ^2} = 1$

← $\frac{1}{2ب^2} + \frac{2}{أ^2} = 1$ .... (٢)

نحل النظام المكون من المعادلتين (١) و (٢) بطريقة الحذف .

$-2 \left(\frac{1}{ب^2} + \frac{1}{أ^2} = 1 \right)$

$\frac{\frac{1}{2}}{ب^2} + \frac{2}{أ^2} = 1$

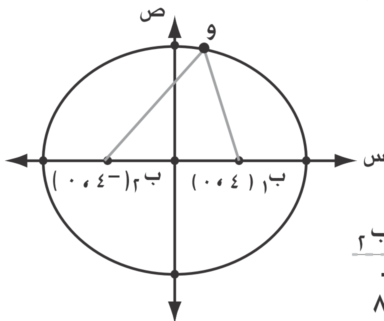
$\frac{\frac{-3}{2}}{ب^2} = -1$ ← $ب^2 = \frac{3}{2}$

عوض $ب^2 = \frac{3}{2}$ في المعادلة (١) ← $\frac{1}{\frac{3}{2}} + \frac{1}{أ^2} = 1$

← $\frac{1}{أ^2} = \frac{1}{3}$ ← $أ^2 = 3$

∴ معادلة القطع هي : $\frac{2س^2}{3} + \frac{ص^2}{3} = 1$

مثال قطع ناقص بؤرتاه $ب_1$ (٤ ، ٠) ، $ب_2$ (⁻٤ ، ٠) والنقطة و (س ، ص) تقع على منحنى القطع بحيث أن محيط المثلث و $ب_1$ $ب_2$ يساوي ٢٤ سم ، جد معادلته .



الحل من المعطيات (القطع أفقي) .

المركز : $\left(\frac{-4 + 4}{2} ، \frac{0 + 0}{2} \right) = (0 ، 0)$

جـ = ٤ − ٠ = ٤

محيط △ و $ب_1$ $ب_2$ = و$ب_1$ + و$ب_2$ + $ب_1$ $ب_2$

= ٢ أ + ٢ جـ

٢٤ = ٢ أ + ٨ ← أ = ٨

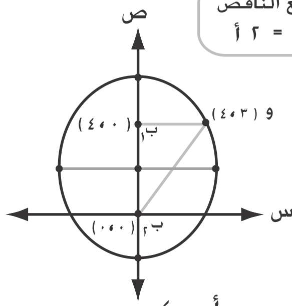
لكن $جـ^2 = أ^2 - ب^2$ ⟵ $16 = 64 - ب^2$ ⟵ $ب^2 = 48$

∴ معادلة القطع هي : $\frac{س^2}{64} + \frac{ص^2}{48} = 1$

مثال جد معادلة القطع الناقص الذي يمر بالنقطة و (٣ ، ٤) وبؤرتاه النقطتان : $ب_1$ (٠ ، ٤) ، $ب_2$ (٠ ، ٠)

تذكر

من تعريف القطع الناقص
$و ب_1 + و ب_2 = 2 أ$



الحل من المعطيات (القطع عمودي) .

المركز : $\left(\frac{٠ + ٠}{2} ، \frac{٤ + ٠}{2}\right) = (٠ ، ٢)$

$2 جـ = ٤ - ٠ = ٤$ ⟵ $جـ = ٢$

من تعريف القطع الناقص $و ب_1 + و ب_2 = 2 أ$

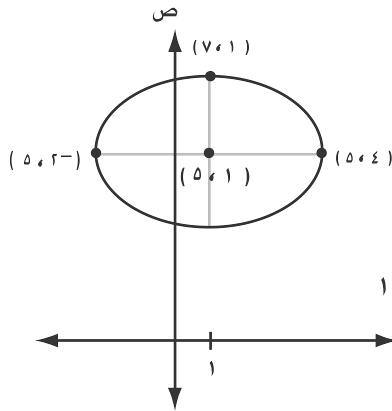
$\sqrt{(٣ - ٠)^2 + (٤ - ٤)^2} + \sqrt{(٣ - ٠)^2 + (٤ - ٠)^2} = 2 أ$

$٣ + ٥ = 2 أ$ ⟵ $أ = ٤$

لكن $جـ^2 = أ^2 - ب^2$ ⟵ $٤ = ١٦ - ب^2$ ⟵ $ب^2 = ١٢$

∴ معادلة القطع هي : $\frac{س^2}{١٢} + \frac{(ص - ٢)^2}{١٦} = ١$

مثال جد معادلة القطع الناقص إذا كانت النقط (‾٢ ، ٥) ، (٤ ، ٥) ، (١ ، ٧) من نهايات محوريه .



الحل المركز : $\left(\frac{‾٢ + ٤}{2} ، \frac{٥ + ٥}{2}\right) = (١ ، ٥)$

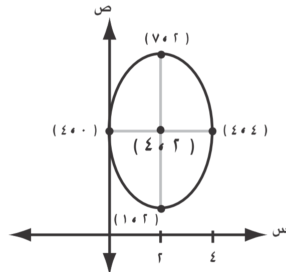
القطع أفقي .

$أ = ٤ - ١ = ٣$

$ب = ٧ - ٥ = ٢$

∴ معادلة القطع هي : $\frac{(س - ١)^2}{٩} + \frac{(ص - ٥)^2}{٤} = ١$

مثال جد معادلة القطع الناقص الذي نهايات محوريه النقط : (٢ ، ١) ، (٤ ، ٤) ، (٢ ، ٧) ، (٠ ، ٤) .



الحل المركز : $\left(\frac{٤ + ٠}{2} ، \frac{٤ + ٤}{2}\right) = (٢ ، ٤)$

القطع عمودي .

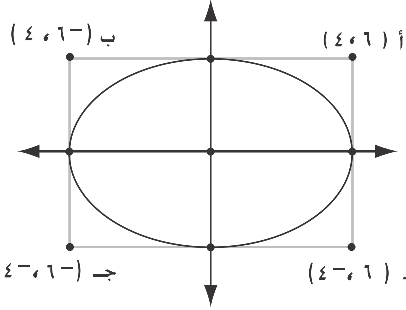
$أ = ٧ - ٤ = ٣$

$ب = ٤ - ٢ = ٢$

∴ معادلة القطع هي : $\frac{(س - ٢)^٢}{٤} + \frac{(ص - ٤)^٢}{٩} = ١$

مثال

جد معادلة القطع الناقص بحيث أضلاع المستطيل أ ب جـ د مماسات له حيث أ (٦ ، ٤) ، ب ($^-$٦ ، ٤) ، جـ ($^-$٦ ، $^-$٤) ، د (٦ ، $^-$٤) .



الحل القطع أفقي .

المركز: $\left(\frac{٦ + ^-٦}{٢} ، \frac{٤ + ^-٤}{٢}\right) = (٠ ، ٠)$

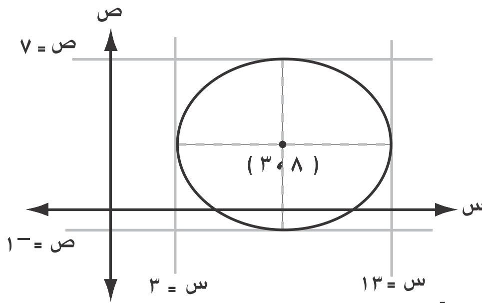
٢أ = ٦ − $^-$٦ = ١٢ ⟵ أ = ٦

٢ب = ٤ − $^-$٤ = ٨ ⟵ ب = ٤

∴ معادلة القطع هي : $\frac{س^٢}{٣٦} + \frac{ص^٢}{١٦} = ١$

مثال

جد معادلة القطع الناقص الذي يمس كلا من المستقيمات : س = ٣ ، س = ١٣ ، ص = $^-$١ ، ص = ٧ .



الحل القطع أفقي .

المركز: $\left(\frac{١٣ + ٣}{٢} ، \frac{٧ + ^-١}{٢}\right) = (٨ ، ٣)$

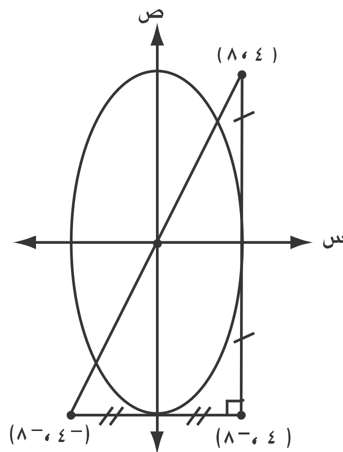
٢أ = ١٣ − ٣ = ١٠ ⟵ أ = ٥

٢ب = ٧ − $^-$١ = ٨ ⟵ ب = ٤

∴ معادلة القطع هي : $\frac{(س - ٨)^٢}{٢٥} + \frac{(ص - ٣)^٢}{١٦} = ١$

مثال

جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل والذي ينطبق محوراه على محوري الإحداثيات ، ويمس ضلعي القائمة في المثلث الذي رؤوسه (٤ ، $^-$٨) ، ($^-$٤ ، $^-$٨) ، (٤ ، ٨) .



الحل القطع عمودي .

نقطتا التماس : (٠ ، $^-$٨) ، (٤ ، ٠) .

٢أ = ٨ − $^-$٨ = ١٦ ⟵ أ = ٨

٢ب = ٤ − $^-$٤ = ٨ ⟵ ب = ٤

∴ معادلة القطع هي : $\frac{س^٢}{١٦} + \frac{ص^٢}{٦٤} = ١$

قاعدة مساحة منطقة القطع الناقص = π أ ب

مثال قطع ناقص مساحته ٢٠ π وحدة مربعة ورأساه هما النقطتان (‾٥ ، ٠) ، (٥ ، ٠) جد معادلته .

الحل القطع أفقي .

المركز : $\left(\frac{٥ + ‾٥}{٢} ، \frac{٠ + ٠}{٢} \right)$ = (٠ ، ٠)

٢ أ = ٥ − ‾٥ = ١٠ ⟵ أ = ٥

لكن ٢٠ π = π (٥) ب ⟵ ب = ٤

∴ معادلة القطع هي : $\frac{س^٢}{٢٥} + \frac{ص^٢}{١٦} = ١$

مثال جد نصف قطر الدائرة التي مساحتها تساوي مساحة القطع الناقص :

$\frac{س^٢}{٨١} + \frac{ص^٢}{١٦} = ١$

الحل القطع أفقي .

$أ^٢$ = ٨١ ⟵ أ = ٩ ، $ب^٢$ = ١٦ ⟵ ب = ٤

مساحة القطع الناقص = أ ب π = (٩) (٤) π = ٣٦ π وحدة مساحة .

مساحة الدائرة = π $ر^٢$ = ٣٦ π ⟵ $ر^٢$ = ٣٦ ⟵ ر = ٦ وحدات طول .

مثال جد مساحة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل و بعده البؤري يساوي ١٢ وحدة ويمر منحناه بالنقطتين (٦ ، ٠) ، (‾٦ ، ٠) .

الحل

٢ جـ = ١٢ ⟵ جـ = ٦

بما أن جـ = ٦ ومنحنى القطع يمر بـ (٦ ، ٠) ، (‾٦ ، ٠) فالقطع عمودي و ب = ٦

لكن $جـ^٢ = أ^٢ - ب^٢$ ⟵ ٣٦ = $أ^٢$ − ٣٦ ⟵ $أ^٢$ = ٧٢ ⟵ أ = $\sqrt{٧٢}$

مساحة القطع الناقص = أ ب π = $\sqrt{٧٢}$ (٦) π = ٣٦ $\sqrt{٢}$ π وحدة مساحة .

مثال جد مساحة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه من نقط محور الصادات والذي يقطع القطع المكافىء $س^٢$ + ٨ ص = ٠ في نقطتين إحداثيهما الصادي يساوي ‾٢ ، وإن النسبة بين طولي محوري القطع الناقص = ١ : ٢ .

الحل القطع عمودي ومعادلته : $\frac{س^٢}{ب^٢} + \frac{ص^٢}{أ^٢} = ١$

لكن $\frac{٢ ب}{٢ أ} = \frac{١}{٢}$ ⟵ ب = $\frac{أ}{٢}$ فتصبح معادلة القطع : $\frac{٤ س^٢}{أ^٢} + \frac{ص^٢}{أ^٢} = ١$

للقطع المكافىء : عندما ص = ‾٢ ⟵ $س^٢$ + ٨ (‾٢) = ٠ ⟵ $س^٢$ = ١٦

← س = ± ٤

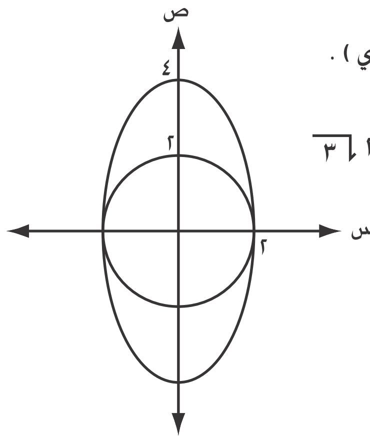
نقطتا التقاطع : (٤ ، ⁻٢) ، (⁻٤ ، ⁻٢) و تحققان معادلة القطع الناقص .

← $\frac{٤(٤)^{٢}}{أ^{٢}} + \frac{(-٢)^{٢}}{أ^{٢}} = ١$ ← $\frac{٦٨}{أ^{٢}} = ١$ ← $أ^{٢} = ٦٨$ ← $أ = \sqrt{٦٨}$

← $ب = \frac{\sqrt{٦٨}}{٢}$

مساحة القطع الناقص = π أ ب = $\sqrt{٦٨} . \frac{\sqrt{٦٨}}{٢} . \pi = ٣٤ \pi$ وحدة مساحة .

مثال قطع مخروطي مركزه نقطة الأصل وأحد رأسيه (٠ ، ٤) واختلافه المركزي $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$. أوجد معادلة هذا القطع ثم أوجد مساحة أكبر دائرة يمكن رسمها وتمس القطع من الداخل .



الحل من معطيات السؤال (القطع ناقص عمودي) .

أ = ٤

$هـ = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ← $\frac{\sqrt{٣}}{٢} = \frac{جـ}{٤}$ ← $جـ = ٢\sqrt{٣}$

لكن $جـ^{٢} = أ^{٢} - ب^{٢}$ ← $١٢ = ١٦ - ب^{٢}$

← $ب^{٢} = ٤$ ← ب = ٢

∴ معادلة القطع هي : $\frac{س^{٢}}{٤} + \frac{ص^{٢}}{١٦} = ١$

مساحة أكبر دائرة يمكن رسمها وتمس القطع من الداخل

= $\pi ب^{٢} = ٤\pi$ وحدة مساحة . (انظر الشكل المجاور)

مثال إذا علمت أن مساحة القطع الناقص الذي معادلته : $\frac{س^{٢}}{ل^{٢}} + \frac{ص^{٢}}{(ل+١)^{٢}} = ١$ تساوي ٢٠π وحدة مربعة فجد قيمة ل .

الحل مساحة القطع الناقص = $ل\ (ل+١)\ \pi = ٢٠\ \pi$ ← $ل\ (ل+١) = ٢٠$

$ل^{٢} + ل - ٢٠ = ٠$ ← $(ل - ٤)(ل + ٥) = ٠$

← ل = ٤ ، ل = ⁻٥ ✕

مثال جد البعد البؤري للقطع الناقص الذي مساحته م وطول محوره الأكبر = ٢ أ .

الحل م = أ ب π ← $ب = \frac{م}{أ\pi}$

$جـ^{٢} = أ^{٢} - ب^{٢} = أ^{٢} - \frac{م^{٢}}{أ^{٢}\pi^{٢}} = \frac{أ^{٤}\pi^{٢} - م^{٢}}{أ^{٢}\pi^{٢}}$

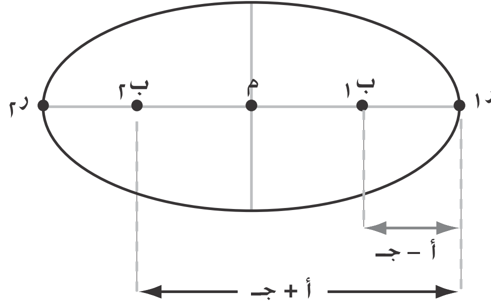
$جـ = \sqrt{\frac{أ^{٤}\pi^{٢} - م^{٢}}{أ^{٢}\pi^{٢}}} = \frac{\sqrt{أ^{٤}\pi^{٢} - م^{٢}}}{أ\ \pi}$ ، $٢جـ = \frac{٢\sqrt{أ^{٤}\pi^{٢} - م^{٢}}}{أ\ \pi}$

تذكر:

١ _ المسافة بين رأس القطع الناقص والبؤرة القريبة منه هي أقصر مسافة بين القطع وهذه البؤرة وتساوي أ _ جـ .

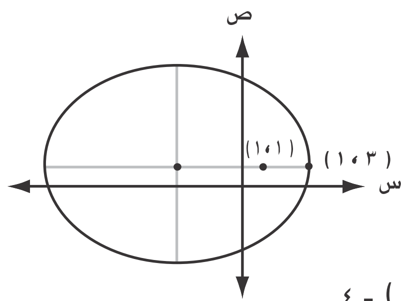
٢ _ المسافة بين رأس القطع الناقص والبؤرة البعيدة عنه هي أكبر مسافة بين القطع وهذه البؤرة وتساوي أ + جـ .

انظر الشكل المجاور.



مثال جد معادلة قطع ناقص أحد رأسيه يقع في النقطة (٣ ، ١) ، وإحداثيات البؤرة القريبة من هذا الرأس (١ ، ١) واختلافه المركزي يساوي $\frac{٢}{٣}$.

(الحل) من المعطيات (القطع أفقي)



أ _ جـ = ٣ _ ١ = ٢ ...... (١)

هـ = $\frac{جـ}{أ}$ = $\frac{٢}{٣}$ ⟵ جـ = $\frac{٢}{٣}$ أ .... (٢)

عوض جـ = $\frac{٢}{٣}$ أ في المعادلة (١)

⟵ أ _ $\frac{٢}{٣}$ أ = ٢ ⟵ أ = ٦

عوض أ = ٦ في المعادلة (٢) ⟵ جـ = $\frac{٢}{٣}$ (٦) = ٤

لكن جـ^٢ = أ^٢ _ ب^٢ ⟵ ١٦ = ٣٦ _ ب^٢ ⟵ ب^٢ = ٢٠

مركز القطع = (١ _ ٤ ، ١) = (⁻٣ ، ١)

∴ معادلة القطع هي : $\frac{(س + ٣)^٢}{٣٦}$ + $\frac{(ص _ ١)^٢}{٢٠}$ = ١

مثال جد معادلة القطع الناقص الذي طول محوره الأصغر يساوي (٦) وحدات وإحداثيات أحد رأسيه (٤ ، ٢) وإحداثيات البؤرة البعيدة عن هذا الرأس (⁻٥ ، ٢) .

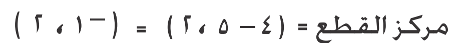
(الحل) من المعطيات (القطع أفقي)

٢ب = ٦ ⟵ ب = ٣

أ + جـ = ٤ _ ⁻٥ = ٩ ⟵ جـ = ٩ _ أ

لكن جـ^٢ = أ^٢ _ ب^٢ ⟵ (٩ _ أ)^٢ = أ^٢ _ ٩ ⟵ ٨١ _ ١٨أ + أ^٢ = أ^٢ _ ٩

⟵ ١٨أ = ٩٠ ⟵ أ = ٥



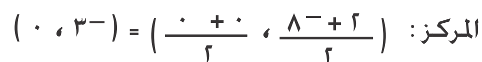
مركز القطع = (٤ − ٥ ، ٢) = ($^-$١ ، ٢)

∴ معادلة القطع هي : $\frac{(\text{س} + ١)^{٢}}{٢٥} + \frac{(\text{ص} - ٢)^{٢}}{٩} = ١$

مثال جد معادلة القطع الناقص الذي رأساه (٢ ، ٠) ، ($^-$٨ ، ٠) وطول محوره الأصغر يساوي أربعة أمثال المسافة بين أحد رأسيه والبؤرة القريبة من ذلك الرأس .

الحل

من المعطيات (القطع أفقي)



المركز : $\left(\frac{٢ + {}^-٨}{٢} ، \frac{٠ + ٠}{٢} \right) = ({}^-٣ ، ٠)$

٢أ = ٢ − $^-$٨ = ١٠ ⟵ أ = ٥

٢ب = ٤ (أ − جـ) ⟸ ب = ٢ (٥ − جـ)

لكن جـ^{٢} = أ^{٢} − ب^{٢} ⟵ جـ^{٢} = ٢٥ − (٢ (٥ − جـ))^{٢}

⟵ جـ^{٢} = ٢٥ − ١٠٠ + ٤٠ جـ − ٤ جـ^{٢}

⟵ ٥جـ^{٢} − ٤٠ جـ + ٧٥ = ٠

⟵ جـ^{٢} − ٨ جـ + ١٥ = ٠

⟵ (جـ − ٥) (جـ − ٣) = ٠

⟵ جـ = ٥ × يجب أن تكون جـ < أ ، جـ = ٣

∴ ب = ٢ (٥ − ٣) = ٤

∴ معادلة القطع هي : $\frac{(\text{س} + ٣)^{٢}}{٢٥} + \frac{\text{ص}^{٢}}{١٦} = ١$

مثال جد معادلة القطع الناقص الذي أحد رأسيه النقطة (٦ ، ٢) ، وإحداثيات البؤرة القريبة من هذا الرأس (٤ ، ٢) والبعد بين طرفي محوريه الأكبر والأصغر = $\sqrt{٤١}$

الحل



أ − جـ = ٦ − ٤ = ٢ ⟵ جـ = أ − ٢

أ^{٢} + ب^{٢} = ٤١ ⟵ ب^{٢} = ٤١ − أ^{٢}

لكن جـ^{٢} = أ^{٢} − ب^{٢}

(أ − ٢)^{٢} = أ^{٢} − (٤١ − أ^{٢})

أ^{٢} − ٤أ + ٤ = أ^{٢} − ٤١ + أ^{٢}

أ^{٢} + ٤ أ − ٤٥ = ٠ ⟵ (أ − ٥) (أ + ٩) = ٠

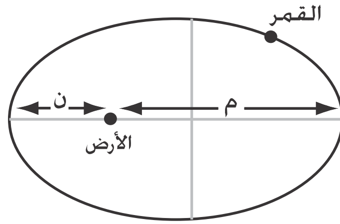
⟵ أ = ٥ ، أ = $^-$٩ ×

∴ $ب^2 = ٤١ - ٢٥ = ١٦$

مركز القطع = (٦ − ٥ ، ٢) = (١ ، ٢)

∴ معادلة القطع هي : $\frac{(س - ١)^2}{٢٥} + \frac{(ص - ٢)^2}{١٦} = ١$

مثال يدور القمر حول الأرض في مدار على شكل قطع ناقص بحيث تقع الأرض في إحدى بؤرتي المدار فإذا كانت أطول مسافة بين الأرض والقمر تساوي م كم وأقصر مسافة بين الأرض والقمر تساوي ن كم اثبت أن الاختلاف المركزي لهذا القطع الناقص يساوي $\frac{م - ن}{م + ن}$.



$م - ن = ٢ جـ \longleftarrow جـ = \frac{م - ن}{٢}$

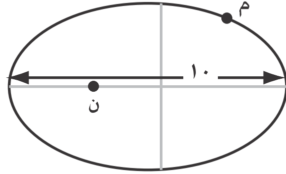
$م + ن = ٢ أ \longleftarrow أ = \frac{م + ن}{٢}$

$هـ = \frac{جـ}{أ} = \frac{\frac{م - ن}{٢}}{\frac{م + ن}{٢}} = \frac{م - ن}{م + ن}$

مثال م ، ن نقطتان ماديتان ، النقطة م تدور في مدار على شكل قطع ناقص بحيث تكون النقطة ن في إحدى بؤرتي هذا القطع ، فإذا كان طول المحور الأكبر = ١٠ وحدات ، والاختلاف المركزي = ٣ , ٠ ، أوجد :

١) أقصر مسافة بين النقطتين م ، ن .

٢) أطول مسافة بين النقطتين م ، ن .



الحل $٢ أ = ١٠ \longrightarrow أ = ٥$

$هـ = \frac{جـ}{أ} \longrightarrow ٠,٣ = \frac{جـ}{٥} \longrightarrow جـ = ١,٥$

١) أقصر مسافة بين النقطتين م ، ن = أ − جـ = ٥ − ١,٥ = ٣,٥ وحدة .

٢) أطول مسافة بين النقطتين م ، ن = أ + جـ = ٥ + ١,٥ = ٦,٥ وحدة .

مثال إذا كان مدار كوكب بلوتو حول الشمس على شكل قطع ناقص اختلافه المركزي ٢٥ , ٠ وطول محوره الأصغر $١٠^{١٠}$ كم . أوجد معادلة القطع الناقص اخذا محور السينات منطبقا على محوره الأكبر ونقطة الأصل مركزا لهذا القطع .

$٢ب = ١٠^{١٠} = ١٠ (١٠)^{٩} \longleftarrow ب = ٥ (١٠)^{٩}$

$\frac{جـ}{أ} = \frac{١}{٤} \longleftarrow أ = ٤ جـ$

$جـ^{٢} = أ^{٢} - ب^{٢} \longleftarrow ب^{٢} = أ^{٢} - جـ^{٢}$

$٢٥ (١٠)^{١٨} = ١٦ جـ^{٢} - جـ^{٢}$

$\longleftarrow ٢٥ (١٠)^{١٨} = ١٥ جـ^{٢} \longleftarrow جـ^{٢} = \frac{٢٥}{١٥} (١٠)^{١٨}$

$\longleftarrow أ^{٢} = ١٦ جـ^{٢} = \frac{٨٠}{٣} (١٠)^{١٨} = \frac{٨}{٣} (١٠)^{١٩}$

∴ معادلة القطع هي : $\frac{٣ س^{٢}}{٨ (١٠)^{١٩}} + \frac{ص^{٢}}{٢٥ (١٠)^{١٨}} = ١$

مثال إذا كان طول المحور الأكبر لقطع ناقص يساوي ضعف طول محوره الأصغر، فما قيمة الاختلاف المركزي لهذا القطع الناقص .

الحل

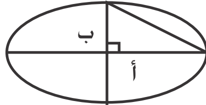
$٢أ = ٢ (٢ب) \longleftarrow أ = ٢ب$

$جـ^{٢} = (٢ب)^{٢} - ب^{٢} \longleftarrow جـ^{٢} = ٣ب^{٢} \longleftarrow جـ = \sqrt{٣} ب$

$هـ = \frac{جـ}{أ} = \frac{\sqrt{٣} ب}{٢ب} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

مثال إذا كان البعد بين بؤرتي قطع ناقص يساوي نصف البعد بين طرفي محوريه الأكبر والأصغر . فما قيمة الاختلاف المركزي لهذا القطع ؟

الحل



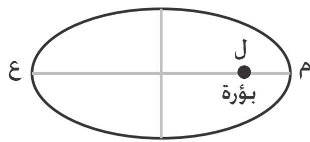
$٢جـ = \frac{١}{٢} \sqrt{أ^{٢} + ب^{٢}} \longleftarrow ٤جـ = \sqrt{أ^{٢} + ب^{٢}}$

$\longleftarrow ١٦ جـ^{٢} = أ^{٢} + ب^{٢}$ .... (١)

لكن $جـ^{٢} = أ^{٢} - ب^{٢}$ .... (٢)

بجمع المعادلتين $١٧ جـ^{٢} = ٢أ^{٢} \longleftarrow \frac{جـ^{٢}}{أ^{٢}} = \frac{٢}{١٧} \longleftarrow \frac{جـ}{أ} = \sqrt{\frac{٢}{١٧}}$

مثال في القطع الناقص المجاور إذا كانت النسبة م ل : ع ل تساوي ١ : ٣ ، فما قيمة الاختلاف المركزي لهذا القطع ؟



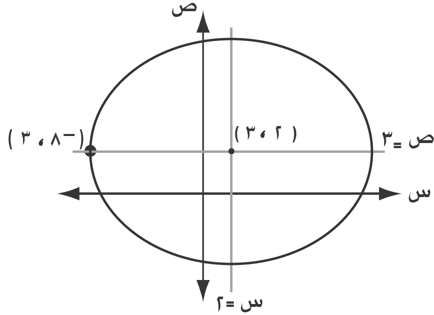
الحل

$\frac{م ل}{ع ل} = \frac{أ - جـ}{أ + جـ} = \frac{١}{٣} \longleftarrow ٣أ - ٣جـ = أ + جـ$

$\longleftarrow ٢أ = ٤جـ$

$\longleftarrow \frac{جـ}{أ} = \frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢}$

مثال اكتب معادلة القطع الناقص الذي اختلافه المركزي يساوي ٦ , ٠ ويمر بالنقطة (⁻٨ ، ٣) ومركزه يقع على المستقيم س = ٢ ، وبؤرتاه تقعان على المستقيم ص =٣ .



الحل من المعطيات (القطع أفقي)

المركز: (٢ ، ٣)

(⁻٨ ، ٣) تكون إحدى نهايتي المحور الأكبر

أ = ٢ ـ ⁻٨ = ١٠

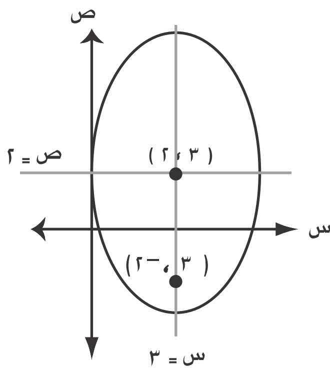
معادلة القطع : $\frac{(س-٢)^٢}{١٠٠} + \frac{(ص-٣)^٢}{ب^٢} = ١$

هـ = $\frac{جـ}{أ}$ ⟵ $\frac{٦}{١٠} = \frac{جـ}{١٠}$ ⟵ جـ = ٦

جـ^٢ = أ^٢ ـ ب^٢ ⟵ ٣٦ = ١٠٠ ـ ب^٢ ⟵ ب^٢ = ٦٤

∴ معادلة القطع هي : $\frac{(س-٢)^٢}{١٠٠} + \frac{(ص-٣)^٢}{٦٤} = ١$

مثال جد معادلة القطع الناقص الذي معادلتي محوريه : س = ٣ ، ص = ٢ . والنقطة (٣ ، ⁻٢) إحدى بؤرتيه وطول محوره الأكبر يساوي١٠ وحدات .



الحل من المعطيات (القطع عمودي)

المركز: (٣ ، ٢)

جـ = ٢ ـ ⁻٢ = ٤

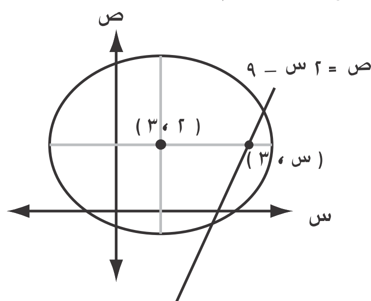
٢ أ = ١٠ ⟵ أ = ٥

جـ^٢ = أ^٢ ـ ب^٢ ⟵ ١٦ = ٢٥ ـ ب^٢

⟵ ب^٢ = ٩

∴ معادلة القطع هي : $\frac{(س-٣)^٢}{٩} + \frac{(ص-٢)^٢}{٢٥} = ١$

مثال جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه (٢ ، ٣) ومحوره الأكبر يوازي محور السينات وطوله ١٠ وحدات ، وإحدى بؤرتيه تقع على المستقيم ص = ٢ س ـ ٩ .



الحل القطع أفقي .

٢ أ = ١٠ ⟵ أ = ٥

معادلة القطع : $\frac{(س-٢)^٢}{٢٥} + \frac{(ص-٣)^٢}{ب^٢} = ١$

الإحداثي الصادي للبؤرة = ٣

∴ إحدى البؤرتين (س ، ٣) وتحقق معادلة المستقيم

⟵ ٣ = ٢ س ـ ٩ ⟵ س = ٦

البؤرة الواقعة على المستقيم هي : (٦ ، ٣)

جـ = ٦ − ٢ = ٤

$جـ^2 = أ^2 - ب^2$ ⟵ ١٦ = ٢٥ − $ب^2$

⟵ $ب^2 = ٩$

∴ معادلة القطع هي : $\frac{(س - ٢)^2}{٢٥} + \frac{(ص - ٣)^2}{٩} = ١$

مثال إذا كانت المعادلة $ك\,س^2 + ٥\,ص^2 = ١٧$ تمثل معادلة قطع ناقص محوره الأكبر موازٍ لمحور السينات . أثبت أن : $ك = \frac{١٧}{ب^2 + جـ^2}$

الحل القطع أفقي

$ك\,س^2 + ٥\,ص^2 = ١٧$ ⟵ $\frac{ك\,س^2}{١٧} + \frac{٥\,ص^2}{١٧} = ١$

⟵ $\frac{س^2}{\frac{١٧}{ك}} + \frac{ص^2}{\frac{١٧}{٥}} = ١$

$أ^2 = \frac{١٧}{ك}$ ⟵ $ك = \frac{١٧}{أ^2} = \frac{١٧}{ب^2 + جـ^2}$

مثال إذا كانت المعادلة $\frac{س^2}{٣ - ك} + \frac{ص^2}{١٧} = ١$ تمثل معادلة قطع ناقص محوره الأكبر موازٍ لمحور الصادات ،فجد قيم ك .

الحل $أ^2 > ب^2 > ٠$ ⟵ ١٧ > ٣ − ك > ٠

١٤ > −ك > −٣

−١٤ < ك < ٣

مثال إذا كانت (٣ ، ٠) إحدى بؤرتي القطع الناقص $١٦س^2 + أ^2ص^2 = ١٦\,أ^2$ ، فأوجد قيمة الثابت أ .

الحل $١٦س^2 + أ^2ص^2 = ١٦\,أ^2$ بقسمة طرفي المعادلة على $١٦\,أ^2$

⟵ $\frac{س^2}{أ^2} + \frac{ص^2}{١٦} = ١$

المركز (٠ ، ٠) ، وبما أن إحدى البؤرتين (٣ ، ٠) فالقطع أفقي

جـ = ٣ ، $ب^2 = ١٦$

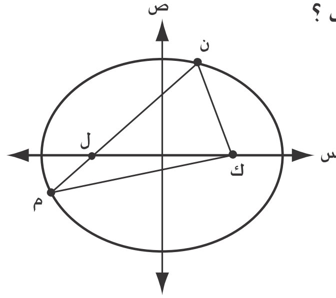
$جـ^2 = أ^2 - ب^2$ ⟵ ٩ = $أ^2$ − ١٦ ⟵ $أ^2 = ٢٥$

⟵ أ = ٥

أمثلة متنوعة

مثال ك ، ل هما بؤرتا القطع المخروطي الممثل في الشكل المجاور الذي معادلته :

$\frac{س^2}{100} + \frac{ص^2}{64} = 1$ ، ما محيط المثلث ن م ك ؟



الحل القطع أفقي .

$أ^2 = 100 \longleftarrow أ = 10$

محيط △ ن م ك = ن ك + ن ل + م ل + م ك

= ٢ أ + ٢ أ

= ٤ أ = ٤٠

مثال القطع الناقص $9 س^2 + أ^2 ص^2 = 9 أ^2$ إحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافىء :

$\frac{1}{4} ص^2 + 4 س = 0$. جد قيمة الثابت أ ؟

الحل

القطع المكافىء

$\frac{1}{4} ص^2 + 4 س = 0 \longleftarrow ص^2 = -16 س$ اتجاه فتحة القطع لليسار

الرأس (٠ ، ٠) ، ٤ جـ = ١٦ ⟵ جـ = ٤ ، البؤرة (−٤ ، ٠)

القطع الناقص

$9 س^2 + أ^2 ص^2 = 9 أ^2 \longleftarrow \frac{س^2}{أ^2} + \frac{ص^2}{9} = 1$

المركز (٠ ، ٠) ، (−٤ ، ٠) إحدى بؤرتي القطع الناقص ∴ (القطع أفقي)

$جـ = 4$ ، $ب^2 = 9$

$جـ^2 = أ^2 - ب^2 \longleftarrow 16 = أ^2 - 9 \longleftarrow أ^2 = 25$

$\longleftarrow أ = 5$

مثال القطع الناقص $م س^2 + 4 ص^2 = ل$ بؤرتاه على محور الصادات والنسبة بين طولي محوريه ١ : ٢ ، ويمر منحناه بالنقطة $(-\sqrt{2} ، 0)$ ، جد قيمة الثابتين م ، ل .

الحل

من معادلة القطع الناقص نستنتج أن المركز (٠ ، ٠) وبما أن بؤرتيه على محور الصادات فالقطع عمودي .

يمر منحناه بالنقطة $(-\sqrt{2} ، 0) \longleftarrow ب = \sqrt{2}$

$\frac{2 ب}{2 أ} = \frac{1}{2} \longleftarrow \frac{\sqrt{2}}{أ} = \frac{1}{2} \longleftarrow أ = 2\sqrt{2}$

معادلة القطع هي : $\frac{س^2}{2} + \frac{ص^2}{8} = 1$ $\xrightarrow[\text{المعادلة بـ ٣٢}]{\text{بضرب طرفي}}$ ١٦ $س^2$ + ٤ $ص^2$ = ٣٢

وبمقارنتها بـ م $س^2$ + ٤ $ص^2$ = ل

م = ١٦ ، ل = ٣٢

مثال جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وينطبق محوراه على محوري الإحداثيات والذي يقطع من محور السينات قطعة طولها ١٢ وحدة ومن محور الصادات قطعة طولها ٢٠ وحدة .

الحل القطع عمودي .

٢أ = ٢٠ ⟵ أ = ١٠ ، ٢ ب = ١٢ ⟵ ب =٦

∴ معادلة القطع هي : $\frac{س^2}{36} + \frac{ص^2}{100} = 1$

مثال جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه (٦ ، ٠) ، ($^-$٦ ، ٠) والنسبة بين طولي محوريه تساوي ٤ : ٥ .

الحل القطع أفقي ، المركز (٠ ، ٠)

جـ = ٦

$\frac{2ب}{2أ} = \frac{4}{5}$ ⟵ ب = $\frac{4}{5}$ أ

$جـ^2 = أ^2 - ب^2$ ⟵ ٣٦ = $أ^2 - (\frac{4}{5}أ)^2 = \frac{9}{25}أ^2$

⟵ $أ^2 = \frac{36(25)}{9} = 100$ ⟵ أ = ١٠

∴ ب = $\frac{4}{5}(10) = 8$

∴ معادلة القطع هي : $\frac{س^2}{100} + \frac{ص^2}{64} = 1$

مثال جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل و محوره الأكبر على محور السينات إذا كان مجموع طولي نصفي محوريه الأكبر والأصغر ٨ سم ، والبعد بين بؤرتيه ٨ سم .

الحل القطع أفقي

أ + ب = ٨ ⟵ ب = ٨ ـ أ

٢ جـ = ٨ ⟵ جـ = ٤

$جـ^2 = أ^2 - ب^2$ ⟵ ١٦ = $أ^2 - (8 - أ)^2$

١٦ = $أ^2$ ـ ٦٤ + ١٦أ ـ $أ^2$

⟵ ١٦أ = ٨٠ ⟵ أ = ٥

∴ ب = ٨ ـ ٥ = ٣

∴ معادلة القطع هي : $\frac{س^٢}{٢٥} + \frac{ص^٢}{٩} = ١$

مثال جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وإحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافىء $س^٢ + ٢٤ ص = ٠$ ويمر من نقطتي تقاطع الدائرة $س^٢ + ص^٢ = ٦٤$ مع محور السينات .

الحل

القطع المكافىء

$س^٢ + ٢٤ ص = ٠ \longrightarrow س^٢ = -٢٤ ص$ رأسه نقطة الأصل واتجاه فتحته لأسفل

$٤ جـ = ٢٤ \longrightarrow جـ = ٦$ بؤرة القطع المكافىء $(٠ ، ^-٦)$

بؤرتا القطع الناقص : $(٠ ، ^-٦)$ ، $(٠ ، ٦) \longrightarrow جـ = ٦$ (القطع عمودي)

الدائرة

نجد نقطتي تقاطعها مع محور السينات (عوض ص = ٠)

$س^٢ + ٠ = ٦٤ \longrightarrow س = \pm ٨$

نقطتا التقاطع : $(٨ ، ٠)$ ، $(^-٨ ، ٠)$

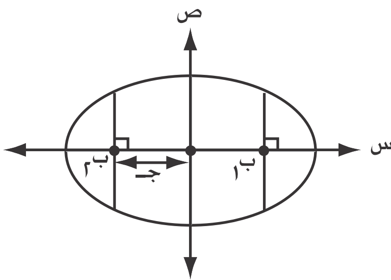
نهايتا المحور الأصغر للقطع الناقص : $(٨ ، ٠)$ ، $(^-٨ ، ٠) \longrightarrow ب = ٨$

$جـ^٢ = أ^٢ - ب^٢ \longrightarrow ٣٦ = أ^٢ - ٦٤ \longrightarrow أ^٢ = ١٠٠$

∴ معادلة القطع الناقص هي : $\frac{س^٢}{٦٤} + \frac{ص^٢}{١٠٠} = ١$

مثال **أ** القطعة المستقيمة العمودية على المحور الأكبر لقطع ناقص وتمر بإحدى بؤرتيه وتنتهي بنقطتين على منحنى القطع تسمى وترا بؤريا . اثبت أن طول الوتر البؤري للقطع الناقص الأفقي $\frac{س^٢}{أ^٢} + \frac{ص^٢}{ب^٢} = ١$ يساوي $\frac{٢ ب^٢}{أ}$.

الحل



ليكن $س^٢ = جـ^٢ = أ^٢ - ب^٢$

$\frac{جـ^٢}{أ^٢} + \frac{ص^٢}{ب^٢} = ١ \longrightarrow$

$\frac{ص^٢}{ب^٢} = ١ - \frac{جـ^٢}{أ^٢} = \frac{أ^٢ - جـ^٢}{أ^٢}$

$\longrightarrow ص^٢ = \frac{ب^٢ (أ^٢ - جـ^٢)}{أ^٢} = \frac{ب^٢ (ب^٢)}{أ^٢}$

$جـ^٢ = أ^٢ - ب^٢$
$ب^٢ = أ^٢ - جـ^٢$

$\leftarrow$ ص = $\pm \frac{ب^2}{أ}$

طول جزء الوتر البؤري فوق السينات = $\frac{ب^2}{أ}$ ، لكن محور السينات ينصف الوتر البؤري

$\therefore$ طول كل وتر بؤري = $\frac{2ب^2}{أ}$

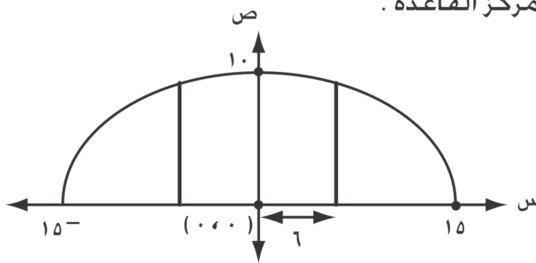
ب استخدم القاعدة في الفرع (أ) لإيجاد طول الوتر البؤري للقطع الناقص الذي معادلته : ٩ $س^2$ + ١٦ $ص^2$ = ١٤٤

الحل ٩ $س^2$ + ١٦ $ص^2$ = ١٤٤ $\leftarrow$ $\frac{س^2}{16} + \frac{ص^2}{9} = 1$

أ = ٤ ، ب = ٣

طول الوتر البؤري = $\frac{2ب^2}{أ} = \frac{2(9)}{4} = \frac{9}{2}$

مثال جسر مقوس له شكل نصف قطع ناقص محوره الأكبر أفقي، فإذا كان طول قاعدة القوس ٣٠م وارتفاع أعلى نقطة في القوس فوق المحور الأفقي ١٠ م ، فجد ارتفاع القوس على بعد ٦ م من مركز القاعدة .



الحل انظر الشكل المجاور

المركز (٠،٠)

أ = ١٥ ، ب = ١٠

معادلة القطع هي : $\frac{س^2}{225} + \frac{ص^2}{100} = 1$

عندما س = ٦ $\leftarrow$ $\frac{36}{225} + \frac{ص^2}{100} = 1$ $\leftarrow$ $\frac{ص^2}{100} = \frac{189}{225}$

$\leftarrow$ $ص^2 = \frac{189\ (100)}{225}$ $\leftarrow$ ص = $\pm \frac{10\sqrt{189}}{15} = \pm \frac{2\sqrt{189}}{3}$

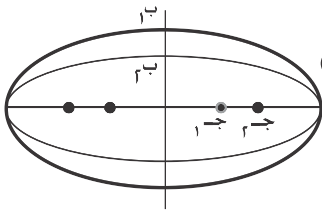
$\therefore$ الارتفاع المطلوب = $\frac{2\sqrt{189}}{3}$ م .

مثال إذا كان $ق_1$ ، $ق_2$ يمثلان قطعين ناقصين لهما نفس المحور الأكبر باختلاف مركزي $هـ_1$ ، $هـ_2$ على الترتيب . فقارن بين شكل القطعين عندما يكون $هـ_1 < هـ_2$ وارسم تخطيطا تقريبيا لهما .

الحل $هـ_1 = \frac{جـ_1}{أ}$ ، $هـ_2 = \frac{جـ_2}{أ}$

جـ$_1$ < جـ$_2$ ⟵ ب$_1$ > ب$_2$

لأن جـ$_1^2$ + ب$_1^2$ = جـ$_2^2$ + ب$_2^2$ = أ^2 (أ عدد ثابت للقطعين)



∴ القطع ق$_2$ يقع داخل القطع ق$_1$.

مثال إذا كان ل > ٠ فإن المعادلة $\frac{س^2}{ل} + \frac{ص^2}{ل + ٤} = ١$ تمثل قطعا ناقصا .

بين أن جميع القطوع الناقصة التي تمثلها هذه المعادلة لها نفس البؤرة بغض النظر عن قيمة ل .

الحل مركز القطع (٠ ، ٠)

أ^2 = ل + ٤ ، ب^2 = ل

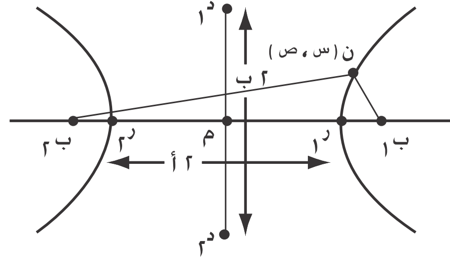
جـ^2 = أ^2 − ب^2 = ل + ٤ − ل = ٤

⟵ جـ = ٢

البؤرة (٠ ، ٢) بغض النظر عن قيمة ل .

القطع الزائد

تعريف القطع الزائد هو المحل الهندسي للنقطة ن (س ، ص) المتحركة في المستوى التي يكون الفرق المطلق بين بعديها عن نقطتين ثابتتين : $ب_1$ ، $ب_2$ (تسميان البؤرتين) يساوي مقدارا ثابتا قيمته ٢ أ (البعد بين الرأسين) . أي أن : $|ن ب_1 - ن ب_2| = ٢ أ$.



الشكل أعلاه يمثل قطعا زائدا وفيه :

١) $ر_1$ ، $ر_2$ رأسا القطع الزائد .

٢) $ب_1$ ، $ب_2$ بؤرتا القطع الزائد، ويسمى البعد بينهما (البعد البؤري) = ٢ جـ .

٣) تسمى القطعة المستقيمة $\overline{ر_1 ر_2}$ المحور القاطع (المحور البؤري) وطولها = ٢ أ .

٤) تسمى القطعة المستقيمة $\overline{د_1 د_2}$ المحور المرافق وطولها = ٢ ب .

٥) تسمى النقطة م مركز القطع وهي منتصف المسافة بين الرأسين أو البؤرتين أو نقطة تقاطع المحورين .

٦) محورا القطع الزائد هما محورا تماثل له .

ملاحظة : ١) أ : بعد أحد الرأسين عن المركز .
ب : بعد أحد طرفي المحور المرافق عن المركز .
جـ : بعد إحدى البؤرتين عن المركز .

٢) جـ أكبر الأبعاد الثلاث .
وقد تكون أ > ب أو أ = ب أو ب < أ

٣) $جـ^2 = أ^2 + ب^2$

تعريف الاختلاف المركزي للقطع الزائد (هـ) هو النسبة بين نصف البعد البؤري إلى نصف طول المحور القاطع .

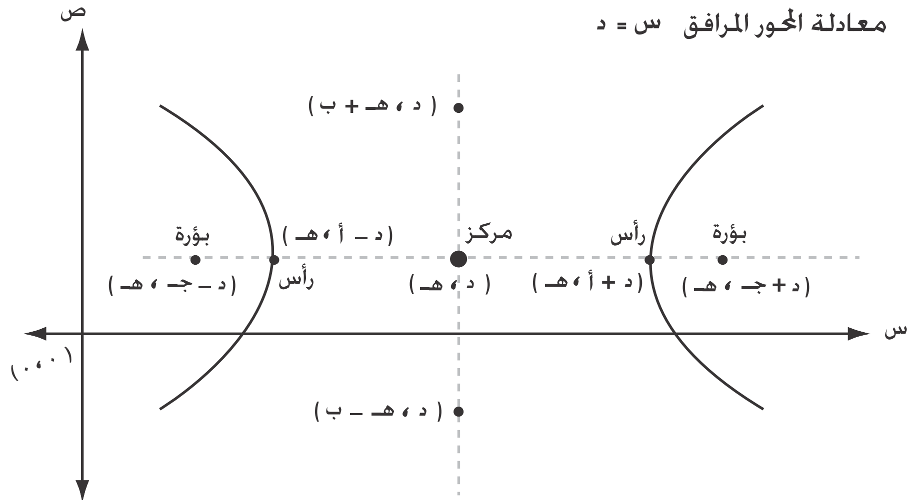
$هـ = \frac{جـ}{أ} > ١$ لأن جـ > أ

★ الصورة القياسية لمعادلة القطع الزائد إذا كان مركزه (د ، هـ) ومحوره القاطع يوازي محور السينات هي:

$$\frac{(س - د)^2}{أ^2} - \frac{(ص - هـ)^2}{ب^2} = 1$$

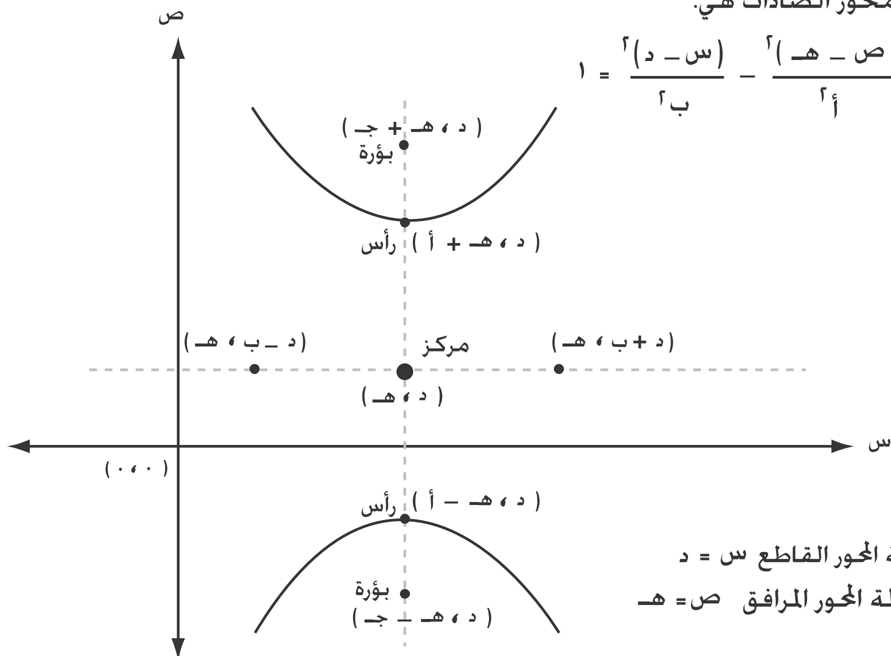
معادلة المحور القاطع ص = هـ

معادلة المحور المرافق س = د



★ الصورة القياسية لمعادلة القطع الزائد إذا كان مركزه (د ، هـ) ومحوره القاطع يوازي محور الصادات هي:

$$\frac{(ص - هـ)^2}{أ^2} - \frac{(س - د)^2}{ب^2} = 1$$



معادلة المحور القاطع س = د

معادلة المحور المرافق ص = هـ

ملاحظة : $أ^2$ هي مقام المقدار الموجب في معادلة القطع الزائد .

إيجاد عناصر القطع الزائد إذا علمت معادلته

مثال جد إحداثيات المركز والرأسين والبؤرتين ، ومعادلة وطول كل من المحورين القاطع والمرافق والبعد البؤري والاختلاف المركزي لكل من القطوع الزائدة الاتية :

١) $س^2 - ص^2 = ١$

٢) $س^2 - ٤ ص^2 = {}^-٤$

٣) $(س + \sqrt{٢})^2 - \frac{(ص - ٣)^2}{٨١} = ١$

٤) $\frac{(ص - ٢)^2}{١٦} - \frac{(س - ١)^2}{٣٦} = ١$

٥) $٤ س^2 - ١٦ ص^2 = {}^-٦٤$

٦) $٩ س^2 - ٤ ص^2 + ١٨ س = ٨ ص + ٣١$

الحل

١) $س^2 - ص^2 = ١$ (المعادلة في الصورة القياسية)

المركز : (٠ ، ٠) ، $أ^2 = ١ \longrightarrow أ = ١$ ، $ب^2 = ١ \longrightarrow ب = ١$

$جـ^2 = أ^2 + ب^2 = ١ + ١ = ٢ \longrightarrow جـ = \sqrt{٢}$

طول المحور القاطع ٢ أ = ٢ ، ومعادلته ص = ٠

طول المحور المرافق ٢ ب = ٢ ، ومعادلته س = ٠

البعد البؤري ٢ جـ = $٢\sqrt{٢}$

البؤرتان : $(\sqrt{٢} ، ٠)$ ، $({}^-\sqrt{٢} ، ٠)$

الرأسان : (١ ، ٠) ، ($^-١$ ، ٠)

الاختلاف المركزي هـ = $\frac{جـ}{أ} = \frac{\sqrt{٢}}{١} = \sqrt{٢}$

---

٢) $س^2 - ٤ ص^2 = {}^-٤$ بقسمة طرفي المعادلة على $^-٤$

$\longrightarrow ص^2 - \frac{س^2}{٤} = ١$

المركز : (٠ ، ٠) ، $أ^2 = ١ \longrightarrow أ = ١$ ، $ب^2 = ٤ \longrightarrow ب = ٢$

$جـ^2 = أ^2 + ب^2 = ١ + ٤ = ٥ \longrightarrow جـ = \sqrt{٥}$

طول المحور القاطع ٢ أ = ٢ ، ومعادلته س = ٠

طول المحور المرافق ٢ ب = ٤ ، ومعادلته ص = ٠

البعد البؤري ٢ جـ = $٢\sqrt{٥}$

البؤرتان : $(٠ ، \sqrt{٥})$ ، $(٠ ، {}^-\sqrt{٥})$

الرأسان : (١ ، ٠) ، (٠ ، $^-$١)

الاختلاف المركزي هـ = $\frac{جـ}{أ}$ = $\frac{\sqrt{٥}}{١}$ = $\sqrt{٥}$

---

٣) $(س + \sqrt{٢})^٢ - \frac{(ص - ٣)^٢}{٨١} = ١$ (المعادلة في الصورة القياسية)

المركز: ($-\sqrt{٢}$ ، ٣) ، $أ^٢$ = ١ ⟵ أ = ١ ، $ب^٢$ = ٨١ ⟵ ب = ٩

$جـ^٢ = أ^٢ + ب^٢$ = ١ + ٨١ = ٨٢ ⟵ جـ = $\sqrt{٨٢}$

طول المحور القاطع ٢ أ = ٢ ، ومعادلته ص = ٣

طول المحور المرافق ٢ ب = ١٨ ، ومعادلته س = $-\sqrt{٢}$

البعد البؤري ٢ جـ = ٢$\sqrt{٨٢}$

البؤرتان : ($-\sqrt{٢} + \sqrt{٨٢}$ ، ٣) ، ($-\sqrt{٢} - \sqrt{٨٢}$ ، ٣)

الرأسان : ($-\sqrt{٢}$ + ١ ، ٣) ، ($-\sqrt{٢}$ - ١ ، ٣)

الاختلاف المركزي هـ = $\frac{جـ}{أ}$ = $\frac{\sqrt{٨٢}}{١}$ = $\sqrt{٨٢}$

---

٤) $\frac{(ص - ٢)^٢}{١٦} - \frac{(س - ١)^٢}{٣٦} = ١$ (المعادلة في الصورة القياسية)

المركز: (١ ، ٢) ، $أ^٢$ = ١٦ ⟵ أ = ٤ ، $ب^٢$ = ٣٦ ⟵ ب = ٦

$جـ^٢ = أ^٢ + ب^٢$ = ١٦ + ٣٦ = ٥٢ ⟵ جـ = $\sqrt{٥٢}$ = ٢$\sqrt{١٣}$

طول المحور القاطع ٢ أ = ٨ ، ومعادلته س = ١

طول المحور المرافق ٢ ب = ١٢ ، ومعادلته ص = ٢

البعد البؤري ٢ جـ = ٤$\sqrt{١٣}$

البؤرتان : (١ ، ٢ + ٢$\sqrt{١٣}$) ، (١ ، ٢ - ٢$\sqrt{١٣}$)

الرأسان : (١ ، ٢ $\pm$ ٤) = (١ ، ٦) ، (١ ، $^-$٢)

الاختلاف المركزي هـ = $\frac{جـ}{أ}$ = $\frac{٢\sqrt{١٣}}{٤}$ = $\frac{\sqrt{١٣}}{٢}$

---

٥) ٤ $س^٢$ - ١٦ $ص^٢$ = $^-$٦٤ (بقسمة طرفي المعادلة على $^-$ ٦٤)

⟵ $\frac{ص^٢}{٤} - \frac{س^٢}{١٦} = ١$

المركز: (٠ ، ٠) ، $أ^٢$ = ٤ ⟵ أ = ٢ ، $ب^٢$ = ١٦ ⟵ ب = ٤

$جـ^٢ = أ^٢ + ب^٢$ = ٤ + ١٦ = ٢٠ ⟵ جـ = $\sqrt{٢٠}$ = ٢ $\sqrt{٥}$

طول المحور القاطع ٢ أ = ٤ ، ومعادلته س = ٠

طول المحور المرافق ٢ ب = ٨ ، ومعادلته ص = ٠

البعد البؤري ٢ جـ = ٤ $\sqrt{٥}$

البؤرتان : (٠ ، ٢ $\sqrt{٥}$) ، (٠ ، ⁻٢ $\sqrt{٥}$)

الرأسان : (٠ ، ٢) ، (٠ ، ⁻٢)

الاختلاف المركزي هـ = $\frac{جـ}{أ}$ = $\frac{٢\sqrt{٥}}{٢}$ = $\sqrt{٥}$

---

٦) ٩ س^٢ ـ ٤ ص^٢ + ١٨ س = ٨ ص + ٣١

← ٩ س^٢ + ١٨ س ـ ٤ ص^٢ ـ ٨ ص = ٣١

٩ (س^٢ + ٢ س) ـ ٤ (ص^٢ + ٢ ص) = ٣١

٩ (س^٢ + ٢ س + ١) ـ ٤ (ص^٢ + ٢ ص + ١) = ٣١ + ٩ ـ ٤

٩ (س + ١)^٢ ـ ٤ (ص + ١)^٢ = ٣٦

$\frac{(س + ١)^٢}{٤}$ ـ $\frac{(ص + ١)^٢}{٩}$ = ١

المركز : (⁻١ ، ⁻١) ، أ^٢ = ٤ ← أ = ٢ ، ب^٢ = ٩ ← ب = ٣

جـ^٢ = أ^٢ + ب^٢ = ٤ + ٩ = ١٣ ← جـ = $\sqrt{١٣}$

طول المحور القاطع ٢ أ = ٤ ، ومعادلته ص = ⁻١

طول المحور المرافق ٢ ب = ٦ ، ومعادلته س = ⁻١

البعد البؤري ٢ جـ = ٢ $\sqrt{١٣}$

البؤرتان : (⁻١ ∓ $\sqrt{١٣}$ ، ⁻١)

الرأسان : (⁻١ ∓ ٢ ، ⁻١) = (١ ، ⁻١) ، (⁻٣ ، ⁻١)

الاختلاف المركزي هـ = $\frac{جـ}{أ}$ = $\frac{\sqrt{١٣}}{٢}$

مثال جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل ، ومحوره القاطع على محور الصادات وطول محوره المرافق يساوي ٤ وحدات وبعده البؤري يساوي ٢ $\sqrt{٥}$ وحدة ، ثم ارسم منحناه .

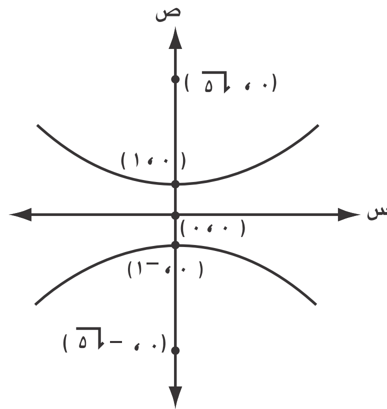
الحل ٢ ب = ٤ ← ب = ٢

٢ جـ = ٢ $\sqrt{٥}$ ← جـ = $\sqrt{٥}$

جـ^٢ = أ^٢ + ب^٢ ← ٥ = أ^٢ + ٤ ← أ^٢ = ١

أ = ١

معادلة القطع هي : $ص^2 - \frac{س^2}{٤} = ١$



مثال جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه (١ ، ٢) وأحد رأسيه ($^-$٣ ، ٢) واختلافه المركزي هـ = $\frac{٣}{٢}$. ثم عين باقي عناصره وارسم منحناه .

الحل من المعطيات المحور القاطع يوازي محور السينات ومعادلته : ص = ٢

أ = ١ − $^-$٣ = ٤

$هـ = \frac{جـ}{أ} \longrightarrow \frac{٣}{٢} = \frac{جـ}{٤} \longrightarrow جـ = ٦$

$جـ^2 = أ^2 + ب^2 \longrightarrow ٣٦ = ١٦ + ب^2 \longrightarrow ب^2 = ٢٠$

$ب = \sqrt{٢٠} = ٢\sqrt{٥}$

معادلة القطع هي : $\frac{(س - ١)^2}{١٦} - \frac{(ص - ٢)^2}{٢٠} = ١$

طول المحور القاطع ٢ أ = ٨

طول المحور المرافق ٢ ب = $٤\sqrt{٥}$ ، ومعادلته س = ١

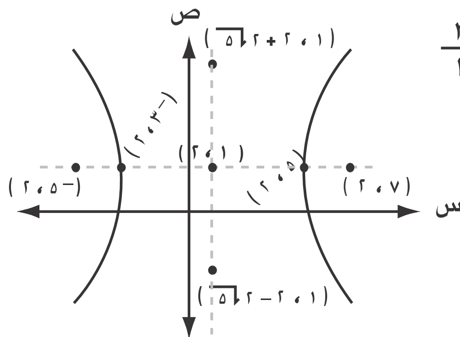
البعد البؤري ٢ جـ = ١٢

البؤرتان : (١ $\mp$ ٦ ، ٢) = (٧ ، ٢) ، ($^-$٥ ، ٢)

الرأسان : (١ $\mp$ ٤ ، ٢) = (٥ ، ٢) ، ($^-$٣ ، ٢)

طرفا المحور المرافق : (١ ، ٢ $\mp$ $٢\sqrt{٥}$)

الاختلاف المركزي هـ = $\frac{جـ}{أ} = \frac{٦}{٤} = \frac{٣}{٢}$



مثال جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه (٠، ٤) ، (٠ ، $^-$٤) إذا علمت أن القيمة المطلقة للفرق بين بعدي أي نقطة تقع عليه عن بؤرتيه تساوي ٦ .

الحل المحور القاطع ينطبق على محور الصادات .

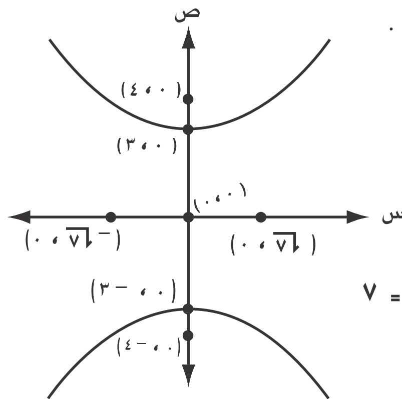
المركز: (٠، ٠)

جـ = ٤ ، ٢ أ = ٦ ⟵ أ = ٣

جـ^٢ = أ^٢ + ب^٢ ⟵ ١٦ = ٩ + ب^٢ ⟵ ب^٢ = ٧

∴ معادلة القطع هي : $\frac{ص^٢}{٩} - \frac{س^٢}{٧} = ١$

مثال جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما النقطتان (٠ ، ± ٤) ويتقاطع مع محور الصادات في النقطتين (٠ ، ± ٣) .



الحل

المحور القاطع ينطبق على محور الصادات .

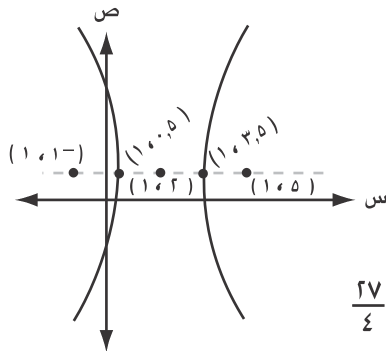
المركز: (٠، ٠)

جـ = ٤ ، ٢ أ = ٦ ⟵ أ = ٣

جـ^٢ = أ^٢ + ب^٢ ⟵ ١٦ = ٩ + ب^٢ ⟵ ب^٢ = ٧

∴ معادلة القطع هي : $\frac{ص^٢}{٩} - \frac{س^٢}{٧} = ١$

مثال جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما النقطتان (٥، ١) ، ($^-$١ ، ١) وطول محوره القاطع ٣ وحدات . ثم ارسم المنحنى البياني له .



الحل المحور القاطع يوازي محور السينات .

المركز: ($\frac{٥ + ^-١}{٢}$ ، $\frac{١ + ١}{٢}$) = (٢ ، ١)

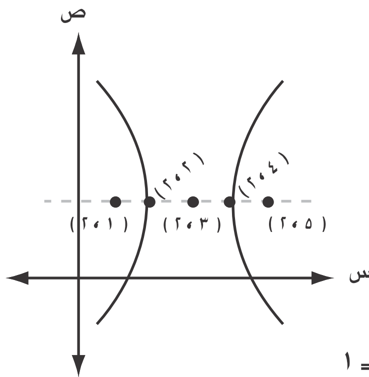
٢ أ = ٣ ⟵ أ = $\frac{٣}{٢}$

، ٢ جـ = ٥ – $^-$١ = ٦ ⟵ جـ = ٣

جـ^٢ = أ^٢ + ب^٢ ⟵ ٩ = $\frac{٩}{٤}$ + ب^٢ ⟵ ب^٢ = $\frac{٢٧}{٤}$

∴ معادلة القطع هي : $\frac{٤ (س - ٢)^٢}{٩} - \frac{٤ (ص - ١)^٢}{٢٧} = ١$

مثال جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما النقطتان (١، ٢) ، (٥، ٢) والبعد البؤري له ضعف طول محوره القاطع . ثم ارسم المنحنى البياني له .



الحل المحور القاطع يوازي محور السينات .

المركز: $\left(\frac{\text{١ + ٥}}{\text{٢}} \text{ ، } \frac{\text{٢ + ٢}}{\text{٢}}\right) = (\text{٣ ، ٢})$

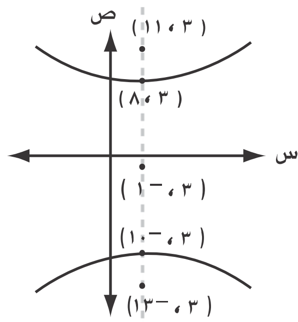
٢ جـ = ٥ − ١ = ٤ ← جـ = ٢

٢ جـ = ٤ أ ← ٤ = ٤ أ ← أ = ١

جـ^2 = أ^2 + ب^2 ← ٤ = ١ + ب^2 ← ب^2 = ٣

∴ معادلة القطع هي: $(\text{س} - \text{٣})^2 - \frac{(\text{ص} - \text{٢})^2}{\text{٣}} = \text{١}$

مثال جد معادلة القطع الزائد الذي رأساه هما النقطتان (٣ ، −١٠) ، (٣ ، ٨) واختلافه المركزي $\frac{\text{٤}}{\text{٣}}$. ثم ارسم المنحنى البياني له .



الحل المحور القاطع يوازي محور الصادات .

المركز: $\left(\frac{\text{٣ + ٣}}{\text{٢}} \text{ ، } \frac{\text{−١٠ + ٨}}{\text{٢}}\right) = (\text{٣ ، −١})$

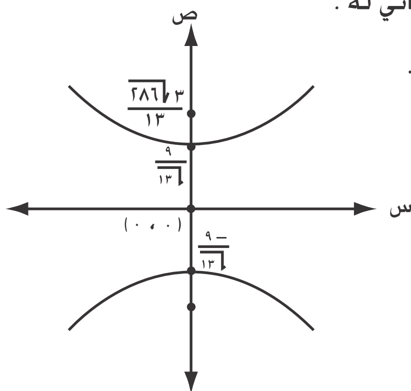
٢ أ = ٨ − −١٠ = ١٨ ← أ = ٩

هـ = $\frac{\text{جـ}}{\text{أ}}$ ← $\frac{\text{٤}}{\text{٣}} = \frac{\text{جـ}}{\text{٩}}$ ← جـ = ١٢

جـ^2 = أ^2 + ب^2 ← ١٤٤ = ٨١ + ب^2 ← ب^2 = ٦٣

∴ معادلة القطع هي: $\frac{(\text{ص} + \text{١})^2}{\text{٨١}} - \frac{(\text{س} - \text{٣})^2}{\text{٦٣}} = \text{١}$

مثال جد معادلة القطع الزائد الذي نهايتا محوره المرافق (٣ ، ٠) ، (−٣ ، ٠) ويمر بالنقطة (٢ ، ٣) . ثم ارسم المنحنى البياني له .



الحل المحور القاطع ينطبق على محور الصادات .

المركز: $\left(\frac{\text{٣ + −٣}}{\text{٢}} \text{ ، } \frac{\text{٠ + ٠}}{\text{٢}}\right) = (\text{٠ ، ٠})$

ب = ٣

معادلة القطع: $\frac{\text{ص}^2}{\text{أ}^2} - \frac{\text{س}^2}{\text{٩}} = \text{١}$

النقطة (٢ ، ٣) تحقق معادلة القطع

← $\frac{(\text{٣})^2}{\text{أ}^2} - \frac{(\text{٢})^2}{\text{٩}} = \text{١}$

← $\frac{\text{٩}}{\text{أ}^2} = \frac{\text{١٣}}{\text{٩}}$ ← أ^2 = $\frac{\text{٨١}}{\text{١٣}}$

∴ معادلة القطع هي: $\frac{\text{١٣ ص}^2}{\text{٨١}} - \frac{\text{س}^2}{\text{٩}} = \text{١}$

مثال جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل و بؤرتاه على محور الصادات ويمر منحناه بالنقطتين (١ ، $\sqrt{٢٠}$) ، (-٣ ، ٦) .

الحل المحور القاطع ينطبق على محور الصادات .

معادلة القطع : $\frac{ص^٢}{أ^٢} - \frac{س^٢}{ب^٢} = ١$

(١ ، $\sqrt{٢٠}$) تحقق معادلة القطع $\longleftarrow$ $\frac{٢٠}{أ^٢} - \frac{١}{ب^٢} = ١$ .... (١)

(-٣ ، ٦) تحقق معادلة القطع $\longleftarrow$ $\frac{٣٦}{أ^٢} - \frac{٩}{ب^٢} = ١$ .... (٢)

بضرب المعادلة (١) بـ -٩
ثم جمعها للمعادلة (٢) .

$-٩ \left(\frac{٢٠}{أ^٢} - \frac{١}{ب^٢} = ١ \right)$ .... (١)

$\frac{٣٦}{أ^٢} - \frac{٩}{ب^٢} = ١$ .... (٢)

$\frac{-١٤٤}{أ^٢} = -٨ \longrightarrow أ^٢ = \frac{١٤٤}{٨} = ١٨$

بتعويض $أ^٢ = ١٨$ في المعادلة (١)

$\longleftarrow \frac{٢٠}{١٨} - \frac{١}{ب^٢} = ١ \longrightarrow \frac{١}{ب^٢} = \frac{٢٠}{١٨} - ١ = \frac{٢}{١٨} \longrightarrow ب^٢ = ٩$

$\therefore$ معادلة القطع هي : $\frac{ص^٢}{١٨} - \frac{س^٢}{٩} = ١$

مثال قطع زائد مركزه (٠ ، ٠) وبؤرتاه على محور السينات ويمس المستقيم $ص = \sqrt{٣}\, س - ٢$ عند النقطة ($٢\sqrt{٣}$ ، ٤) جد معادلته .

الحل المحور القاطع ينطبق على محور السينات .

معادلة القطع : $\frac{س^٢}{أ^٢} - \frac{ص^٢}{ب^٢} = ١$

نشتق معادلة القطع ضمنيا بالنسبة لـ س

$\frac{٢ س}{أ^٢} - \frac{٢ ص}{ب^٢} . \frac{د ص}{د س} = ٠ \longrightarrow \frac{د ص}{د س} = \frac{ب^٢ س}{أ^٢ ص}$

$\left. \frac{د ص}{د س} \right|_{س = ٢\sqrt{٣},\ ص = ٤} = \frac{ب^٢ (٢\sqrt{٣})}{أ^٢ (٤)} = \frac{\sqrt{٣}\, ب^٢}{٢ أ^٢}$

ميل المستقيم $ص = \sqrt{٣}\, س - ٢$ يساوي $\sqrt{٣}$

عند النقطة ($٢\sqrt{٣}$ ، ٤) يتساوى الميل $\longrightarrow \frac{\sqrt{٣}\, ب^٢}{٢ أ^٢} = \sqrt{٣} \longrightarrow ب^٢ = ٢ أ^٢$ .. (١)

$(\text{٢}\sqrt{\text{٣}}\ ،\ \text{٤})$ تحقق معادلة القطع $\longleftarrow \frac{\text{١٢}}{\text{أ}^2} - \frac{\text{١٦}}{\text{ب}^2} = \text{١}$ ... (٢)

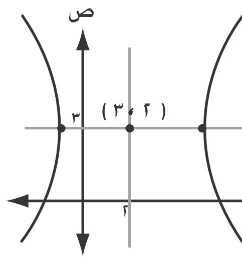
بتعويض $\text{ب}^2 = \text{٢}\ \text{أ}^2$ في المعادلة (٢) $\longleftarrow \frac{\text{١٢}}{\text{أ}^2} - \frac{\text{١٦}}{\text{٢}\ \text{أ}^2} = \text{١} \longleftarrow \frac{\text{٤}}{\text{أ}^2} = \text{١} \longleftarrow \text{أ}^2 = \text{٤}$

$\therefore \text{ب}^2 = \text{٢}\ \text{أ}^2 = \text{٨}$

$\therefore$ معادلة القطع هي : $\frac{\text{س}^2}{\text{٤}} - \frac{\text{ص}^2}{\text{٨}} = \text{١}$

مثال اكتب معادلة القطع الزائد الذي اختلافه المركزي يساوي $\frac{\sqrt{\text{٢١}}}{\text{٣}}$ ويمر بالنقطة $(-\text{٤}\ ،-\text{٣})$ ومركزه يقع على المستقيم س = ٢ ، وبؤرتاه تقعان على المستقيم ص = ٣ .

الحل المحور القاطع يوازي محور السينات .



المركز : (٢، ٣)

معادلة القطع : $\frac{(\text{س} - \text{٢})^2}{\text{أ}^2} - \frac{(\text{ص} - \text{٣})^2}{\text{ب}^2} = \text{١}$

$\text{هـ}^2 = \frac{\text{جـ}^2}{\text{أ}^2} = \frac{\text{٢١}}{\text{٩}} \longleftarrow \frac{\text{جـ}^2}{\text{أ}^2} \longleftarrow \text{جـ}^2 = \frac{\text{٧}}{\text{٣}}\ \text{أ}^2$

لكن $\text{جـ}^2 = \text{أ}^2 + \text{ب}^2 \longleftarrow \frac{\text{٧}}{\text{٣}}\ \text{أ}^2 = \text{أ}^2 + \text{ب}^2 \longleftarrow \text{ب}^2 = \frac{\text{٤}}{\text{٣}}\ \text{أ}^2$

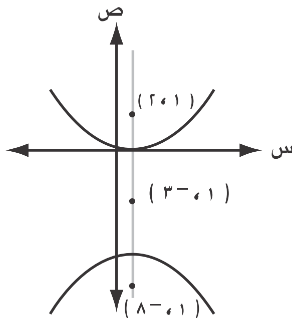
فتصبح معادلة القطع $\frac{(\text{س} - \text{٢})^2}{\text{أ}^2} - \frac{\text{٣}(\text{ص} - \text{٣})^2}{\text{٤}\ \text{أ}^2} = \text{١}$

$(-\text{٤}\ ،-\text{٣})$ تحقق معادلة القطع $\longleftarrow \frac{(-\text{٤} - \text{٢})^2}{\text{أ}^2} - \frac{\text{٣}(-\text{٣} - \text{٣})^2}{\text{٤}\ \text{أ}^2} = \text{١}$

$\longleftarrow \frac{\text{٣٦}}{\text{أ}^2} - \frac{\text{٢٧}}{\text{أ}^2} = \text{١} \longleftarrow \frac{\text{٩}}{\text{أ}^2} = \text{١} \longleftarrow \text{أ}^2 = \text{٩}$

$\therefore$ معادلة القطع هي : $\frac{(\text{س} - \text{٢})^2}{\text{٩}} - \frac{(\text{ص} - \text{٣})^2}{\text{١٢}} = \text{١}$

مثال جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه النقطتان (١، ٢) ، $(\text{١}\ ،-\text{٨})$ ويقع أحد رأسيه على محور السينات .



الحل المحور القاطع يوازي محور الصادات .

المركز : $\left(\frac{\text{١} + \text{١}}{\text{٢}}\ ،\ \frac{\text{٢} + -\text{٨}}{\text{٢}}\right) = (\text{١}\ ،-\text{٣})$

$\text{٢جـ} = \text{٢} - -\text{٨} = \text{١٠} \longleftarrow \text{جـ} = \text{٥}$

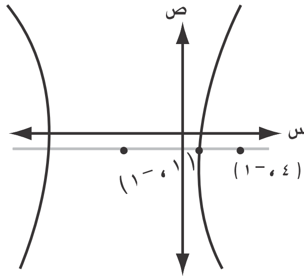
النقطة (١، ٠) تمثل أحد الرأسين

$\text{أ} = \text{٠} - -\text{٣} = \text{٣}$

جـ^2 = أ^2 + ب^2 ⟵ ٢٥ = ٩ + ب^2 ⟵ ب^2 = ١٦

∴ معادلة القطع هي : $\frac{(ص + ٣)^2}{٩} - \frac{(س - ١)^2}{١٦} = ١$

مثال جد معادلة القطع الزائد الذي أحد رأسيه (١ ، $^-$١) والبؤرة القريبة من هذا الرأس (٤ ، $^-$١) واختلافه المركزي يساوي ١,٦ .



الحل المحور القاطع يوازي محور السينات .

جـ – أ = ٣ ...... (١)

$١,٦ = \frac{جـ}{أ}$ ⟵ جـ = ١,٦ أ

عوض جـ = ١,٦ أ في المعادلة (١)

⟵ ١,٦ أ – أ = ٣ ⟵ ٠,٦ أ = ٣ ⟵ أ = ٥

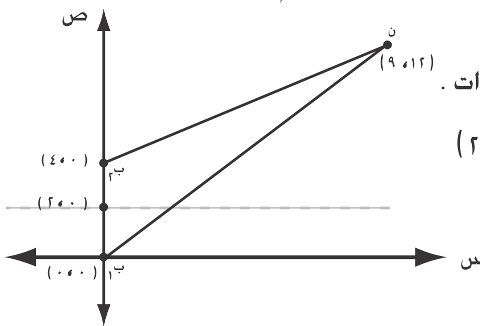
∴ جـ = ١,٦ (٥) = ٨

جـ^2 = أ^2 + ب^2 ⟵ ٦٤ = ٢٥ + ب^2 ⟵ ب^2 = ٣٩

المركز (١ – ٥ ، $^-$١) = ($^-$٤ ، $^-$١)

∴ معادلة القطع هي : $\frac{(س + ٤)^2}{٢٥} - \frac{(ص + ١)^2}{٣٩} = ١$

مثال جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما النقطتان $ب_1$ (٠ ، ٠) ، $ب_2$ (٠ ، ٤) ويمر بالنقطة ن (١٢ ، ٩) .



الحل المحور القاطع ينطبق على محور الصادات .

المركز : $\left(\frac{٠ + ٠}{٢} ، \frac{٠ + ٤}{٢} \right)$ = (٠ ، ٢)

جـ = ٢

من تعريف القطع الزائد

| ن $ب_1$ – ن $ب_2$ | = ٢ أ .

$\left| \sqrt{(١٢ - ٠)^2 + (٩ - ٠)^2} - \sqrt{(١٢ - ٠)^2 + (٩ - ٤)^2} \right| = ٢أ$

$\left| \sqrt{٢٢٥} - \sqrt{١٦٩} \right| = ٢أ$ ⟵ ٢ = ٢أ

⟵ أ = ١

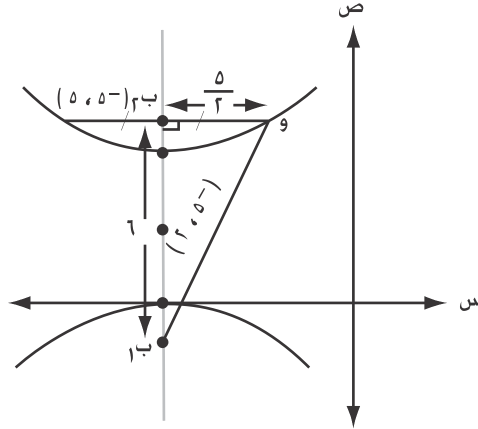
جـ^2 = أ^2 + ب^2 ⟵ ٤ = ١ + ب^2 ⟵ ب^2 = ٣

∴ معادلة القطع هي : $(ص - ٢)^2 - \frac{س^2}{٣} = ١$

مثال جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه ($^{-}$٥ ، ٢) وإحدى بؤرتيه ($^{-}$٥ ، ٥) وطول البعد العمودي البؤري له يساوي ٥ .

(البعد العمودي البؤري هو طول القطعة المستقيمة المارة بالبؤرة عمودا على المحور ونهايتاها على القطع)

الحل



المحور القاطع يوازي محور الصادات .

جـ = ٣ ⟵ ٢ جـ = ٦

من هندسة الشكل المجاور

$(و ب_١)^٢ = (و ب_٢)^٢ + (ب_١ ب_٢)^٢$

$= \frac{٢٥}{٤} + ٣٦ = \frac{١٦٩}{٤}$

$و ب_١ = \frac{١٣}{٢}$

من تعريف القطع الزائد

$| و ب_١ - و ب_٢ | = ٢ أ$.

$| \frac{١٣}{٢} - \frac{٥}{٢} | = ٢ أ$ ⟵ أ = ٢

$جـ^٢ = أ^٢ + ب^٢$ ⟵ $٩ = ٤ + ب^٢$ ⟵ $ب^٢ = ٥$

∴ معادلة القطع هي : $\frac{(ص - ٢)^٢}{٤} - \frac{(س + ٥)^٢}{٥} = ١$

مثال جد معادلة القطع الزائد الذي رأساه هما بؤرتا القطع الناقص $٩ س^٢ + ٤ ص^٢ = ٣٦$ وبؤرتاه هما رأسا هذا القطع .

الحل

القطع الناقص

$٩ س^٢ + ٤ ص^٢ = ٣٦$ ⟵ $\frac{س^٢}{٤} + \frac{ص^٢}{٩} = ١$ (القطع عمودي)

المركز (٠ ، ٠) ، $أ^٢ = ٩$ ⟵ أ = ٣ ، $ب^٢ = ٤$ ⟵ ب = ٢

$جـ^٢ = أ^٢ - ب^٢ = ٩ - ٤ = ٥$ ⟵ $جـ = \sqrt{٥}$

الرأسان : (٠ ، ٣) ، (٠ ، $^{-}$٣)

البؤرتان : (٠ ، $\sqrt{٥}$) ، (٠ ، $-\sqrt{٥}$)

للقطع الزائد

الرأسان : (٠ ، $\sqrt{٥}$) ، (٠ ، $-\sqrt{٥}$) ، البؤرتان : (٠ ، ٣) ، (٠ ، $^{-}$٣)

المحور القاطع ينطبق على محور الصادات .

المركز (٠ ، ٠)

أ = $\sqrt{5}$ ، جـ = ٣

جـ^2 = أ^2 + ب^2 ⟵ ٩ = ٥ + ب^2 ⟵ ب^2 = ٤

∴ معادلة القطع هي : $\frac{ص^2}{5} - \frac{س^2}{4} = 1$

مثال جد معادلة القطع الزائد الذي إحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافىء $\frac{ص^2}{24} - س = 0$ وإحداثيات رأسيه هما نقطتا تقاطع القطع الناقص س^2 + ٥ ص^2 = ٥ مع محور السينات .

(الحل) القطع المكافىء $\frac{ص^2}{24} - س = 0$ ⟵ ص^2 = ٢٤ س

الرأس (٠ ، ٠) ، اتجاه فتحة القطع لليمين .

٤ جـ = ٢٤ ⟵ جـ = ٦ ، البؤرة : (٦ ، ٠)

القطع الناقص س^2 + ٥ ص^2 = ٥ يقطع محور السينات عندما ص = ٠

⟵ س^2 + ٥ (٠) = ٥ ⟵ س = ± $\sqrt{5}$

نقطتا التقاطع مع محور السينات : ($\sqrt{5}$ ، ٠) ، ($-\sqrt{5}$ ، ٠)

للقطع الزائد :

إحدى البؤرتين (٦ ، ٠) ، الرأسان : ($\sqrt{5}$ ، ٠) ، ($-\sqrt{5}$ ، ٠)

المركز (٠ ، ٠) ، المحور القاطع ينطبق على محور السينات

جـ = ٦ ، أ = $\sqrt{5}$

جـ^2 = أ^2 + ب^2 ⟵ ٣٦ = ٥ + ب^2 ⟵ ب^2 = ٣١

∴ معادلة القطع هي : $\frac{س^2}{5} - \frac{ص^2}{31} = 1$

مثال قطع زائد معادلته ل س^2 ـ م ص^2 = ٩٠ ، وطول محوره القاطع = ٦ $\sqrt{2}$ وبؤرتاه تنطبقان على بؤرتي القطع الناقص ٩ س^2 + ١٦ ص^2 = ٥٧٦ .
جد قيمة كل من ل ، م .

(الحل) القطع الناقص ٩ س^2 + ١٦ ص^2 = ٥٧٦ ⟵ $\frac{س^2}{64} + \frac{ص^2}{36} = 1$

القطع أفقي ، المركز (٠ ، ٠) ، أ^2 = ٦٤ ⟵ أ = ٨ ، ب^2 = ٣٦ ⟵ ب = ٦

جـ^2 = أ^2 ـ ب^2 = ٦٤ ـ ٣٦ = ٢٨ ⟵ جـ = $\sqrt{28}$ = ٢ $\sqrt{7}$

البؤرتان : (٢ $\sqrt{7}$ ، ٠) ، ($-2\sqrt{7}$ ، ٠)

للقطع الزائد :

البؤرتان : $(2\sqrt{7}, 0)$ ، $(-2\sqrt{7}, 0)$ ، المركز $(0, 0)$ ،

المحور القاطع ينطبق على محور السينات .

جـ = $2\sqrt{7}$ ، 2 أ = $6\sqrt{2}$ ⟵ أ = $3\sqrt{2}$

جـ^2 = أ^2 + ب^2 ⟵ 28 = 18 + ب^2 ⟵ ب^2 = 10

∴ معادلة القطع هي : $\frac{س^2}{18} - \frac{ص^2}{10} = 1$ (بضرب طرفي المعادلة بـ 90)

⟵ 5 س^2 − 9 ص^2 = 90

وبمقارنتها بـ ل س^2 − م ص^2 = 90

ل = 5 ، م = 9

مثال إذا كان طول المحور القاطع لقطع زائد يساوي 3 أمثال طول محوره المرافق ، فما قيمة الاختلاف المركزي لهذا القطع الزائد ؟

الحل 2 أ = 3 (2 ب) ⟵ أ = 3 ب

جـ^2 = أ^2 + ب^2 ⟵ جـ^2 = 9 ب^2 + ب^2 = 10 ب^2 ⟵ جـ = $\sqrt{10}$ ب

هـ = $\frac{جـ}{أ}$ = $\frac{\sqrt{10}\ ب}{3\ ب}$ = $\frac{\sqrt{10}}{3}$

مثال إذا كان هـ$_1$ ، هـ$_2$ يمثلان الاختلافين المركزيين للقطعين المخروطيين :

$\frac{س^2}{ل^2} - \frac{ص^2}{ك^2} = 1$ ، $\frac{س^2}{ك^2} - \frac{ص^2}{ل^2} = 1$ فأثبت أن : $\frac{1}{هـ_1^2} + \frac{1}{هـ_2^2} = 1$

الحل هـ$_1$ = $\frac{جـ}{أ_1}$ = $\frac{جـ}{ل}$ ⟵ هـ$_1^2$ = $\frac{جـ^2}{ل^2}$

هـ$_2$ = $\frac{جـ}{أ_2}$ = $\frac{جـ}{ك}$ ⟵ هـ$_2^2$ = $\frac{جـ^2}{ك^2}$

الطرف الأيمن : $\frac{1}{هـ_1^2} + \frac{1}{هـ_2^2} = \frac{ل^2}{جـ^2} + \frac{ك^2}{جـ^2} = \frac{ل^2 + ك^2}{جـ^2} = \frac{جـ^2}{جـ^2} = 1$

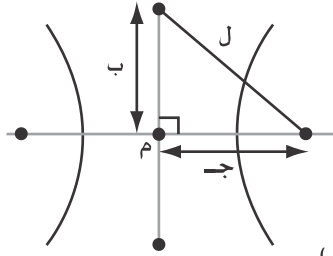
مثال جد الاختلاف المركزي للقطع الزائد الذي بعد أحد رأسيه عن البؤرة البعيدة عنه يساوي أربعة أمثال بعده عن البؤرة القريبة منه .

الحل أ + جـ = 4 (جـ − أ) ⟵ أ + جـ = 4 جـ − 4 أ

⟵ 5 أ = 3 جـ ⟵ جـ = $\frac{5}{3}$ أ

هـ = $\frac{جـ}{أ}$ = $\frac{\frac{5}{3}أ}{أ}$ = $\frac{5}{3}$

مثال جد الاختلاف المركزي للقطع الزائد الذي بعد أحد بؤرتيه عن أحد طرفي المحور المرافق يساوي البعد بين رأسيه .



(الحل) من هندسة الشكل المجاور

$ل^{2} = جـ^{2} + ب^{2}$

من المعطيات أيضا $ل = 2أ \longrightarrow ل^{2} = 4أ^{2}$

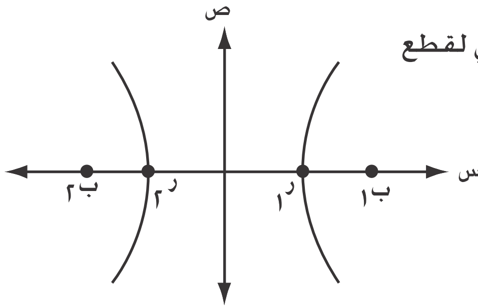
$\therefore\ جـ^{2} + ب^{2} = 4أ^{2}$ ......(١)

لكن $جـ^{2} = أ^{2} + ب^{2} \longrightarrow ب^{2} = جـ^{2} - أ^{2}$ ......(٢)

من (١) و (٢) $\longrightarrow جـ^{2} + جـ^{2} - أ^{2} = 4أ^{2} \longrightarrow 2جـ^{2} = 5أ^{2}$

$\frac{جـ^{2}}{أ^{2}} = \frac{5}{2} \longrightarrow \frac{جـ}{أ} = \sqrt{\frac{5}{2}}$

مثال يمثل الشكل المجاور المنحنى البياني لقطع مخروطي ، إذا كانت $\frac{ب_1ر_1}{ب_1ب_2} = \frac{1}{5}$



(ب : بؤرة ، ر : رأس)

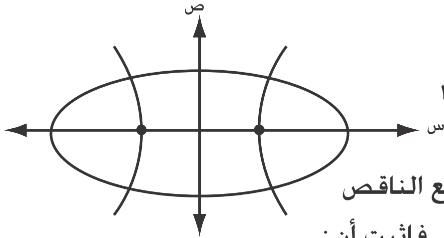
جد الاختلاف المركزي لهذا القطع .

(الحل)

$\frac{ب_1ر_1}{ب_1ب_2} = \frac{جـ - أ}{2جـ} = \frac{1}{5} \longrightarrow 5جـ - 5أ = 2جـ$

$\longrightarrow 3جـ = 5أ \longrightarrow \frac{جـ}{أ} = \frac{5}{3}$

مثال يمثل الشكل المجاور المنحنى البياني لقطعين مخروطيين (زائد اختلافه المركزي $هـ_1$ و ناقص اختلافه المركزي $هـ_2$) .



إذا علمت أن رأسي القطع الزائد هما بؤرتا القطع الناقص وأن طول المحور المرافق يساوي طول المحور الأصغر ، فاثبت أن :

$هـ_1 هـ_2 = 1$

(الحل) للقطع الزائد : $جـ_1^{2} = أ_1^{2} + ب^{2}$ ......(١)

للقطع الناقص : $جـ_2^{2} = أ_2^{2} - ب^{2}$ ......(٢)

بجمع المعادلتين (١) و (٢) $جـ_1^{2} + جـ_2^{2} = أ_1^{2} + أ_2^{2}$ ($جـ_2 = أ_1$)

$جـ_1^{2} = أ_2^{2} \longrightarrow جـ_1 = أ_2$

$$\therefore\ \text{هـ}_1\,\text{هـ}_2 = \frac{\text{جـ}_1}{\text{أ}_1} \cdot \frac{\text{جـ}_2}{\text{أ}_2} = \frac{\text{جـ}_1}{\text{أ}_1} \cdot \frac{\text{أ}_1}{\text{جـ}_1} = 1$$

مثال قطع زائد معادلته : $2\,\text{س}^2 - 3\,\text{ص}^2 + 18\,\text{ص} = \text{ك}$ ، جد قيم ك التي تجعل محوره القاطع موازيا لمحور الصادات .

الحل

$$2\,\text{س}^2 - 3\,\text{ص}^2 + 18\,\text{ص} = \text{ك}$$

$$2\,\text{س}^2 - 3\,(\text{ص}^2 - 6\,\text{ص}) = \text{ك}$$

$$2\,\text{س}^2 - 3\,(\text{ص}^2 - 6\,\text{ص} + 9) = \text{ك} - 27$$

$$2\,\text{س}^2 - 3\,(\text{ص} - 3)^2 = \text{ك} - 27$$

$$\frac{\text{س}^2}{\frac{\text{ك} - 27}{2}} - \frac{(\text{ص} - 3)^2}{\frac{\text{ك} - 27}{3}} = 1$$

حتى يكون المحور القاطع موازيا لمحور الصادات المقدار $\frac{\text{ك} - 27}{3} < 0 \longrightarrow \text{ك} - 27 < 0 \longrightarrow \text{ك} < 27$

مثال جد الفرق المطلق بين بعدي النقطة ن $(4\sqrt{2}\ ،\ 3)$ عن بؤرتي القطع المخروطي الممثل بالمعادلة $9\,\text{س}^2 - 16\,\text{ص}^2 = 144$

الحل

النقطة $(4\sqrt{2}\ ،\ 3)$ من نقاط منحنى القطع .

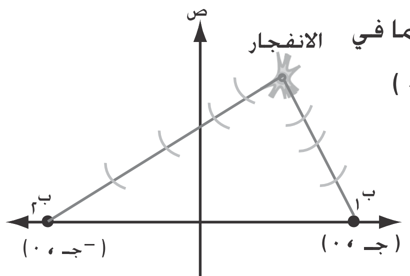
$9\,\text{س}^2 - 16\,\text{ص}^2 = 144 \longrightarrow \frac{\text{س}^2}{16} - \frac{\text{ص}^2}{9} = 1$ (القطع زائد محوره القاطع ينطبق على السينات)

$\text{أ}^2 = 16 \longrightarrow \text{أ} = 4$ ، $\text{ب}^2 = 9 \longrightarrow \text{ب} = 3$

حسب تعريف القطع الزائد المطلوب قيمة ٢ أ .

$\therefore\ 2\,\text{أ} = 2\,(4) = 8$

مثال سامي و خالد مراقبان في محطتين موقعهما في المستوى الديكارتي $\text{ب}_1(\text{جـ} ، 0)$ ، $\text{ب}_2(-\text{جـ} ، 0)$ على الترتيب . يقع انفجار في المستوى الديكارتي (انظر الشكل المجاور) .



سامي يسمع صوت الإنفجار قبل خالد بزمن مقداره (ن) ثانية .

على فرض أن سرعة الصوت ثابتة وتساوي (ع) .

بين أن الانفجار وقع في نقطة ما على القطع الزائد $\frac{\text{س}^2}{\frac{\text{ع}^2\,\text{ن}^2}{4}} - \frac{\text{ص}^2}{\text{جـ}^2 - \frac{\text{ع}^2\,\text{ن}^2}{4}} = 1$

الحل

ليكن ل_1 ، ل_2 بعد كل من سامي وخالد عن موقع الانفجار على الترتيب .

ن = الزمن الذي يحتاجه خالد ليسمع صوت الانفجار — الزمن الذي يحتاجه سامي ليسمع صوت الانفجار

$= \frac{ل_٢}{ع} - \frac{ل_١}{ع} = \frac{ل_٢ - ل_١}{ع}$

$\longleftarrow$ $ل_٢ - ل_١ = ع ن =$ ثابت

∴ الانفجار وقع في نقطة ما على أحد فرعي القطع الزائد الذي بؤرتاه

$ب_١ (جـ ، ٠)$ ، $ب_٢ (-جـ ، ٠)$ المركز (٠ ، ٠)

(المحور القاطع ينطبق على محور السينات)

$\longleftarrow$ $ل_٢ - ل_١ = ع ن = ٢ أ$ $\longleftarrow$ $أ = \frac{ع ن}{٢}$

لكن $جـ^٢ = أ^٢ + ب^٢$ $\longleftarrow$ $ب^٢ = جـ^٢ - أ^٢ = جـ^٢ - \frac{ع^٢ ن^٢}{٤}$

∴ $\frac{س^٢}{\frac{ع^٢ ن^٢}{٤}} - \frac{ص^٢}{جـ^٢ - \frac{ع^٢ ن^٢}{٤}} = ١$ هي معادلة القطع الزائد الذي يكون موقع الانفجار في إحدى نقطه .

المعادلة العامة للقطوع المخروطية

إن معادلات جميع القطوع المخروطية سواء أكانت دائرة ، أم قطعا ناقصا ، أم قطعا زائدا ، أم قطعا مكافئا تأخذ شكل المعادلة التربيعية من الدرجة الثانية :

$أ س^٢ + ب ص^٢ + جـ س + د ص + هـ = ٠$

أ ، ب ، جـ ، د ، هـ $\in$ ح ، أ ، ب لا يساويان الصفر معا .

وباختيار مناسب للثوابت أ ، ب ، جـ ، د ، هـ ، تمثل المعادلة السابقة :

١) دائرة إذا كان $أ \neq ٠$ ، $ب \neq ٠$ ، $أ = ب$.

٢) قطعا مكافئا إذا كان $أ = ٠$ أو $ب = ٠$ وليس كلاهما صفرا .

٣) قطعا ناقصا إذا كان $أ ب > ٠$ ، $أ \neq ب$.

٤) قطعا زائدا إذا كان $أ ب < ٠$.

مثال عين العناصر الأساسية لكل من القطوع المخروطية الاتية :

١) $س^٢ + ٤ س + ص^٢ - ١٤ ص - ٤٧ = ٠$

٢) $٤ س^٢ + ٩ ص^٢ - ٨ س = ٣٢$

٣) $ص^٢ + ٣ س - ٨ ص + ١ = ٠$

٤) $٩ س^٢ - ٤ ص^٢ - ٥٤ س - ١٦ ص + ٢٩ = ٠$

الحل ١) س^{٢} + ٤ س + ص^{٢} − ١٤ ص − ٤٧ = ٠

(أ ≠ ٠ ، ب ≠ ٠ ، أ = ب   القطع المخروطي دائرة)

(س^{٢} + ٤ س + ٤) + (ص^{٢} − ١٤ ص + ٤٩) = ٤٧ + ٤ + ٤٩

(س + ٢)^{٢} + (ص − ٧)^{٢} = ١٠٠

المركز (⁻٢ ، ٧) ، ر = ١٠

---

٢) ٤ س^{٢} + ٩ ص^{٢} − ٨ س = ٣٢

(أ ب > ٠ ، أ ≠ ب . القطع المخروطي ناقص)

٤ س^{٢} − ٨ س + ٩ ص^{٢} = ٣٢

٤ (س^{٢} − ٢ س) + ٩ ص^{٢} = ٣٢

٤ (س^{٢} − ٢ س + ١) + ٩ ص^{٢} = ٣٢ + ٤

٤ (س − ١)^{٢} + ٩ ص^{٢} = ٣٦

$\frac{(\text{س} - ١)^{٢}}{٩} + \frac{\text{ص}^{٢}}{٤} = ١$ (القطع أفقي)

المركز: (١ ، ٠) ، أ^{٢} = ٩ ⟵ أ = ٣ ، ب^{٢} = ٤ ⟵ ب = ٢

جـ^{٢} = أ^{٢} − ب^{٢} = ٩ − ٤ = ٥ ⟵ جـ = $\sqrt{٥}$

الرأسان: (١ ± ٣ ، ٠) = (٤ ، ٠) ، (⁻٢ ، ٠)

البؤرتان: (١ ± $\sqrt{٥}$ ، ٠)

طرفا المحور الأصغر: (١ ، ٠ ± ٢) = (١ ، ٢) ، (١ ، ⁻٢)

معادلة المحور الأكبر: ص = ٠ وطوله ٢ أ = ٢ (٣) = ٦

معادلة المحور الأصغر: س = ١ وطوله ٢ ب = ٢ (٢) = ٤

البعد البؤري = ٢ جـ = ٢ $\sqrt{٥}$ ، الاختلاف المركزي هـ = $\frac{\text{جـ}}{\text{أ}} = \frac{\sqrt{٥}}{٣}$

---

٣) ص^{٢} + ٣ س − ٨ ص + ١ = ٠

(أ = ٠ ، ب = ١ القطع المخروطي مكافىء)

ص^{٢} − ٨ ص = −٣ س − ١

ص^{٢} − ٨ ص + ١٦ = −٣ س − ١ + ١٦

(ص − ٤)^{٢} = −٣ (س − ٥)   (اتجاه فتحة القطع لليسار)

الرأس: (٥ ، ٤) ، ٤ جـ = ٣ ⟵ جـ = $\frac{٣}{٤}$

البؤرة: (٥ − $\frac{٣}{٤}$ ، ٤) = ($\frac{١٧}{٤}$ ، ٤)

معادلة المحور ص = ٤ ، معادلة الدليل س = ٥ + $\frac{٣}{٤}$ = $\frac{٢٣}{٤}$

٤) ٩ س^{٢} _ ٤ ص^{٢} _ ٥٤ س _ ١٦ ص + ٢٩ = ٠

(أ ب < ٠ القطع زائد)

٩ س^{٢} _ ٥٤ س _ ٤ ص^{٢} _ ١٦ ص = $^{-}$ ٢٩

٩ (س^{٢} _ ٦ س) _ ٤ (ص^{٢} + ٤ ص) = $^{-}$ ٢٩

٩ (س^{٢} _ ٦ س + ٩) _ ٤ (ص^{٢} + ٤ ص + ٤) = $^{-}$ ٢٩ + ٨١ − ١٦

٩ (س − ٣)^{٢} _ ٤ (ص + ٢)^{٢} = ٣٦

$\frac{(س - ٣)^{٢}}{٤}$ − $\frac{(ص + ٢)^{٢}}{٩}$ = ١ (المحور القاطع يوازي محور السينات)

المركز : (٣ ، $^{-}$٢) ، أ^{٢} = ٤ ⟵ أ = ٢ ، ب^{٢} = ٩ ⟵ ب = ٣

جـ^{٢} = أ^{٢} + ب^{٢} = ٤ + ٩ = ١٣ ⟵ جـ = $\sqrt{١٣}$

طول المحور القاطع ٢ أ = ٤ ، ومعادلته ص = $^{-}$٢

طول المحور المرافق ٢ ب = ٦ ، ومعادلته س = ٣

البعد البؤري ٢ جـ = ٢ $\sqrt{١٣}$

البؤرتان : (٣ + $\sqrt{١٣}$ ، − ٢) ، (٣ − $\sqrt{١٣}$ ، − ٢)

الرأسان : (٣ ∓ ٢ ، − ٢) = (٥ ، $^{-}$٢) ، (١ ، $^{-}$٢)

طرفا المحور المرافق : (٣ ، − ٢ ∓ ٣) = (٣ ، $^{-}$٥) ، (٣ ، ١)

الاختلاف المركزي هـ = $\frac{جـ}{أ}$ = $\frac{\sqrt{١٣}}{٢}$

مثال اعتبر المنحنى الذي معادلته : أ س^{٢} + ص^{٢} _ ٢ س = ٠ ، حيث أ عدد حقيقي .
ناقش نوع المنحنى حسب قيم أ = ١ ، ٠ .

الحل عندما أ = ٠ فإن معادلة المنحنى هي : ص^{٢} _ ٢ س = ٠
وهي معادلة قطع مكافىء

عندما أ = ١ فإن معادلة المنحنى هي : س^{٢} + ص^{٢} _ ٢ س = ٠
وهي معادلة دائرة .

مثال جد مجموعة قيم م التي تجعل (م^{٢} _ ٩) س^{٢} + ص^{٢} = ١ تمثل قطعا زائدا .

الحل (م^{٢} _ ٩) (١) < ٠

$^{-}$٣ < م < ٣

م^{٢} _ ٩ = ٠ ⟵ م = ∓ ٣

+ + | − − − | + +

− ٣ ، ٣

مثال جد مجموعة قيم ك التي تجعل ٢ س^{٢} + ك ص^{٢} = ٨ تمثل قطعا ناقصا .

الحل ٢ ك > ٠ ⟵ ك > ٠

مثال جد مجموعة قيم م التي تجعل المعادلة $\frac{س^{٢}}{٧ - م} + \frac{ص^{٢}}{٤ - م} = ١$ تمثل معادلة قطع زائد .

الحل (٧ − م) (٤ − م) < ٠

٤ < م < ٧

(٧ − م) (٤ − م) = ٠

+ + | − − − | + +

٤ ، ٧

أمثلة متنوعة على المحل الهندسي

مثال جد معادلة المحل الهندسي للنقطة ن (س ، ص) المتحركة في المستوى والتي تبعد بعدا ثابتا قدره (٥) وحدات عن النقطة م (⁻١ ، ⁻٢)

الحل المحل الهندسي هو دائرة مركزها (⁻١ ، ⁻٢) ونصف قطرها (٥) .

∴ معادلة الدائرة : (س + ١)^{٢} + (ص + ٢)^{٢} = ٢٥

مثال بين أن معادلة المحل الهندسي للنقطة ن (س ، ص) المتحركة في المستوى والتي بعدها عن النقطة م (٦ ، ٠) يساوي مثلي بعدها عن النقطة و (٠ ، ٦) تمثل دائرة .

الحل

ن م = ٢ (ن و)

$\sqrt{(س - ٦)^{٢} + (ص - ٠)^{٢}} = ٢ \sqrt{(س - ٠)^{٢} + (ص - ٦)^{٢}}$

(س − ٦)^{٢} + ص^{٢} = ٤ س^{٢} + ٤ (ص − ٦)^{٢}

س^{٢} − ١٢ س + ٣٦ + ص^{٢} = ٤ س^{٢} + ٤ ص^{٢} − ٤٨ ص + ١٤٤

٣ س^{٢} + ٣ ص^{٢} + ١٢ س − ٤٨ ص − ١٠٨ = ٠

(وهي معادلة دائرة لأنها معادلة من الدرجة الثانية بمتغيرين ومعامل س^{٢} يساوي معامل ص^{٢} ويساوي ٣ وخالية من الحد س ص)

مثال جد معادلة المحل الهندسي للنقطة ن (س ، ص) المتحركة في المستوى والتي يكون بعدها عن النقطة ب (⁻١ ، ١) مساويا دائما لبعدها عن المستقيم س = ٢ .

الحل المحل الهندسي هو قطع مكافىء بؤرته (⁻١ ، ١) ودليله المستقيم س = ٢ .

(اتجاه فتحة القطع لليسار)

٢ جـ = ٢ − ⁻١ ⟵ جـ = $\frac{٣}{٢}$

رأس القطع المكافىء : $(-1 + \frac{٣}{٢} ، ١) = (\frac{١}{٢} ، ١)$

معادلة القطع المكافىء : $(ص - ١)^٢ = -٦ (س - \frac{١}{٢})$

مثال اثبت أن معادلة المحل الهندسي للنقطة ن (س ، ص) المتحركة في المستوى والتي يكون إحداثيها الصادي مساويا دائما لبعدها عن النقطة الثابتة أ (د ، هـ) هي معادلة قطع مكافئ ثم جد رأس هذا القطع المكافىء .

الحل

ن أ = ص

$\sqrt{(س - د)^٢ + (ص - هـ)^٢} = ص$

$(س - د)^٢ + (ص - هـ)^٢ = ص^٢$

$س^٢ - ٢ د س + د^٢ + ص^٢ - ٢ هـ ص + هـ^٢ = ص^٢$

$س^٢ - ٢ د س + د^٢ = ٢ هـ ص - هـ^٢$

$(س - د)^٢ = ٢ هـ (ص - \frac{هـ}{٢})$ وهي معادلة قطع مكافىء

رأس القطع المكافىء : $(د ، \frac{هـ}{٢})$

مثال جد معادلة المحل الهندسي للنقطة ن (س ، ص) والتي تتحرك في المستوى بحيث يكون مجموع بعديها عن النقطتين الثابتتين $ب_١ (٠ ، ٤)$ ، $ب_٢ (٠ ، -٢)$ يساوي دائما (١٠) وحدات .

الحل المحل الهندسي هو قطع ناقص بؤرتاه $ب_١ (٠ ، ٤)$ ، $ب_٢ (٠ ، -٢)$ وطول محوره الأكبر = ١٠ وحدات . (القطع عمودي)

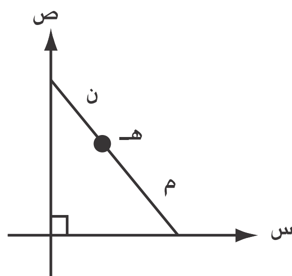
المركز : $(\frac{٠ + ٠}{٢} ، \frac{٤ + -٢}{٢}) = (٠ ، ١)$

$٢ أ = ١٠ \longrightarrow أ = ٥$ ، $٢ جـ = ٤ - -٢ = ٦ \longrightarrow جـ = ٣$

$جـ^٢ = أ^٢ - ب^٢ \longrightarrow ٩ = ٢٥ - ب^٢ \longrightarrow ب^٢ = ١٦$

∴ معادلة القطع هي : $\frac{(ص - ١)^٢}{٢٥} + \frac{س^٢}{١٦} = ١$

مثال تتحرك قطعة مستقيمة طولها م + ن بحيث يبقى طرفاها على المحورين الإحداثيين (انظر الشكل المجاور) اثبت أنه إذا كانت م ≠ ن فإن المحل الهندسي لحركة النقطة هـ هو قطع ناقص .



(الحل) $\triangle$ ع ل هـ ، $\triangle$ هـ و ي متشابهان

لأن ق $\measuredangle$ ع ل هـ = ق $\measuredangle$ هـ و ي

ق $\measuredangle$ ل ع هـ = ق $\measuredangle$ ي هـ و

$\leftarrow \frac{س}{ع ل} = \frac{ن}{م}$

(من تطبيق نظرية فيثاغورس على $\triangle$ ع ل هـ

$\leftarrow$ ع ل = $\sqrt{م^2 - ص^2}$)

$\leftarrow \frac{س}{\sqrt{م^2 - ص^2}} = \frac{ن}{م} \leftarrow$ م س = ن $\sqrt{م^2 - ص^2}$

بتربيع الطرفين $\leftarrow$ $م^2 س^2 = ن^2 م^2 - ن^2 ص^2$

$\leftarrow م^2 س^2 + ن^2 ص^2 = ن^2 م^2 \leftarrow \frac{س^2}{ن^2} + \frac{ص^2}{م^2} = ١$

إذا كان $ن^2 > م^2$ فالقطع الناقص أفقي .

إذا كان $ن^2 < م^2$ فالقطع الناقص عمودي .

مثال جد معادلة المحل الهندسي للنقطة ن (س ، ص) والتي تتحرك في المستوى بحيث يكون الفرق المطلق بين بعدي النقطة ن (س ، ص) عن النقطتين الثابتتين $ب_١$ (٠ ، ٥) ، $ب_٢$ (٠ ، $^-$٥) يساوي دائما (٨) وحدات .

(الحل) المحل الهندسي هو قطع زائد بؤرتاه : $ب_١$ (٠ ، ٥) ، $ب_٢$ (٠ ، $^-$٥)

وطول محوره القاطع = ٨ وحدات . (المحور القاطع ينطبق على محور الصادات)

المركز: (٠ ، ٠) ، ٢ جـ = ١٠ $\leftarrow$ جـ = ٥ ، ٢ أ = ٨ $\leftarrow$ أ = ٤

$جـ^2 = أ^2 + ب^2 \leftarrow ٢٥ = ١٦ + ب^2 \leftarrow ب^2 = ٩$

$\therefore$ معادلة القطع الزائد : $\frac{ص^2}{١٦} - \frac{س^2}{٩} = ١$

مثال اثبت أن المحل الهندسي للنقطة ن (س ، ص) المتحركة في المستوى والتي بعدها عن المستقيم س = ١ يساوي دائما نصف بعدها عن النقطة م (٤ ، ٠) هو قطع زائد .

(الحل) بعد النقطة ن عن المستقيم س = ١ = $\frac{١}{٢}$ بعد النقطة ن عن النقطة م

$\frac{|(١) س - ١|}{\sqrt{١^2 + ٠^2}} = \frac{١}{٢} \sqrt{(س - ٤)^2 + (ص - ٠)^2}$

بتربيع الطرفين $\leftarrow (س - ١)^2 = \frac{١}{٤} ((س - ٤)^2 + ص^2)$

$\leftarrow ٤ (س - ١)^2 = (س - ٤)^2 + ص^2$

← ٤ $س^٢$ _ ٨ س + ٤ = $س^٢$ _ ٨ س + ١٦ + $ص^٢$

← ٣ $س^٢$ _ $ص^٢$ _ ١٢ = ٠   وهذه معادلة قطع زائد

مثال جد معادلة المحل الهندسي للنقطة أ (س ، ص) المتحركة في المستوى بحيث تبعد بعدا ثابتا مقداره ٣ وحدات عن المستقيم ص = ⁻١، وتمر في أثناء حركتها بالنقطة ب (٠ ، ⁻٤) .

الحل

$\frac{|(١) ص + ١|}{\sqrt{٠^٢ + ١^٢}}$ = ٣ ← | ص + ١| = ٣

إما ص + ١ = ٣   أو   ص + ١ = ⁻٣

ص = ٢   ص = ⁻٤

لا يمر بالنقطة (٠ ، ⁻٤)   يمر بالنقطة (٠ ، ⁻٤)

∴ معادلة المحل الهندسي هي : ص = ⁻٤

مثال جد معادلة المحل الهندسي لنقطة تتحرك في المستوى على بعدين متساويين من النقطتين الثابتتين أ (٢ ، ٠) ، ب (⁻٢ ، ٠) .

الحل

افرض النقطة المتحركة ن (س ، ص)

ن أ = ن ب

$\sqrt{(س - ٢)^٢ + (ص - ٠)^٢}$ = $\sqrt{(س + ٢)^٢ + (ص - ٠)^٢}$

وبتربيع الطرفين ← $(س - ٢)^٢$ + $ص^٢$ = $(س + ٢)^٢$ + $ص^٢$

$س^٢$ _ ٤ س + ٤ + $ص^٢$ = $س^٢$ + ٤ س + ٤ + $ص^٢$

٨ س = ٠ ← س = ٠   وهي معادلة محور الصادات .

مثال جد معادلة المحل الهندسي لنقطة تتحرك في المستوى على بعدين متساويين من المحورين الإحداثيين .

الحل

افرض النقطة المتحركة ن (س ، ص)

بعد النقطة عن محور السينات = بعد النقطة عن محور الصادات

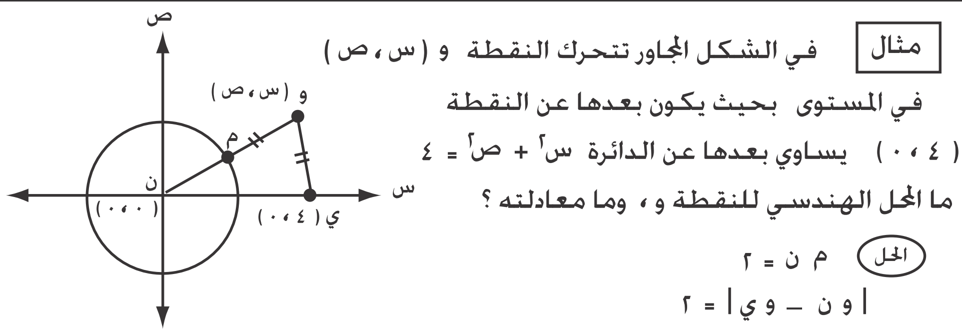
$\frac{|(١) ص|}{\sqrt{٠^٢ + ١^٢}}$ = $\frac{|(١) س|}{\sqrt{١^٢ + ٠^٢}}$

معادلة محور السينات ص = ٠
معادلة محور الصادات س = ٠

← | ص | = | س |

ص = س ، ص = ـ س

مثال في الشكل المجاور تتحرك النقطة و (س ، ص) في المستوى بحيث يكون بعدها عن النقطة (٤ ، ٠) يساوي بعدها عن الدائرة $س^٢ + ص^٢ = ٤$ ما المحل الهندسي للنقطة و ، وما معادلته ؟



الحل م ن = ٢

| و ن – و ي | = ٢

∴ المحل الهندسي للنقطة و هو قطع زائد بؤرتاه (٤ ، ٠) ، (٠ ، ٠)

وطول محوره القاطع ٢ أ = ٢ ⟵ أ = ١ ، ٢ جـ = ٤ ⟵ جـ = ٢

المحور القاطع ينطبق على محور السينات .

$جـ^٢ = أ^٢ + ب^٢$ ⟵ $٤ = ١ + ب^٢$ ⟵ $ب^٢ = ٣$

∴ معادلة القطع الزائد : $(س – ٢)^٢ – \frac{ص^٢}{٣} = ١$

مثال جد معادلة المحل الهندسي للنقطة ن (س ، ص) التي تتحرك في المستوى بحيث إن بعدها عن المستقيم س = ٩ يساوي ثلاثة أمثال بعدها عن النقطة ب (١ ، ٠) .

الحل بعد النقطة ن عن المستقيم س = ٩ = ٣ * بعد النقطة ن عن النقطة ب

$\frac{|(١) س – ٩|}{\sqrt{١^٢ + ٠^٢}} = ٣ \sqrt{(س – ١)^٢ + (ص – ٠)^٢}$

بتربيع الطرفين ⟵ $(س – ٩)^٢ = ٩ ((س – ١)^٢ + ص^٢)$

$(س – ٩)^٢ = ٩ (س – ١)^٢ + ٩ ص^٢$

⟵ $س^٢ – ١٨ س + ٨١ = ٩ س^٢ – ١٨ س + ٩ + ٩ ص^٢$

⟵ $٨ س^٢ + ٩ ص^٢ – ٧٢ = ٠$ وهذه معادلة قطع ناقص .

مثال لتكن ب (أ هـ ، ٠) نقطة في المستوى الديكارتي ، ل مستقيما ثابتا في المستوى نفسه غير مار بالنقطة ب ومعادلته $س = \frac{أ}{هـ}$ ، حيث أ ، هـ عددان موجبان ، هـ < ١ ، والمطلوب :

١) أوجد معادلة المحل الهندسي لمجموعة النقط و (س ، ص) المتحركة في المستوى بحيث أن بعد النقطة (و) عن النقطة (ب) يساوي هـ × بعد النقطة (و) عن المستقيم ل .

٢) ما اسم الشكل الهندسي الذي تمثله معادلة المحل الهندسي لمجموعة النقط و (س ، ص) .

الحل

و ب = هـ × بعد النقطة (و) عن المستقيم ل .

$$\sqrt{(س - أ هـ)^2 + (ص - ٠)^2} = هـ \times \frac{|س - \frac{أ}{هـ}|}{\sqrt{١^2 + ٠^2}}$$

$$(س - أ هـ)^2 + ص^2 = هـ^2 (س - \frac{أ}{هـ})^2$$

$$س^2 - ٢ أ هـ س + أ^2 هـ^2 + ص^2 = هـ^2 (س^2 - \frac{٢ أ}{هـ} س + \frac{أ^2}{هـ^2})$$

$$س^2 - ٢ أ هـ س + أ^2 هـ^2 + ص^2 = هـ^2 س^2 - ٢ أ هـ س + أ^2$$

$$س^2 - هـ^2 س^2 + ص^2 + أ^2 هـ^2 - أ^2 = ٠$$

$$س^2 (١ - هـ^2) + ص^2 + أ^2 هـ^2 - أ^2 = ٠$$

هـ > ١ ⟵ هـ^2 > ١ ⟵ −هـ^2 < −١
⟵ ١ − هـ^2 < ٠

∴ المعادلة تمثل قطعا زائدا .

مثال تتحرك النقطة و (س ، ص) في المستوى بحيث س = ٥ + ٣ جا هـ ، ص = ٢ + ٣ جتا هـ ، حيث هـ زاوية متغيرة . جد معادلة المحل الهندسي للنقطة و (س ، ص) وبين نوعه .

الحل

س = ٥ + ٣ جا هـ ⟵ جا هـ = $\frac{س - ٥}{٣}$

، ص = ٢ + ٣ جتا هـ ⟵ جتا هـ = $\frac{ص - ٢}{٣}$

جا^{2}هـ + جتا^{2}هـ = ١ ⟵ $\frac{(س - ٥)^2}{٩} + \frac{(ص - ٢)^2}{٩} = ١$

⟵ $(س - ٥)^2 + (ص - ٢)^2 = ٩$ وهذه معادلة دائرة .

مثال إذا كانت س = ١ + ٢ قتا ن ، ص = −٢ + ٣ ظتا ن حيث ٠ < ن < $\frac{\pi}{٢}$ فأوجد معادلة المحل الهندسي للنقطة (س ، ص) وبين نوعه .

الحل

قتا ن = $\frac{س - ١}{٢}$ ⟵ قتا^{2}ن = $\frac{(س - ١)^2}{٤}$

ظتا ن = $\frac{ص + ٢}{٣}$ ⟵ ظتا^{2}ن = $\frac{(ص + ٢)^2}{٩}$

قتا^{2}ن = ١ + ظتا^{2}ن ⟵ $\frac{(س - ١)^2}{٤} = ١ + \frac{(ص + ٢)^2}{٩}$

∴ $\frac{(س - ١)^2}{٤} - \frac{(ص + ٢)^2}{٩} = ١$ وهذه معادلة قطع زائد (الرسمة جزء من قطع زائد)

مثال تتحرك النقطة و (س ، ص) في المستوى الديكارتي حيث س = $\sqrt{٢}$ جا ن ص = ١ + جتا ٢ ن . أوجد المعادلة الديكارتية (بدلالة س ، ص فقط) للشكل الذي ترسمه

النقطة في حركتها . ما اسم ذلك الشكل ؟

الحل

$س = \sqrt{٢}$ جا ن ⟵ $س^٢ = ٢$ جا^{٢}ن .... (١)

$ص = ١ +$ جتا ٢ ن $= ١ + ١ - ٢$ جا^{٢}ن ⟵ $ص = ٢ - ٢$ جا^{٢}ن .... (٢)

بجمع المعادلتين (١) و (٢) ⟵ $س^٢ + ص = ٢$ ⟵ $س^٢ = -(ص - ٢)$

وهذه معادلة قطع مكافىء .

مثال تتحرك النقطة و (س ، ص) في المستوى الديكارتي ، بحيث يتحدد موقعها في اللحظة $ن \geq ٠$ ، بالمعادلتين : س = جتا ن − جا ن ، ص = جا ٢ ن ، جد معادلة مسار النقطة و ، ثم بين نوع هذا المسار .

الحل

$س^٢ =$ جتا^{٢}ن $- ٢$ جا ن جتا ن + جا^{٢}ن

$= ١ -$ جا ٢ ن

$= ١ - ص$ ⟵ $س^٢ = -(ص - ١)$ وهذه معادلة قطع مكافىء .

مثال تتحرك نقطة ن (س ، ص) في المستوى الديكارتي بحيث يتحدد موقعها بالمعادلتين :

س = جا هـ + جتا هـ ، $ص = ٢\sqrt{\text{جا هـ جتا هـ}}$ حيث هـ زاوية متغيرة ، أثبت أن النقطة ن (س ، ص) تتحرك على منحنى قطع زائد .

الحل

$س^٢ =$ جتا^{٢}هـ $+ ٢$ جا هـ جتا هـ + جا^{٢}هـ $= ١ + ٢$ جا هـ جتا هـ

$ص^٢ = ٤$ جا هـ جتا هـ ⟵ $\frac{ص^٢}{٢} = ٢$ جا هـ جتا هـ

∴ $س^٢ = ١ + \frac{ص^٢}{٢}$ ⟵ $س^٢ - \frac{ص^٢}{٢} = ١$ وهذه معادلة قطع زائد
(والرسمة جزأ من قطع زائد).

مثال تتحرك النقطة و (س ، ص) في المستوى بحيث يتحدد موقعها بالمعادلتين :

س = ٥ + ٣ جا هـ ، ص = ٢ + ٢ جتا هـ ، حيث هـ زاوية متغيرة . بين أن النقطة و (س ، ص) تتحرك على منحنى قطع ناقص، ثم عين عناصره .

الحل

س = ٥ + ٣ جا هـ ⟵ جا هـ $= \frac{س - ٥}{٣}$

، ص = ٢ + ٢ جتا هـ ⟵ جتا هـ $= \frac{ص - ٢}{٢}$

جا^{٢}هـ + جتا^{٢}هـ $= ١$ ⟵ $\frac{(س - ٥)^٢}{٩} + \frac{(ص - ٢)^٢}{٤} = ١$ وهذه معادلة قطع ناقص أفقي

المركز (٥ ، ٢) ، $أ^٢ = ٩$ ⟵ $أ = ٣$ ، $ب^٢ = ٤$ ⟵ $ب = ٢$

$جـ^٢ = ٩ - ٤ = ٥$ ⟵ $جـ = \sqrt{٥}$

الرأسان : (٥ ± ٣ ، ٢) = (٨ ، ٢) ، (−٢ ، ١)

البؤرتان : (٥ ± $\sqrt{٥}$ ، ٢) = (٥ + $\sqrt{٥}$ ، ٢) ، (٥ − $\sqrt{٥}$ ، ٢)

طرفا المحور الأصغر : (٥ ، ٢ ± ٢) = (٥ ، ٤) ، (٥ ، ٠)

معادلة المحور الأكبر : ص = ٢ وطوله ٢ أ = ٢ (٣) = ٦

معادلة المحور الأصغر : س = ٥ وطوله ٢ ب = ٢ (٢) = ٤

البعد البؤري = ٢ جـ = ٢ $\sqrt{٥}$ ، الاختلاف المركزي هـ = $\frac{جـ}{أ}$ = $\frac{\sqrt{٥}}{٣}$

أمثلة إضافية على القطوع المخروطية

مثال رسم من النقطة (٥ ، ٢) الواقعة على دائرة قطر للدائرة، ومن نقطة نهاية القطر الأخرى رسم مماس للدائرة ، فإذا كانت معادلة المماس هي س ـ ٢ ص + ٤ = ٠ فاكتب معادلة الدائرة .

الحل (باشتقاق معادلة المماس : ١ ـ ٢ ص َ = ٠ ⟵ ص َ = $\frac{١}{٢}$)

ميل المماس = $\frac{١}{٢}$ ⟵ ميل القطر = −٢

معادلة القطر : ص ـ ٢ = −٢ (س ـ ٥) ⟵ ص + ٢ س ـ ١٢ = ٠ .

وبحل معادلة المماس مع معادلة القطر : − ٢ (س ـ ٢ ص + ٤ = ٠)

\+ ص + ٢ س ـ ١٢ = ٠ .

٥ ص ـ ٢٠ = ٠ ⟵ ص = ٤

وبتعويض ص = ٤ في معادلة القطر ⟵ ٤ + ٢ س ـ ١٢ = ٠ .

⟵ س = ٤

∴ إحداثيات نهاية القطر الأخرى هي (٤ ، ٤)

مركز الدائرة = ($\frac{٥ + ٤}{٢}$ ، $\frac{٢ + ٤}{٢}$) = (٤,٥ ، ٣)

$نق^{٢}$ = (٥ ـ ٤,٥)^{٢} + (٢ ـ ٣)^{٢} = ١,٢٥

∴ معادلة الدائرة : (س ـ ٤,٥)^{٢} + (ص ـ ٣)^{٢} = ١,٢٥

مثال أوجد معادلة الدائرة التي تمس كلا من محور السينات والمستقيم ص = ٨ إذا كان الإحداثي السيني لمركزها يساوي ضعف الإحداثي الصادي لمركزها .

الحل بما أن الدائرة تمس مستقيمين متوازيين المسافة بينهما ٨ وحدات فإن نصف قطر الدائرة = ٤ وحدات و الإحداثي الصادي للمركز = ٤ .

∴ الإحداثي السيني للمركز = ٨ .

مركز الدائرة = (٨ ، ٤)

∴ معادلة الدائرة : $(س - ٨)^{٢} + (ص - ٤)^{٢} = ١٦$

مثال لتكن (أ ، ١) ، (١ ، ⁻٣) نهايتا قطر لدائرة تمر بنقطة الأصل .
أوجد قيمة أ ثم أوجد معادلة هذه الدائرة .

الحل مركز الدائرة = $\left(\frac{أ + ١}{٢} ، \frac{١ + ⁻٣}{٢} \right) = \left(\frac{أ + ١}{٢} ، - ١ \right)$

الصورة العامة لمعادلة الدائرة هي : $س^{٢} + ص^{٢} + ٢ ل س + ٢ ك ص + جـ = ٠$

$ل = \frac{-(أ + ١)}{٢}$ ، ك = ١

فتصبح معادلة الدائرة : $س^{٢} + ص^{٢} - (أ + ١) س + ٢ ص + جـ = ٠$

(٠ ، ٠) تحقق معادلة الدائرة ← $(٠)^{٢} + (٠)^{٢} - (أ + ١)(٠) + ٢(٠) + جـ = ٠$

← جـ = ٠

(١ ، ⁻٣) تحقق معادلة الدائرة ← $(١)^{٢} + (-٣)^{٢} - (أ + ١)(١) + ٢(-٣) = ٠$

← أ = ٣

∴ معادلة الدائرة : $س^{٢} + ص^{٢} - ٤ س + ٢ ص = ٠$

مثال أوجد معادلة القطع الناقص الذي يشترك مع القطع المكافىء الذي معادلته :
$س^{٢} + ٨ ص = ٩٦$ بأحد رأسيه وبإحدى بؤرتيه وتكون بؤرته الأخرى في نقطة الأصل .

الحل للقطع المكافىء $س^{٢} = - ٨ (ص - ١٢)$ « اتجاه فتحة القطع لأسفل »

الرأس (٠ ، ١٢) ، ٤ جـ = ٨ ← جـ = ٢

البؤرة (٠ ، ١٠)

بالنسبة للقطع الناقص :

البؤرتان : (٠ ، ٠) ، (٠ ، ١٠) ← المركز (٠ ، ٥) « القطع عمودي »

٢ جـ = ١٠ ← جـ = ٥

أحد الرأسين (٠ ، ١٢) ← أ = ٧

$جـ^{٢} = أ^{٢} - ب^{٢}$ ← $٢٥ = ٤٩ - ب^{٢}$ ← $ب^{٢} = ٢٤$

∴ معادلة القطع الناقص هي : $\frac{س^{٢}}{٢٤} + \frac{(ص - ٥)^{٢}}{٤٩} = ١$

مثال إذا كانت النقطة م تقع على منحنى القطع الناقص $ل^{٢} س^{٢} + (ل + ٢)^{٢} ص^{٢} = ١$ ، ل > ٠ . فجد مجموع بعدي النقطة م عن بؤرتي هذا القطع .

الحل $ل^{٢} س^{٢} + (ل + ٢)^{٢} ص^{٢} = ١$ ← $\frac{س^{٢}}{\frac{١}{ل^{٢}}} + \frac{ص^{٢}}{\frac{١}{(ل + ٢)^{٢}}} = ١$ القطع أفقي

$أ^٢ = \frac{١}{ل^٢}$ ⟵ $أ = \frac{١}{ل}$

المطلوب حسب تعريف القطع الناقص قيمة $٢أ = \frac{٢}{ل}$

مثال إذا كان الاختلاف المركزي للقطع المخروطي $\frac{س^٢}{أ^٢} + \frac{ص^٢}{ب^٢} = ١$ هو $هـ_١$

والاختلاف المركزي للقطع المخروطي $\frac{س^٢}{أ^٢} - \frac{ص^٢}{ب^٢} = ١$ هو $هـ_٢$

بين أن : $هـ_١^٢ + هـ_٢^٢ = ٢$

الحل $هـ_١ = \frac{جـ_١}{أ}$ ⟵ $هـ_١^٢ = \frac{جـ_١^٢}{أ^٢} = \frac{أ^٢ - ب^٢}{أ^٢}$

$هـ_٢ = \frac{جـ_٢}{أ}$ ⟵ $هـ_٢^٢ = \frac{جـ_٢^٢}{أ^٢} = \frac{أ^٢ + ب^٢}{أ^٢}$

$هـ_١^٢ + هـ_٢^٢ = \frac{أ^٢ - ب^٢}{أ^٢} + \frac{أ^٢ + ب^٢}{أ^٢} = \frac{٢ أ^٢}{أ^٢} = ٢$

مثال إذا كان المحور المرافق للقطع الزائد $س^٢ - \frac{ص^٢}{ل} = ١$ أطول بوحدتين من المحور الأصغر للقطع الناقص $\frac{س^٢}{١٦} + \frac{ص^٢}{٤٩} = ١$ فما قيمة ل ؟

الحل

للقطع الزائد : $س^٢ - \frac{ص^٢}{ل} = ١$ طول المحور المرافق $= ٢\sqrt{ل}$

للقطع الناقص : $\frac{س^٢}{١٦} + \frac{ص^٢}{٤٩} = ١$ طول المحور الأصغر $= ٢ (٤) = ٨$

∴ $٢\sqrt{ل} = ٨ + ٢ = ١٠$ ⟵ $\sqrt{ل} = ٥$ ⟵ $ل = ٢٥$

المصادر والمراجع :

المراجع العربية :

1 _ كتاب الحسبان الشامل في التفاضل والتكامل والهندسة التحليلية / الجزء الأول , تأليف : د . عبد المجيد نصير و د. بسام الناشف .
2 _كتاب الرياضيات للمرحلة الثانوية - الفرع العلمي / المملكة الاردنية الهاشمية .
3_ كتاب الجبر والهندسة الفراغية للمرحلة الثانية للثانوية العامة / جمهورية مصر العربية .
4 _ كتاب التكامل للمرحلة الثانية للثانوية العامة / جمهورية مصر العربية .
5 _ الرياضيات لـ كامل الناصري .

المراجع الأجنبية :

1- Calculus with analytic geometry , Richard A . Silverman.
2-Calculus , Anton ,Davis,seventh edition .
3- One and severable variables CALCULUS , SALAS .
4-3000 solved problems in calculus -Schaum by Mendelson .
5- Engineering mechanics (DYNAMICS),R.C.HIBBLER .

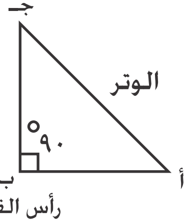
محتويات الكتاب :

مراجعة

المثلث

* المثلث هو مضلع مكون من ثلاث قطع مستقيمة مستوية .

المثلث القائم الزاوية



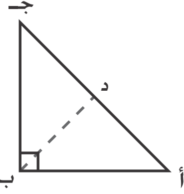
وهو المثلث الذي فيه زاوية قائمة وزاويتان حادتان .

خصائص المثلث القائم الزاوية :

١) يحقق نظرية فيثاغورس .

$$(أ جـ)^2 = (أ ب)^2 + (ب جـ)^2$$

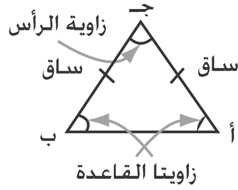
٢) طول القطعة المستقيمة الواصلة بين رأس القائمة ومنتصف الوتر يساوي نصف طول الوتر .



$$ب د = \frac{1}{2} (أ جـ)$$

المثلث المتساوي الساقين

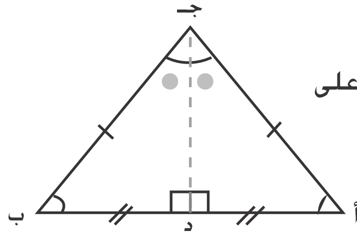
وهو المثلث الذي فيه ضلعان على الأقل متطابقان ويسمى الضلع الثالث قاعدة المثلث .



خصائص المثلث المتساوي الساقين :

١) زاويتا القاعدة متساويتان في القياس .

ق ∢ ب = ق ∢ أ



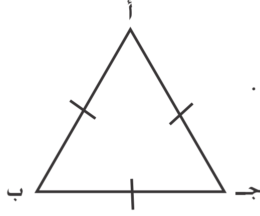
٢) العمود النازل من رأس المثلث المتطابق الضلعين على القاعدة ينصفها ، وينصف زاوية الرأس .

$\overline{جـ د} \perp \overline{أ ب}$

$\leftarrow \overline{ب د} \equiv \overline{أ د}$

ق ∢ أ جـ د = ق ∢ ب جـ د

المثلث المتساوي الأضلاع



وهو المثلث الذي تكون فيه جميع الأضلاع لها الطول نفسه .

خصائص المثلث المتساوي الأضلاع :

١) ق ∢ أ = ق ∢ ب = ق ∢ جـ = ٦٠°

نظريات وقواعد للمثلث .

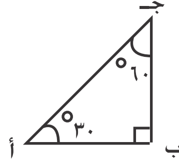
١) إذا ساوت زاويتان في مثلث زاويتين في مثلث اخر فإن قياس الزاوية الثالثة في المثلث الأول يساوي قياس الزاوية الثالثة في المثلث الثاني .

٢) الزاويتان الحادتان في المثلث القائم الزاوية متتامتان (مجموع قياسيهما = ٩٠°) .

٣) يكون مجموع طولي أي ضلعين في المثلث أكبر من طول الضلع الثالث .

٤) طول الضلع المقابل للزاوية ٣٠ في المثلث الثلاثيني الستيني يساوي طول نصف الوتر .

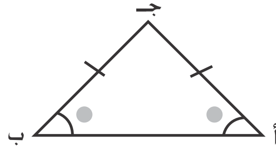
ب جـ = $\frac{١}{٢}$ (أ جـ)



٥) إذا تساوى قياس زاويتين في مثلث فإن الضلعين المقابلين لهاتين الزاويتين متساويان في الطول .

ق ∢ أ = ق ∢ ب

⟵ أ جـ = ب جـ



٦) منصفات زوايا المثلث تتلاقى في نقطة واحدة .

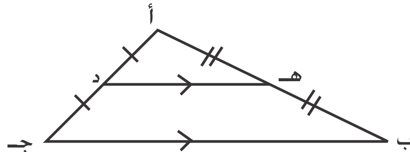
٧) الأعمدة المقامة من منتصفات أضلاع المثلث تلتقي في نقطة واحدة .

٨) تتساوى أبعاد رؤوس المثلث عن نقطة التقاء الأعمدة المنصفة لأضلاعه .

٩) القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين في مثلث توازي الضلع الثالث وطولها يساوي نصف طول الضلع الثالث .

$\overline{\text{هـ د}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

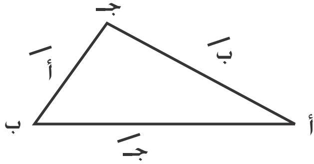
هـ د = $\frac{١}{٢}$ (ب جـ)



١٠) محيط المثلث = مجموع أطوال أضلاعه .

في الشكل المجاور محيط △ أ ب جـ

= أ ب + ب جـ + جـ أ



١١) مساحة المثلث .

= $\frac{١}{٢}$ (طول القاعدة) * (الارتفاع)

= نصف حاصل ضرب طولي أي ضلعين فيه مضروبا بجيب الزاوية المحصورة بينهما .

ففي الشكل أعلاه تكون :

مساحة △ أ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ (أ ب)(د جـ)

= $\frac{١}{٢}$ (أ ب)(ب جـ) جا هـ

١٢) قانون الجيب :

في أي مثلث تكون النسبة بين طول أي ضلع وجيب الزاوية المقابله له ثابتة .

$\frac{\bar{أ}}{جا أ} = \frac{\bar{ب}}{جا ب} = \frac{\bar{جـ}}{جا جـ}$

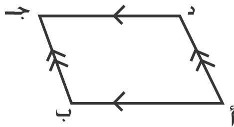
١٣) قانون جيب التمام :

في أي مثلث أ ب جـ يكون :

$\bar{أ}^{٢} = \bar{ب}^{٢} + \bar{جـ}^{٢} - ٢\ \bar{ب} * \bar{جـ}$ جتا أ

متوازي الأضلاع

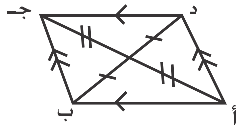
<u>متوازي الأضلاع</u> : هو مضلع رباعي فيه كل ضلعين متقابلين متوازيان .



*خصائص متوازي الأضلاع :

١) كل ضلعين متقابلين فيه متساويان في الطول .

٢) كل زاويتين متقابلتين فيه متساويتان في القياس .



٣) قطراه ينصف كل منهما الاخر .

٤) كل زاويتين متتاليتين فيه متكاملتين
(مجموع قياسيهما = ١٨٠°)

* يكون المضلع الرباعي متوازي أضلاع في أي من الحالات الاتية :

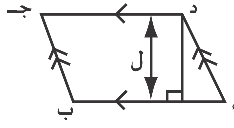
١) إذا كان فيه كل ضلعين متقابلين متوازيين .

٢) إذا كان فيه كل ضلعين متقابلين متساويان في الطول .

٣) إذا كانت فيه كل زاويتين متقابلتين متساويتين في القياس .

٤) إذا كان قطراه ينصف كل منهما الاخر .

٥) إذا توازى وتساوى فيه ضلعان متقابلان .

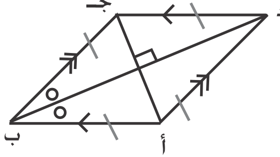


* مساحة متوازي الأضلاع = طول القاعدة * الارتفاع
= أ ب * ل

حالات خاصة لمتوازي الأضلاع :

١) المعين : هو متوازي أضلاع فيه ضلعان متجاوران متساويان في الطول .

خصائص المعين : أ) له جميع خصائص متوازي الأضلاع .



ب) قطرا المعين متعامدان .

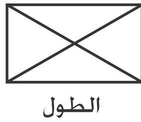
جـ) القطران ينصفان زوايا الرأس .

د) أطوال أضلاعه الأربعة متساوية .

هـ) مساحة المعين = طول القاعدة * الارتفاع .
أو نصف حاصل ضرب طولي قطريه .

---

٢) المستطيل : هو متوازي أضلاع إحدى زواياه قائمة .



خصائص المستطيل : أ) له جميع خصائص متوازي الأضلاع .

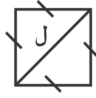
ب) زوايا المستطيل الأربع قوائم .

جـ) قطرا المستطيل متساويان في الطول .

د) مساحة المستطيل = الطول * العرض .

---

٣) المربع : هو متوازي أضلاع إحدى زواياه قائمة وفيه ضلعان متجاوران متساويان في الطول وهو حالة خاصة من المستطيل والمعين .
فالمربع هو مستطيل فيه ضلعان متجاوران متساويان في القياس وهو معين إحدى زواياه قائمة .

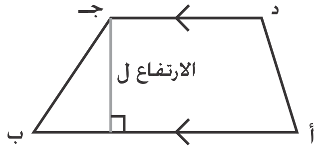


خصائص المربع : أ) له جميع خصائص متوازي الأضلاع والمستطيل والمعين .

ب) مساحة المربع = طول الضلع * نفسه .

أو = $\frac{1}{2}$ ل^{2} (ل : طول قطر المربع)

شبه المنحرف هو مضلع رباعي فيه ضلعان متوازيان فقط ، كل واحد منهما يسمى قاعدة ، وضلعان اخران غير متوازيين كل واحد منهم يسمى ساقا .



*مساحة شبه المنحرف = $\frac{1}{2}$ (مجموع طولي قاعدتيه) * الارتفاع

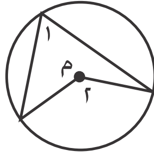
*طول القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي الضلعين غير المتوازيين في شبه المنحرف ،يساوي نصف مجموع طولي القاعدتين المتوازيتين فيه .

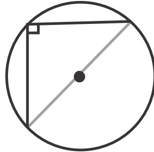
نظريات وقواعد خاصة بهندسة الدائرة :

١) قياس الزاوية المركزية يساوي ضعف قياس الزاوية المحيطية المرسومة معها على القوس نفسه .

ففي الشكل المجاور دائرة مركزها م يكون فيها :

ق ∢ ٢ = ٢ ق ∢ ١



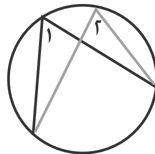


الزاوية المحيطية المرسومة على قطر الدائرة قائمة .

٢) الزاويتان المحيطيتان المرسومتان على قوس واحد في الدائرة لهما القياس نفسه .

ففي الشكل المجاور دائرة يكون فيها :

ق ∢ ١ = ق ∢ ٢

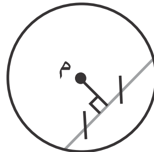


وبصورة عامة فإن : الزوايا المحيطية المرسومة على أوتار متطابقة أو أقواس متطابقة تكون متطابقة .

٣) _ العمود النازل من مركز دائرة على أي وتر فيها ينصفه .

_ المستقيم الواصل بين مركز دائرة ومنتصف وتر فيها غير مار بالمركز ، يكون عموديا على الوتر .

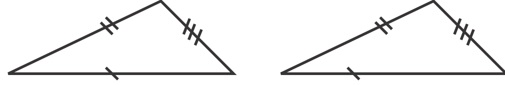
_ العمود المقام من منتصف وتر في دائرة يمر بمركز الدائرة .



تطابق المثلثات

يتطابق المثلثان في الحالات الاتية :

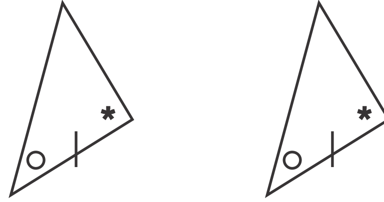
١) إذا كانت أضلاعهما المتناظرة متطابقة .



٢) إذا كان الضلعان والزاوية التي يحصرانها في أحد المثلثين تطابق نظيراتها في المثلث الاخر .



٣) إذا تطابقت زاويتان والضلع الواصل بين رأسيهما في المثلث الأول مع زاويتين والضلع الواصل بين رأسيهما في المثلث الثاني .



٤) يتطابق المثلثان القائما الزاوية إذا تطابق في أحدهما وتر وضلع مع نظرائهما في المثلث الاخر .

تشابه المثلثات

يتشابه المثلثان في الحالات الاتية :

١) إذا طابقت زاويتان في أحدهما الزاويتين المناظرتين لهما في الاخر .

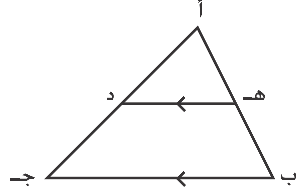
٢) إذا تناسبت أطوال أضلاعهما المتناظرة .

(يتناسب طولا ضلعين إذا كانت النسبة بين طوليهما ثابتة)

٣) إذا تناسب طولا ضلعين في مثلث مع طولي الضلعين المناظرين لهما في مثلث اخر ، وكانت الزاوية المحصورة بين الضلعين في المثلث الأول تطابق الزاوية المناظرة لها في المثلث الثاني .

وينتج من تشابه المثلثين : ١) الزوايا المتناظرة متساوية في القياس .
٢) الأضلاع المتناظرة متناسبة .

قاعدة : إذا رسمت قطعة مستقيمة تصل بين ضلعين في مثلث وتوازي الضلع الثالث فإن المثلثين الناتجين متشابهان .



ففي الشكل المجاور △ أ ب جـ يشابه △ أ هـ د

$$\leftarrow \frac{\text{أ هـ}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{أ د}}{\text{أ جـ}} = \frac{\text{هـ د}}{\text{ب جـ}}$$

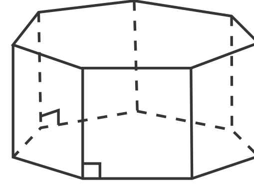
ومن خواص التناسب نحصل على التناسب الاتي :

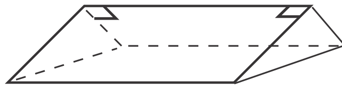
$$\frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ ب}} = \frac{\text{أ د}}{\text{د جـ}}$$

بعض المجسمات الشهيرة

المنشور القائم : مجسم له قاعدتان متوازيتان ومتطابقتان كل منها على شكل سطح مستو ومضلع وأوجهه الجانبية مستطيلات .

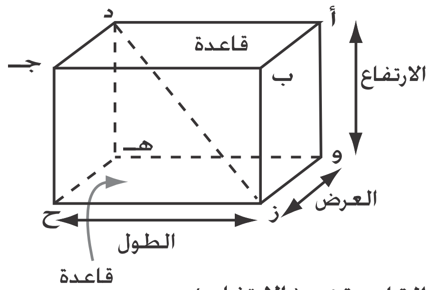
ويسمى حسب عدد أضلاع قاعدته ، فإذا كانت قاعدته مثلثا نسميه منشورا ثلاثيا ، وإذا كانت قاعدته مربعا أو مستطيلا نسميه منشورا رباعيا .... وهكذا .


منشور سباعي قائم

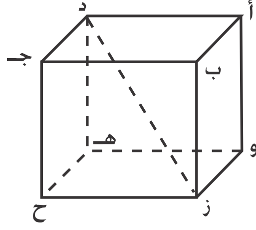

منشور ثلاثي قائم

حالات خاصة من المنشور القائم :

١) متوازي المستطيلات .



_ له (٦) أوجه مستطيلة الشكل وكل وجهين متقابلين متوازيان و متطابقان .
_ له (١٢) حرفا (ضلعا) .
_ له (٨) رؤوس .
_ المساحة الجانبية لمتوازي المستطيلات = (محيط القاعدة) * (الارتفاع)
_ المساحة الكلية لمتوازي المستطيلات = المساحة الجانبية + مجموع مساحتي القاعدتين .
_ حجم متوازي المستطيلات = (الطول) * (العرض) * (الارتفاع)
_ قطر متوازي المستطيلات : القطعة المستقيمة الواصلة بين رأسين ليسا في وجه واحد .



٢) المكعب (حالة خاصة من متوازي المستطيلات).

_ له (٦) أوجه جميعها مربعات متطابقة .

_ له (١٢) حرفا (ضلعا) جميعها متساوية في الطول .

_ له (٨) رؤوس .

_ المساحة الجانبية للمكعب = ٤ (طول الضلع)^{٢}

_ المساحة الكلية للمكعب = ٦ (طول الضلع)^{٢}

_ حجم المكعب = (طول الضلع)^{٣}

_ قطر المكعب : القطعة المستقيمة الواصلة بين رأسين ليسا في وجه واحد .

الهرم

الهرم : هو مجسم له قاعدة مضلعة (قاعدة الهرم) وأوجهه الجانبية مثلثات لها رأس مشترك (رأس الهرم) .

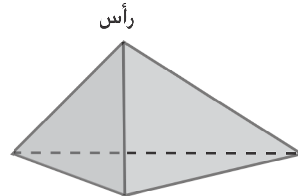
ويسمى الهرم حسب عدد أضلاع قاعدته فإن كانت مثلثا سمي هرما ثلاثيا وإن كانت مستطيلا سمي هرما رباعيا ... وهكذا .

ارتفاع الهرم : طول العمود النازل من رأس الهرم على مستوى قاعدته .

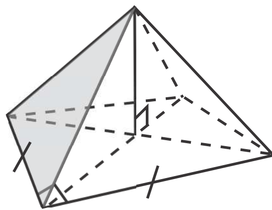
الهرم القائم المنتظم : هو هرم قائم قاعدته مضلع منتظم .» تكون أوجهه الجانبية مثلثات متطابقة « .

قائم : يكون فيه المسقط العمودي للرأس على مستوى القاعدة منطبقا على المركز الهندسي للقاعدة .

المضلع المنتظم : مضلع تساوت قياسات زواياه وتساوت أطوال أضلاعه .



هرم ثلاثي


هرم رباعي قائم منتظم

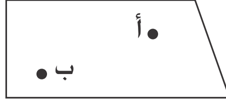
الهندسة الفضائية

البناء الرياضي للهندسة الفضائية

سبق لك معرفة بعض المفاهيم الأساسية من خلال دراستك للهندسة المستوية مثل : النقطة والمستقيم والمستوى .

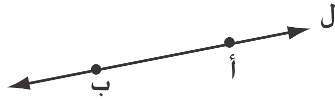
النقطة : وتتحدد بموقع ليس له أبعاد (طول، عرض، ارتفاع) ونرمز لها بأحد أحرف الهجاء أ ، ب ، جـ . . . .

انظر الشكل المجاور



المستقيم : يتكون من مجموعة من النقط غير المنتهية الواقعة على استقامة واحدة يمتد من طرفيه إلى مالانهاية وهو ذو بعد واحد ،
ويرمزله ١) بأحد أحرف الهجاء أو ٢) بنقطتين واقعتين عليه .

الشكل المجاور يمثل المستقيم (ل)

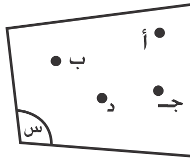


أو $\overleftrightarrow{\text{ب أ}}$ أو $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$

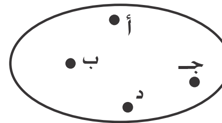
* ويستخدم الرمز $\overline{\text{أ ب}}$ للدلالة على القطعة المستقيمة أ ب .
ويستخدم الرمز أ ب للدلالة على طول القطعة المستقيمة أ ب .

المستوى : سطح منبسط ذو بعدين يمتد بلا حدود من جميع جهاته ويمثل هندسيا بمنطقة رباعية أو ثلاثية أو دائرة ... إلخ .
ونرمز له بأحد أحرف الهجاء أو ثلاثة (أربعة) أحرف تمثل ثلاث (أربع) نقط عليه ليست على استقامه واحدة .

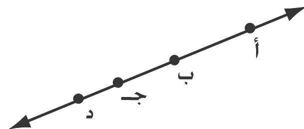
الشكل المجاور يمثل المستوى س
أو المستوى أ ب جـ
أو المستوى أ ب جـ د



تعريف : إذا وقعت مجموعة نقط على مستقيم واحد تسمى نقاطا مستقيمة وإذا وقعت في مستوى واحد تسمى نقاطا مستوية .



أ ، ب ، جـ ، د نقاط مستوية



أ ، ب ، جـ ، د نقاط مستقيمة

الفضاء : مجموعة غير منتهية من النقاط وتكون الخطوط والمستقيمات والمستويات والسطوح والأجسام مجموعات جزئية من الفضاء .

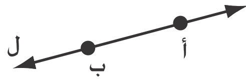
الهندسة الفضائية : علم يبحث في خواص هذه الأجسام والأشكال التي لا تقع كل عناصرها في مستوى واحد من حيث خواصها الأساسية وأبعادها ومساحاتها وحجومها ، . . . دون التعرض إلى خواص المواد المكونة لها .

مسلمات الهندسة الفضائية

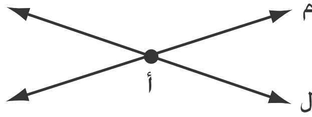
المسلمة : عبارة رياضية نقبلها دون برهان .

مسلمة (١)
أي نقطتين مختلفتين في الفضاء يمر بهما مستقيم وحيد .

أي كل مستقيم يحوي على الأقل نقطتين مختلفتين .



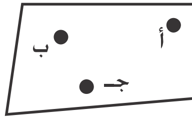
مسلمة (٢)
إذا تقاطع مستقيمان مختلفان فإنهما يتقاطعان في نقطة وحيدة .



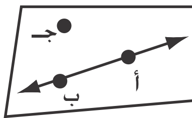
مسلمة (٣)
يوجد لأي ثلاث نقاط لا تقع على استقامة واحدة مستوى واحد فقط يحويها .

بالاعتماد على المسلمة (٣) يتعين المستوى في الفضاء بإحدى الحالات الأربع الاتية :

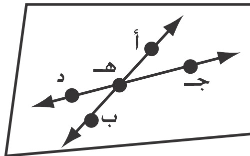
أ) بثلاث نقاط مختلفة ليست على استقامة واحدة .



ب) بمستقيم ونقطة خارجة عنه (لا تنتمي إليه) .
وذلك لأن المستقيم يحوي نقطتين على الأقل ، وحيث أن هناك نقطة خارج المستقيم يصبح لديك ثلاث نقط لا تقع على استقامة واحدة تعين مستوى واحدا .

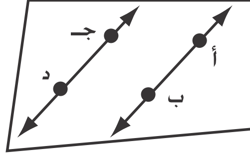


جـ) بمستقيمين متقاطعين .
حيث إن أحد المستقيمين يحوي نقطتين على الأقل ، ويمكن اختيار نقطة ثالثة على المستقيم الاخر بحيث تختلف عن نقطة التقاطع وبذلك يكون لديك ثلاث نقاط لا تقع على استقامة واحدة تعين مستوى واحدا .



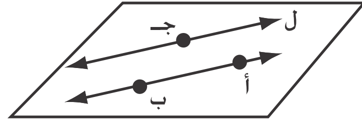
د) مستقيمين مختلفين متوازيين .

يمكنك اختيار نقطتين على أحد المستقيمين ونقطة ثالثة على المستقيم الاخر . فيتوافر لديك ثلاث نقاط لا تقع على استقامة واحدة تعين مستوى واحدا .



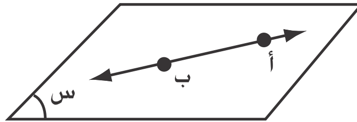
مسلمة (٤)

من نقطة خارج مستقيم يمكن رسم مستقيم واحد فقط يوازيه .



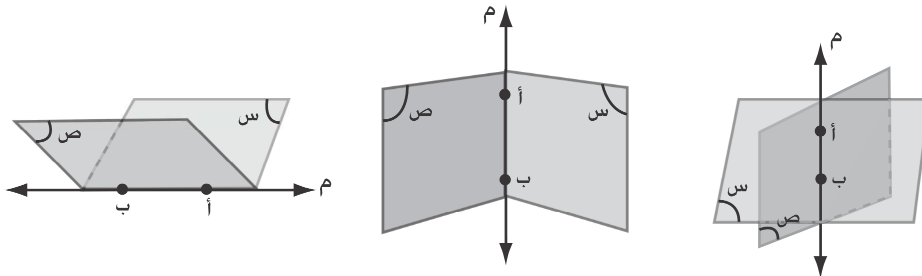
مسلمة (٥)

إذا وقعت نقطتان في مستوى ، فإن المستقيم الذي يحويهما ، يقع بأكمله في هذا المستوى .



مسلمة (٦)

إذا تقاطع مستويان مختلفان فإن تقاطعهما مستقيم .



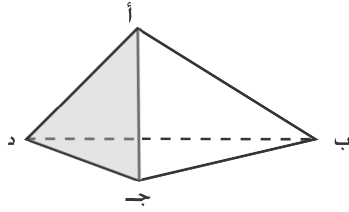
يسمى المستقيم المشترك $\overleftrightarrow{أ ب}$ بين المستويين س ، ص خط تقاطع المستويين .

ملحوظة :

١) يمكن رسم مستوى واحد فقط يحوي ثلاث نقاط لا تقع على استقامة واحدة ، وإذا اشترك مستويان في ثلاث نقط لا تقع على استقامة واحدة فإنهما ينطبقان .

٢) إذا اشترك مستويان في نقطة واحدة فإنهما يشتركان في نقطة أخرى على الأقل .

مثال الشكل المجاور يمثل هرما ثلاثيا . اعتمد عليه في الإجابة عن الأسئلة الاتية :



١) سم ثلاثة مستقيمات .

٢) سم ثلاثة مستويات .

٣) سم ثلاثة مستقيمات تمر بالنقطة ب .

٤) سم مستقيما يقع في مستويين مختلفين ، ثم اذكر اسمي المستويين .

الحل

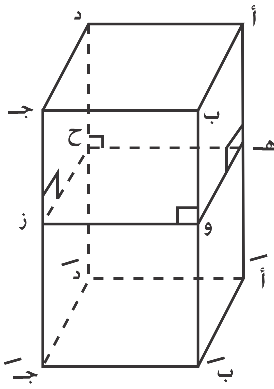
١) ثلاثة مستقيمات : $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أ د}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$.

٢) ثلاثة مستويات : أ ب جـ ، أ جـ د ، ب جـ د .

٣) ثلاثة مستقيمات تمر بالنقطة ب : $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ب د}}$.

٤) $\overleftrightarrow{\text{أ د}}$ يقع في المستويين أ د جـ ، أ د ب .

مثال الشكل المجاور أ ب جـ د دَ جـَ بَ أَ يمثل متوازي مستطيلات . اعتمد عليه في الإجابة عن الأسئلة الاتية :



١) حدد تقاطع المستويين أ ب جـ د ، ب بَ أَ أ .

٢) حدد مستقيما يمر بالنقطة (د) ويوازي $\overleftrightarrow{\text{ب بَ}}$.

٣) حدد مستوى يحوي $\overleftrightarrow{\text{و ز}}$.

الحل

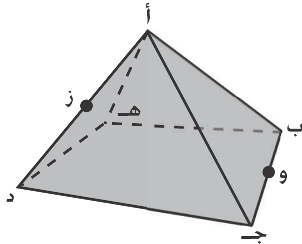
١) $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$.

٢) $\overleftrightarrow{\text{د دَ}}$.

٣) المستوى هـ و ز .

مثال الشكل المجاور يمثل مجسما مصغرا لهرم خوفو في مصر ، والنقطتان : و ، ز تمثلان فتحتين إلى داخل الهرم .

أعط مثالا لكل مما ياتي :



١) ثلاث نقط على استقامة واحدة .

٢) ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة .

٣) خمس نقط مستوية .

٤) أربع نقط ليست مستوية .

٥) ثلاث نقط على استقامة واحدة من بينها النقطة ز .

٦) نقطة تقاطع $\overleftrightarrow{\text{أ ز}}$ مع $\overleftrightarrow{\text{هـ د}}$.

الحل

١) ب ، و ، جـ .

٢) د ، هـ ، ز .

٣) جـ ، و ، ب ، هـ ، د .

٤) أ ، ب ، جـ ، هـ .

٥) أ ، ز ، د .

٦) د .

مثال

ما عدد المستويات التي يمكن رسمها بحيث يمر كل منها :

أ) بثلاث نقط على استقامة واحدة .

ب) بأربع نقط ثلاث منها على استقامة واحدة .

جـ) برؤوس هرم ثلاثي .

د) بثلاث نقط من بين أربع نقط غير مستوية .

الحل

أ) عدد لانهائي من المستويات .

ب) مستوى واحد فقط .

جـ) صفر .

د) $\binom{٤}{٣} = ٤$

مثال

ما عدد المستقيمات التي يمكن رسمها من ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة ؟

الحل

$\binom{٣}{٢} = ٣$

مثال

ما عدد المستقيمات التي يمكن تكوينها من أربع نقاط ليست أي ثلاث منها على استقامة واحدة ؟

$\binom{٤}{٢} = ٦$

مثال

أي العبارات الاتية صحيحة وأيها خطأ ؟

أ) يوجد أكثر من مستوى يمر بمستقيمين متوازيين .

ب) كل مستقيم يمكن أن يمر به عدد غير منته من المستويات .

جـ) يقع المثلث بأكمله في مستوى واحد .

د) إذا كان $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ يقع في المستوى س فإن $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ يقطع المستوى س في نقطتين فقط .

هـ) أي ثلاث نقط في مستوى يجمعها مستقيم وحيد .

و) يوجد عدد لانهائي من المستويات تمر بثلاث نقط على استقامة واحدة .

الحل

أ) خاطئة ، والصواب : مستوى وحيد .

ب) صحيحة .

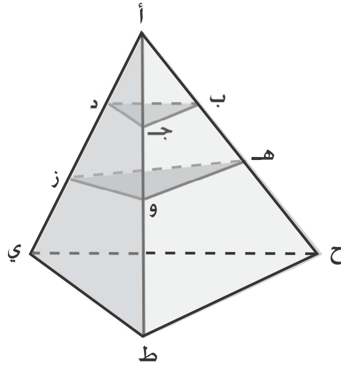
جـ) صحيحة .

د) خاطئة، والصواب : $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ يقع بأكمله في المستوى س .

هـ) خاطئة .

و) صحيحة .

مثال الشكل المجاور أ ح ي ط يمثل هرما ثلاثيا . اعتمد عليه في الإجابة عن الأسئلة الاتية :



أ) سم أربعة مستويات مختلفة .

ب) سم مستويين يحويان المستقيم ح ي .

الحل

أ) ح ط ي ، ح ط أ ، هـ و ز ، ب جـ د .

ب) ح ي أ ، ح ي ط .

مثال لتكن ل ، ك ، م ثلاثة مستقيمات متلاقية في نقطة أ ، ن مستقيم يقطع المستقيمات الثلاثة في النقط ب ، جـ ، د على الترتيب ، أثبت أن المستقيمات الأربعة تقع في مستوى واحد .

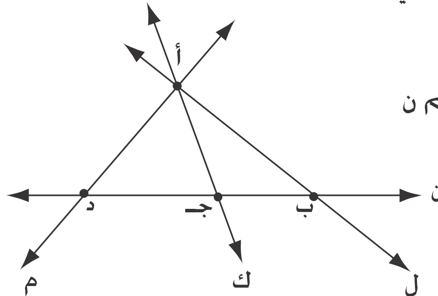
الحل المعطيات :

ل ،ك ،م ثلاثة مستقيمات متلاقية في النقطة أ .

المستقيم ن يقطع المستقيمات الثلاثة في النقط ب، جـ، د على الترتيب .

المطلوب :

اثبات أن المستقيمات ل ، ك ، م ، ن تقع في مستوى واحد .



البرهان :

ليكن س هو المستوى الوحيد المحدد بالمستقيم ن وبالنقطة الخارجة عنه أ .

$\overleftrightarrow{\text{ل}}$ يشترك مع المستوى س في النقطتين المختلفتين أ ، ب .

$\overleftrightarrow{\text{ك}}$ يشترك مع المستوى س في النقطتين المختلفتين أ ، جـ .

$\overleftrightarrow{م}$ يشترك مع المستوى س في النقطتين المختلفتين أ ، د .

لذا فإن $\overleftrightarrow{ل}$ ، $\overleftrightarrow{ك}$ ، $\overleftrightarrow{م}$ تقع بكاملها في المستوى س الذي يحوي $\overleftrightarrow{ن}$ أصلا .

∴ المستقيمات الأربعة تقع في مستوى واحد س .

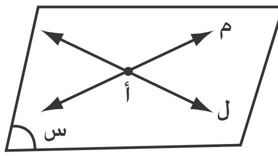
أوضاع المستقيمات والمستويات في الفضاء

أولا : الأوضاع النسبية لمستقيمين في الفضاء .

أ) المستقيمان يتقاطعان في نقطة وحيدة .

في الشكل المجاور : $\overleftrightarrow{ل} \cap \overleftrightarrow{م} = \{أ\}$

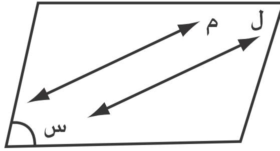
وفي هذه الحالة يقع المستقيمان في مستوى واحد .



ب) المستقيمان يتوازيان .

ففي الشكل المجاور : إذا كان $\overleftrightarrow{ل} // \overleftrightarrow{م}$ فإن $\overleftrightarrow{ل} \cap \overleftrightarrow{م} = \phi$

و يقع المستقيمان في مستوى واحد .

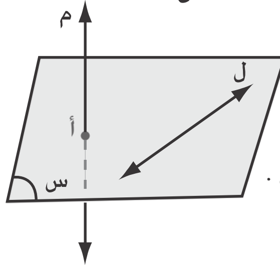


جـ) المستقيمان لا يتقاطعان ولا يتوازيان (مستقيمان متخالفان) .

في الشكل المجاور :

$\overleftrightarrow{ل} \subset$ المستوى س ، $\overleftrightarrow{م} \cap$ المستوى س = $\{أ\}$

وفي هذه الحالة $\overleftrightarrow{ل}$ ، $\overleftrightarrow{م}$ لا يمكن أن يجمعهما مستوى .



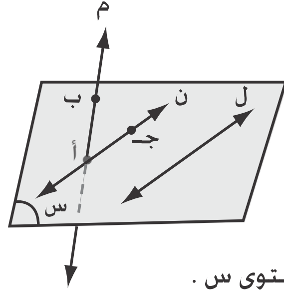
ملاحظة : أي مستقيمين في الفضاء إما أن يكونا مستويين معا أي يقعان في مستوى واحد وفي هذه الحالة إما أن يتقاطعا أو يتوازيا . وإما أن يكونا غير مستويين معا أي لا يمكن أن يجمعهما مستوى واحد وفي هذه الحالة يكونان متخالفين .

ملاحظة : تعتبر القطعتان المستقيمتان $\overline{أب}$ ، $\overline{جـد}$ متوازيتين إذا كان $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{جـد}$ متوازيين وتعتبران متخالفتين إذا كان المستقيمان متخالفين .

الزاوية بين مستقيمين متخالفين

تعريف :

الزاوية بين مستقيمين متخالفين هي الزاوية الحادة التي يصنعها أحدهما مع أي مستقيم مرسوم من نقطة عليه موازيا الاخر .



في الشكل المجاور :

$\overleftrightarrow{ل}$ ، $\overleftrightarrow{م}$ متخالفان حيث :

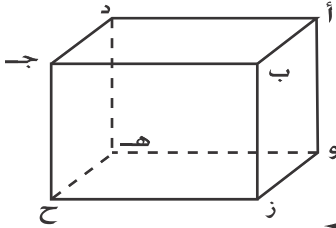
$\overleftrightarrow{ل}$ ⊂ المستوى س ، $\overleftrightarrow{م}$ ∩ المستوى س = { أ }

ولإيجاد الزاوية بينهما نرسم من أ $\overleftrightarrow{ن}$ // $\overleftrightarrow{ل}$ في المستوى س .

فتكون الزاوية الحادة ب أ جـ هي الزاوية بين المسقيمين المتخالفين ل ، م .

ملاحظة : إذا كان ق ∢ ب أ جـ = ٩٠° نقول أن المستقيمين المتخالفين ل ، م متعامدان .

مثال الشكل المجاور يمثل متوازي مستطيلات عين ثلاثة أزواج من المستقيمات المتخالفة المتعامدة .



الحل

($\overleftrightarrow{أ د}$ ، $\overleftrightarrow{ز و}$) ، ($\overleftrightarrow{ب ز}$ ، $\overleftrightarrow{هـ ح}$) ، ($\overleftrightarrow{هـ و}$ ، $\overleftrightarrow{جـ ح}$)

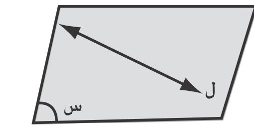
ثانيا : العلاقة بين مستقيم ومستوى في الفضاء .

يمكن حصر العلاقة بين مستقيم ومستوى في الفضاء في أحد الأوضاع الثلاثة الاتية :

١) المستقيم يقع بتمامه في المستوى . (انظر الشكل (١))

٢) المستقيم يقطع المستوى في نقطة واحدة فقط . (انظر الشكل (٢))

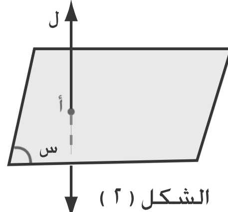
٣) المستقيم لا يشترك مع المستوى في أي نقطة . « المستقيم يوازي المستوى » (انظر الشكل (٣))



الشكل (١)

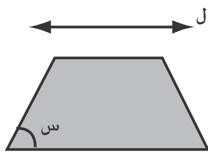
$\overleftrightarrow{ل}$ ∩ المستوى س = $\overleftrightarrow{ل}$

أي $\overleftrightarrow{ل}$ ⊂ المستوى س



الشكل (٢)

$\overleftrightarrow{ل}$ ∩ المستوى س = { أ }

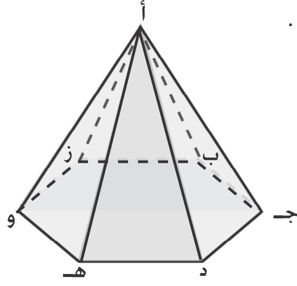


الشكل (٣)

$\overleftrightarrow{ل}$ ∩ المستوى س = ϕ

أي $\overleftrightarrow{ل}$ // المستوى س

مثال الشكل المجاور يمثل هرما سداسيا قائما منتظما .
أعط مثالا على كل مما يأتي :



أ) مستقيمين متوازيين .

ب) مستقيمين متقاطعين .

جـ) مستقيمين متخالفين .

د) مستويين متقاطعين .

هـ) مستقيم يقطع مستوى .

الحل

أ) بما أن قاعدة الهرم مضلع سداسي منتظم فكل ضلعين متقابلين متوازيان .

$\overleftrightarrow{جـ د} \parallel \overleftrightarrow{ز و}$

ب) $\overleftrightarrow{أ ب}$ ، $\overleftrightarrow{ب ز}$.

جـ) $\overleftrightarrow{د هـ}$ ، $\overleftrightarrow{أ ب}$.

د) المستوى أ جـ د ، المستوى أ ب جـ يتقاطعان في $\overleftrightarrow{أ جـ}$.

هـ) $\overleftrightarrow{أ ز}$ يقطع المستوى ب ز و في النقطة ز .

ثالثا : العلاقة بين مستويين في الفضاء .

يمكن حصر الأوضاع المختلفة لمستويين س ، ص في الفضاء في الحالات الثلاث الاتية :

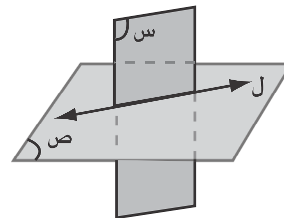
١) المستويان يتقاطعان في مستقيم ل : المستوى س $\cap$ المستوى ص = $\overleftrightarrow{ل}$

<u>ملاحظة</u> : إذا اشترك مستويان في نقطة ما فإنهما يشتركان في خط مستقيم يمر بهذه النقطة .

٢) المستويان يشتركان في جميع النقاط : المستوى س = المستوى ص .

٣) المستويان لا يشتركان في أي نقطة : المستوى س $\cap$ المستوى ص = ϕ

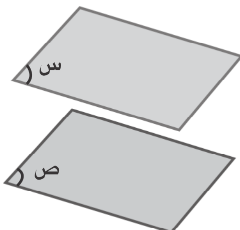
<u>في الحالتين الأخيرتين نقول إن المستويين متوازيان : المستوى س $\parallel$ المستوى ص</u>



مستويان متقاطعان



مستويان متوازيان



مستويان متوازيان

مثال أي من العبارات الاتية صائبة وأي منها خاطئة ؟
« أعد كتابة العبارة الخاطئة بصورة صحيحة » .

أ) إذا لم يشترك المستقيم ل مع المستوى س في أي نقطة فإن $\overleftrightarrow{ل}$ // المستوى س .

ب) إذا تقاطع مستويان مختلفان فإنهما يتقاطعان في مستوى .

جـ) من نقطة خارج مستوى يمكن رسم مستقيم واحد فقط يوازي هذا المستوى .

د) إذا توازى مستقيمان فإن أي مستقيم يقطع أحدهما يقطع الاخر .

الحل

أ) صائبة .

ب) خاطئة ، والصواب : المستويان المختلفان يتقاطعان في مستقيم .

جـ) خاطئة، والصواب : يمكن رسم عدد لانهائي من المستقيمات الموازية لهذا المستوى من نقطة خارجة عنه .

د) خاطئة ، والصواب : إذا توازى مستقيمان فإن أي مستقيم اخر يقع في مستواهما يقطع أحدهما يقطع الاخر .

مثال أي من العبارات الاتية صائبة وأي منها خاطئة ؟

أ) يكون المستقيم قاطعا للمستوى عندما تكون إحدى نقاطه فقط واقعة في المستوى .

ب) يكون المستقيم واقعا في المستوى في الحالة التي يشترك فيها مع المستوى في نقطتين من نقاطه على الأقل .

جـ) إذا وازى مستقيم مستوى فإنهما لا يشتركان في أي نقطة من نقطهما .

د) المستقيم الواقع في أحد مستويين متوازيين يوازي المستوى الاخر .

هـ) أي ثلاث نقط في مستوى يجمعها مستقيم واحد .

و) إذا تقاطع مستقيمان في نقطة وحيدة فإنهما يعينان مستوى .

ز) المستقيمان المتخالفان يعينان مستوى وحيد .

ح) ينطبق المستويان إذا اشتركا في نقطتين على الأكثر .

ط) ينطبق المستويان إذا اشتركا في أكثر من نقطتين مختلفتين .

ي) أي نقطتين مختلفتين يمر بهما مستوى واحد فقط .

ك) أي نقطة في الفراغ يمر بها عدد لانهائي من المستويات .

ل) أي ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة يمر بها مستوى واحد فقط .

م) كل مستويين متقاطعين يشتركان في نقطة واحدة فقط .

الحل

أ) صائبة ، ب) صائبة ، جـ) صائبة ، د) صائبة ، هـ) خاطئة

و) صائبة ، ز) خاطئة ، ح) خاطئة ، ط) خاطئة ، ي) خاطئة

ك) صائبة ، ل) صائبة ، م) خاطئة

مثال أثبت أنه إذا تقاطعت ثلاثة مستقيمات في ثلاث نقط فإنها تقع في مستوى واحد .

الحل **المعطيات :**

$\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ ثلاثة مستقيمات متقاطعة في ثلاث نقط .

المطلوب :

إثبات أن : $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ تقع في مستوى واحد .

البرهان :

$\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ متقاطعان فيعينان مستوى واحدا وليكن س .

النقطتان أ ، جـ $\in$ المستوى س $\longleftarrow$ $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ $\subset$ المستوى س

$\therefore$ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ تقع في مستوى واحد .

مثال أثبت أن كل مستوى يحوي ثلاثة مستقيمات على الأقل .

الحل **المعطيات :** س مستوى .

المطلوب : إثبات أن المستوى س يحوي ثلاثة مستقيمات على الأقل .

البرهان :

المستوى س يحوي على الأقل ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة ولتكن أ ، ب ، جـ .

لكن كل نقطتين مختلفتين يمر بهما مستقيم واحد .

$\therefore$ هناك ثلاثة مستقيمات مختلفة على الأقل تقع في المستوى س وهي :

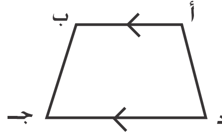
$\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$

مثال أثبت أن أضلاع أي شكل رباعي فيه ضلعان متوازيان تقع جميعا في مستوى واحد .

الحل **المعطيات :**

أ ب جـ د شكل رباعي فيه $\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{جـ د}}$

المطلوب :



إثبات أن : أ ب ، ب جـ ، جـ د ، د أ
تقع جميعا في مستوى واحد .

البرهان :

أ ب // جـ د ⟵ أ ب ↔ // جـ د ↔

∴ أ ب ↔ ، جـ د ↔ يحددان مستوى وحيدا وليكن س .

النقطتان أ ، د تنتميان للمستوى س ⟵ د أ ⊂ المستوى س .

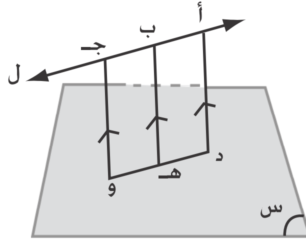
النقطتان ب ، جـ تنتميان للمستوى س ⟵ ب جـ ⊂ المستوى س .

∴ أ ب ، ب جـ ، جـ د ، د أ تقع في مستوى واحد .

مثال المستقيم ل // المستوى س ، النقط أ ، ب ، جـ ∈ ل ↔ ، رسمت من هذه النقط ثلاثة مستقيمات متوازية فقطعت المستوى س في النقط د ، هـ ، و على الترتيب . أثبت أن النقط د ، هـ ، و تقع على استقامة واحدة .

الحل

المعطيات :



المستقيم ل // المستوى س ،

النقط أ ، ب ، جـ ∈ ل ↔ ،

النقط د ، هـ ، و ∈ المستوى س ،

أ د ↔ // ب هـ ↔ // جـ و ↔

المطلوب : إثبات أن النقط د ، هـ ، و تقع على استقامة واحدة .

البرهان : أ د ↔ // جـ و ↔ فهما يعينان مستوى وحيدا وليكن ص .

النقطتان د ، و ∈ المستوى ص ، النقطتان د ، و ∈ المستوى س

∴ المستوى س ∩ المستوى ص = د و ↔

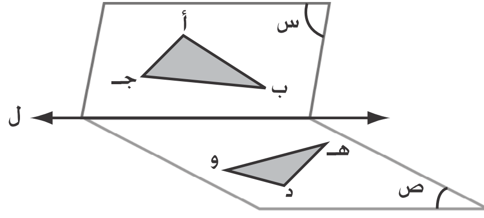
النقط أ ، ب ، جـ ∈ ل ↔ ، ل ↔ ⊂ المستوى ص ⟵ النقطة ب ∈ المستوى ص

لكن أ د ↔ // ب هـ ↔ ∴ ب هـ ↔ ⊂ المستوى ص

∴ النقط د ، هـ ، و ∈ المستوى ص ، كذلك النقط د ، هـ ، و ∈ المستوى س

∴ النقطة هـ ∈ د و ↔ ∴ النقط د ، هـ ، و تقع على استقامة واحدة .

مثال



في الشكل المجاور :

س ، ص مستويان متقاطعان في $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ ،

أ ب جـ مثلث تقع رؤوسه في المستوى س ،

د هـ و مثلث تقع رؤوسه في المستوى ص .

إذا كان :

$\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ∩ $\overleftrightarrow{\text{د هـ}}$ = {ر} ، $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ ∩ $\overleftrightarrow{\text{د و}}$ = {ح} ، $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ ∩ $\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$ = {ط}

فاثبت أن : ر ، ح ، ط على استقامة واحدة .

المعطيات : المستوى س ∩ المستوى ص = $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ ،

النقط أ ، ب ، جـ ∈ المستوى س ، النقط د ، هـ ، و ∈ المستوى ص ،

$\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ∩ $\overleftrightarrow{\text{د هـ}}$ = {ر} ، $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ ∩ $\overleftrightarrow{\text{د و}}$ = {ح} ، $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ ∩ $\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$ = {ط}

المطلوب : إثبات أن النقط ر ، ح ، ط على استقامة واحدة .

البرهان :

$\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ⊂ المستوى س ، النقطة ر ∈ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ∴ النقطة ر ∈ المستوى س .

$\overleftrightarrow{\text{د هـ}}$ ⊂ المستوى ص ، النقطة ر ∈ $\overleftrightarrow{\text{د هـ}}$ ∴ النقطة ر ∈ المستوى ص .

∴ النقطة ر ∈ (المستوى س ∩ المستوى ص) ∴ النقطة ر ∈ $\overleftrightarrow{\text{ل}}$

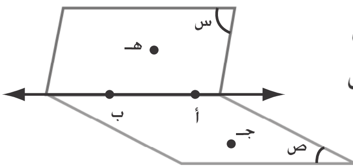
وبنفس الطريقة نثبت أن كلا من النقطتين ح ، ط ∈ $\overleftrightarrow{\text{ل}}$

∴ النقط ر ، ح ، ط ∈ $\overleftrightarrow{\text{ل}}$

∴ النقط ر ، ح ، ط على استقامة واحدة .

مثال

إذا كانت النقط أ ، ب ، هـ تقع في المستوى س ، والنقط أ ، ب ، جـ تقع في المستوى ص . أثبت أن المستويين س ، ص يتقاطعان في $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$.



المعطيات : النقط أ ، ب ، هـ تقع في المستوى س

النقط أ ، ب ، جـ تقع في المستوى ص

المطلوب :

إثبات أن المستويين س ، ص يتقاطعان في $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$.

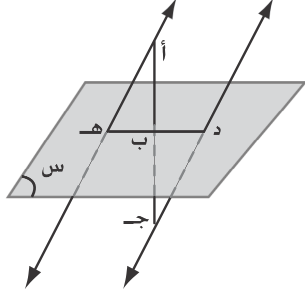
البرهان : النقطتان أ،ب ∈ المستوى س . ⟵ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ⊂ المستوى س .

النقطتان أ،ب ∈ المستوى ص . ⟵ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ⊂ المستوى ص .

∴ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ⊂ (المستوى س ∩ المستوى ص)

∴ المستويان يتقاطعان في مستقيم وحيد هو $\overleftrightarrow{أب}$.

مثال قطعت $\overline{أجـ}$ المستوى س في النقطة (ب) . رُسم من أ ، جـ مستقيمان متوازيان قطعا المستوى س في النقطتين هـ ،د على الترتيب كما في الشكل الاتي .
أثبت أن النقط هـ ،ب ، د تقع على استقامة واحدة .



المعطيات :

$\overline{أجـ}$ ∩ المستوى س = {ب} ،

$\overleftrightarrow{أهـ}$ // $\overleftrightarrow{دجـ}$ ،

$\overleftrightarrow{أهـ}$ ∩ المستوى س = {هـ} ،

$\overleftrightarrow{دجـ}$ ∩ المستوى س = { د } ،

المطلوب : إثبات أن النقط هـ ، ب ، د تقع على استقامة واحدة .

البرهان :

بما أن $\overleftrightarrow{أهـ}$ // $\overleftrightarrow{دجـ}$ فهما يعينان مستوى وحيدا وليكن ص .

النقطتان أ ،جـ ∈ المستوى ص ⟵ $\overline{أجـ}$ ⊂ المستوى ص

وبما أن النقطة ب ∈ $\overline{أجـ}$ ⟵ النقطة ب ∈ المستوى ص .

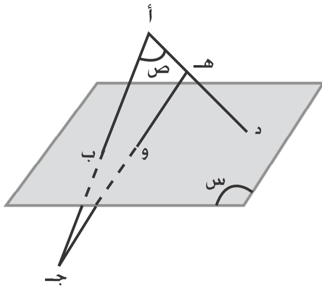
∴ النقط هـ ، ب ،د ∈ المستوى ص .

ومن المعطيات هـ ، ب ، د ∈ المستوى س .

∴ النقط هـ ، ب ، د ∈ (المستوى س ∩ المستوى ص)

∴ النقط هـ ، ب ، د تقع على استقامة واحدة .

مثال $\overline{أجـ}$ يقطع المستوى س في النقطة (ب) . رسم $\overline{أد}$ يقطع المستوى س في النقطة (د) ، وأخذت نقطة (هـ) ∈ $\overline{أد}$ ورسم $\overline{هـجـ}$ يقطع المستوى س في النقطة (و) . أثبت أن النقط د، و ، ب تقع على استقامة واحدة .



المعطيات :

$\overline{أجـ}$ ∩ المستوى س = {ب} ،

$\overline{أد}$ ∩ المستوى س = { د } ،

النقطة هـ ∈ $\overline{أد}$ ،

$\overline{هـجـ}$ ∩ المستوى س = { و } .

المطلوب : إثبات أن النقط د ،و ،ب تقع على استقامة واحدة .

البرهان : $\overline{أجـ}$ ، $\overline{أد}$ متقاطعتان فتعينان مستوى وحيدا وليكن ص .

النقطتان : هـ ، جـ ∋ المستوى ص ⟵ $\overline{هـ جـ}$ ⊂ المستوى ص

لكن النقطة و ∋ $\overline{هـ جـ}$ ⟵ النقطة و ∋ المستوى ص

∴ النقط د ،و، ب ∋ المستوى ص

ومن المعطيات : النقط د ،و، ب ∋ المستوى س

∴ النقط د، و ،ب ∋ (المستوى س ∩ المستوى ص)

∴ النقط د ، و ،ب تقع على استقامة واحدة .

مثال

النقطتان جـ،ب تقعان في جهتين مختلفتين من المستوى س .

$\overline{جـ ب}$ تقطع المستوى س في النقطة (د) ،

حيث : جـ د = د ب ، رسم من ب ، جـ قطعتان مستقيمتان متوازيتان قطعتا المستوى س في النقطتين و ، هـ على الترتيب كما في الشكل المجاور .

١) أثبت أن النقط هـ ، د، و تقع على استقامة واحدة .

٢) أثبت أن الشكل هـ جـ و ب متوازي أضلاع .

المعطيات : $\overline{جـ ب}$ ∩ المستوى س = { د } ، جـ د = د ب ، $\overline{ب و}$ // $\overline{جـ هـ}$ ،

$\overline{ب و}$ ∩ المستوى س = { و } ، $\overline{جـ هـ}$ ∩ المستوى س = {هـ}

البرهان للفرع (١) .

$\overline{ب و}$ // $\overline{جـ هـ}$ يعينان مستوى وحيد وليكن ص .

النقطة جـ ∋ المستوى ص ، النقطة ب ∋ المستوى ص ∴ $\overline{جـ ب}$ ⊂ المستوى ص

لكن النقطة د ∋ $\overline{جـ ب}$ ∴ النقطة د ∋ المستوى ص

∴ النقط هـ، د، و ∋ المستوى ص .

من المعطيات : النقط هـ، د، و ∋ المستوى س .

∴ النقط هـ، د، و ∋ (المستوى س ∩ المستوى ص)

∴ النقط هـ، د، و تقع على استقامة واحدة .

البرهان للفرع (٢)

المثلثان جـ هـ د ، د و ب فيهما :

١) ق ∢ هـ جـ د = ق ∢ د ب و (بالتبادل)

٢) ق ∢ جـ د هـ = ق ∢ و د ب (بالتقابل بالرأس)

٣) جـ د = د ب (معطى)

∴ △ جـ هـ د ، △ د و ب متطابقان وينتج أن :

جـ هـ = ب و ، ومعطى $\overline{\text{ب و}}$ // $\overline{\text{جـ هـ}}$

∴ الشكل هـ جـ و ب متوازي أضلاع .

مثال أثبت أنه إذا تقاطعت ثلاثة مستويات مثنى مثنى في ثلاثة مستقيمات وتقاطع مستقيمان منها في نقطة فإن نقطة تقاطع هذان المستقيمان تنتمي إلى المستقيم الثالث .

المعطيات :

س، ص ، ع ثلاثة مستويات متقاطعة مثنى مثنى حيث :

المستوى س ∩ المستوى ع = $\overleftrightarrow{\text{ب ل}}$ ،

المستوى ص ∩ المستوى ع = $\overleftrightarrow{\text{د ك}}$ ،

المستوى س ∩ المستوى ص = $\overleftrightarrow{\text{جـ هـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ب ل}}$ ∩ $\overleftrightarrow{\text{د ك}}$ = { أ }

المطلوب : إثبات أن النقطة أ ∈ $\overleftrightarrow{\text{جـ هـ}}$

البرهان : النقطة أ ∈ $\overleftrightarrow{\text{ب ل}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ب ل}}$ هو خط تقاطع المستويين س، ع .

∴ النقطة أ ∈ المستوى س ... (١)

النقطة أ ∈ $\overleftrightarrow{\text{د ك}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{د ك}}$ هو خط تقاطع المستويين ص، ع .

∴ النقطة أ ∈ المستوى ص ... (٢)

من (١) و (٢) ∴ النقطة أ تنتمي إلى المستويين س ، ص .

∴ النقطة أ ∈ (المستوى س ∩ المستوى ص)

∴ النقطة أ ∈ $\overleftrightarrow{\text{جـ هـ}}$

نظريات في التوازي

نظرية (١)

إذا وازى مستقيم خارج مستوى مستقيما في المستوى فإنه يوازي هذا المستوى .

البرهان بالتناقض : إحدى طرق البرهان،حيث يتم فرض عدم صحة المراد إثباته ، وأثناء استخدام الحقائق من نظريات ومسلمات تجد تناقضا إما مع معطيات السؤال أو مع مسلمات ونظريات سابقة وهذا يؤكد عكس الفرض .

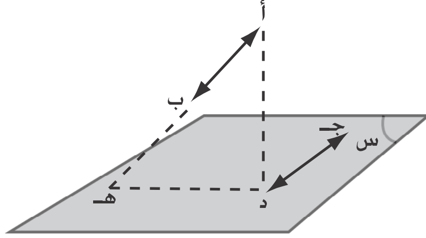
المعطيات :

$\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ خارج المستوى س ، $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ واقعة في المستوى س ،

$\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$.

المطلوب :

إثبات أن $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // المستوى س .



البرهان (باستخدام طريقة البرهان بالتناقض)

افرض أن $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ لا يوازي المستوى س

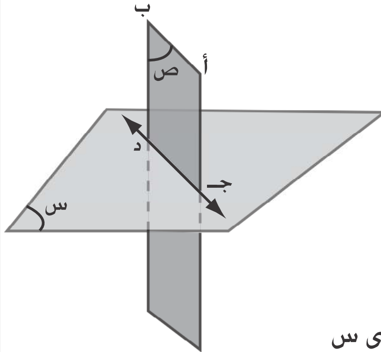
وعليه،فإنه يوجد نقطة مشتركة بين $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ والمستوى س ولتكن هـ .

أ هـ د مستوى ، د نقطة فيه خارج $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$.

إذن يمكن رسم مستقيم يوازي $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ من النقطة د ويقع في المستوى أ هـ د .

لكن $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$.

إذن أمكن رسم مستقيمين من النقطة د يوازيان $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ وهذا يناقض المسلمة « من نقطة خارج مستقيم يمكن رسم مستقيم وحيد فقط يوازيه » . أي أن $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ لا يقطع المستوى س ومنه $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // المستوى س .



نتيجة

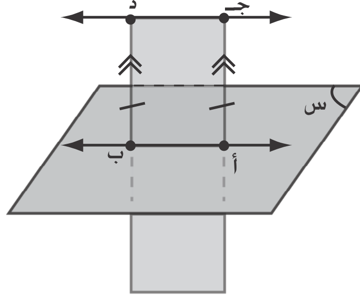
إذا وازى مستقيم مستوى فإن كل مستوى مار بالمستقيم وقاطع للمستوى المعلوم يقطعه في مستقيم يوازي المستقيم المعلوم .

$\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // المستوى س

المستوى ص يمر بالمستقيم $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ويقطع المستوى س في $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ وحسب النتيجة يكون : $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$.

مثال أ،ب نقطتان في المستوى س ، والنقطتان جـ،د خارج المستوى س بحيث :

$\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ // $\overleftrightarrow{\text{ب د}}$ ، أ جـ = ب د . برهن أن : $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ // المستوى س .



المعطيات :

أ،ب نقطتان في المستوى س .

جـ ، د نقطتان خارج المستوى س بحيث :

$\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ // $\overleftrightarrow{\text{ب د}}$ ، أ جـ = ب د .

المطلوب :

إثبات أن : $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ // المستوى س .

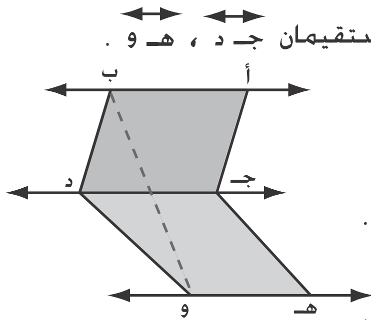
البرهان :

بما أن : $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ // $\overleftrightarrow{\text{ب د}}$ ، أ جـ = ب د إذن الشكل أ ب جـ د متوازي أضلاع .

وعليه فإن: $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ // $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، لكن $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ $\subset$ المستوى س .

$\therefore$ $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ // المستوى س .

مثال $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$ ، ثلاثة مستقيمات متوازية ولا تقع جميعها في مستوى واحد . أثبت أن $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ يوازي المستوى الذي يعينه المستقيمان $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$.



المعطيات :

$\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ // $\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$

$\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$ ليست واقعة في مستوى واحد .

المطلوب :

إثبات أن : $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ يوازي المستوى الذي يعينه $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$.

البرهان :

حيث إن $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ // $\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$ فهما يعينان مستوى وحيدا وليكن س .

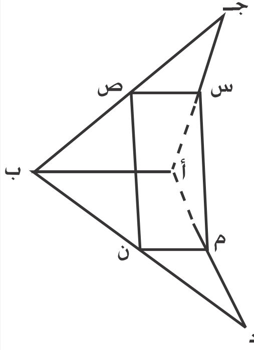
وبما أن $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ خارج المستوى س ويوازي $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ الواقع في المستوى س فإن :

$\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // المستوى س .

$\therefore$ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ يوازي المستوى الذي يعينه $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$.

> تذكر : المستقيمان الموازيان لثالث في الفضاء متوازيان .

مثال جـ أ ب ، د أ ب مثلثان في مستويين مختلفين فإذا كانت س ،ص ،م ،ن منتصفات $\overline{\text{جـ أ}}$ ، $\overline{\text{جـ ب}}$ ، $\overline{\text{د أ}}$ ، $\overline{\text{د ب}}$ على الترتيب فاثبت أن :



١) $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ // المستوى د أ ب .

٢) الشكل س ص ن م متوازي أضلاع .

المعطيات :

جـ أ ب ، د أ ب مثلثان ليسا في مستوى واحد .

س، ص، م، ن منتصفات $\overline{\text{جـ أ}}$ ، $\overline{\text{جـ ب}}$ ، $\overline{\text{د أ}}$ ، $\overline{\text{د ب}}$ على الترتيب .

المطلوب إثبات أن : ١) $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ // المستوى د أ ب .

٢) الشكل س ص ن م متوازي أضلاع .

البرهان :

في المثلث أ ب جـ : س منتصف $\overline{\text{جـ أ}}$ ، ص منتصف $\overline{\text{جـ ب}}$

∴ س ص = $\frac{1}{2}$ أ ب ، $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ // $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ .... (١)

لكن $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ⊂ المستوى د أ ب ∴ $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ // المستوى د أ ب . (المطلوب أولا)

في المثلث د أ ب : م منتصف $\overline{\text{د أ}}$ ، ن منتصف $\overline{\text{د ب}}$.

∴ م ن = $\frac{1}{2}$ أ ب ، $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ // $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ .... (٢)

من (١) و (٢) ينتج أن : $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ // $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ ، س ص = م ن = $\frac{1}{2}$ أ ب

« المستقيمان الموازيان لثالث في الفضاء متوازيان »

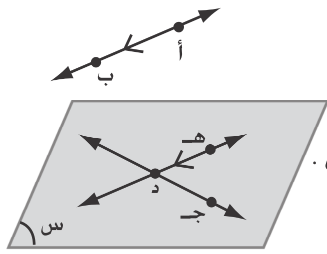
في الشكل س ص ن م : س ص = م ن ، $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{م ن}}$

∴ الشكل س ص ن م متوازي أضلاع . (المطلوب ثانيا)

مثال $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ مستقيمان متخالفان ، رسم من النقطة (د) $\overleftrightarrow{\text{د هـ}}$ يوازي $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$. برهن أن : $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // المستوى د جـ هـ .

المعطيات : $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ مستقيمان متخالفان ، $\overleftrightarrow{\text{د هـ}}$ ∩ $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ = { د } ، $\overleftrightarrow{\text{د هـ}}$ // $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$

المطلوب : إثبات أن $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // المستوى د جـ هـ



البرهان :

$\overleftrightarrow{\text{د هـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ متقاطعان فيعينان مستوى وحيدا وليكن س .

لكن $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{د هـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{د هـ}}$ $\subset$ المستوى س .

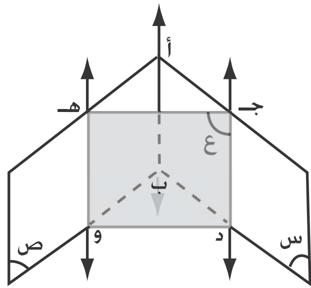
$\therefore$ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // المستوى س .

$\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // المستوى د جـ هـ .

مثال س،ص مستويان متقاطعان في $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، المستوى ع يقطعهما في $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$

على الترتيب ، وكان $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // المستوى ع . أثبت أن : $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ // $\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$.

المعطيات :



المستوى س $\cap$ المستوى ص = $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ،

المستوى س $\cap$ المستوى ع = $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ ،

المستوى ص $\cap$ المستوى ع = $\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$ ،

$\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // المستوى ع .

المطلوب : إثبات أن $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ // $\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$.

البرهان :

$\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // المستوى ع ، $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ $\subset$ المستوى س ، المستوى س $\cap$ المستوى ع = $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ .... (١)

$\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // المستوى ع ، $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ $\subset$ المستوى ص ، المستوى ص $\cap$ المستوى ع = $\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$ .... (٢)

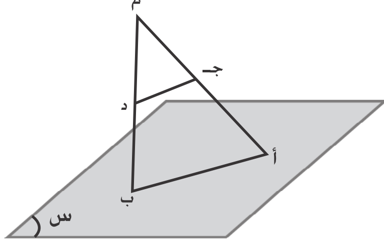
من (١) و (٢) $\therefore$ $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ // $\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$. « المستقيمان الموازيان لثالث في الفضاء متوازيان »

مثال $\overline{\text{أ ب}}$ $\subset$ المستوى س ، م نقطة خارج المستوى س ، رُسمت $\overline{\text{م أ}}$ ، $\overline{\text{م ب}}$

ثم فرضت نقطة (جـ) على $\overline{\text{م أ}}$ بحيث $\frac{\text{م جـ}}{\text{جـ أ}} = \frac{٢}{٣}$ ، وفرضت نقطة (د) على $\overline{\text{م ب}}$

بحيث $\frac{\text{ب د}}{\text{ب م}} = \frac{٣}{٥}$. أثبت أن $\overline{\text{جـ د}}$ // المستوى س .

المعطيات : $\overline{\text{أ ب}}$ ⊂ المستوى س ، م نقطة خارج المستوى س ، $\overline{\text{م أ}}$ ، $\overline{\text{م ب}}$ قطعتان مستقيمتان .



النقطة جـ ∈ $\overline{\text{م أ}}$: $\frac{\text{م جـ}}{\text{جـ أ}} = \frac{2}{3}$ ،

النقطة د ∈ $\overline{\text{م ب}}$: $\frac{\text{ب د}}{\text{ب م}} = \frac{3}{5}$

المطلوب : إثبات أن $\overline{\text{جـ د}}$ // المستوى س .

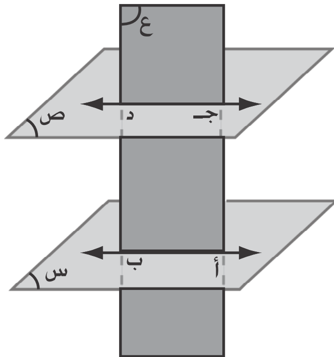
البرهان : $\frac{\text{ب د}}{\text{ب م}} = \frac{3}{5}$ ∴ $\frac{\text{م د}}{\text{ب د}} = \frac{2}{3}$ لكن $\frac{\text{م جـ}}{\text{جـ أ}} = \frac{2}{3}$

△ م أ ب يشابه △ م جـ د بتناسب طولي ضلعين في المثلث الأول مع طولي الضلعين المناظرين لهما في المثلث الثاني والزاوية المحصورة بين الضلعين في المثلث الأول تطابق الزاوية المناظره لها في المثلث الثاني .

∴ $\overline{\text{جـ د}}$ // $\overline{\text{أ ب}}$ ، لكن $\overline{\text{أ ب}}$ ⊂ المستوى س

∴ $\overline{\text{جـ د}}$ // المستوى س .

نظرية (٢)
إذا قطع مستوى مستويين متوازيين فإن خطي تقاطعه مع المستويين متوازيان .



المعطيات :
س، ص مستويان متوازيان ، ع مستوى ثالث قاطع لهما في $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$.

المطلوب :
إثبات أن $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$.

البرهان :
$\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ⊂ المستوى س ، $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ ⊂ المستوى ص

لكن المستوى س // المستوى ص ∴ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ لا يتقاطعان .

لكن $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ واقعان في المستوى ع .

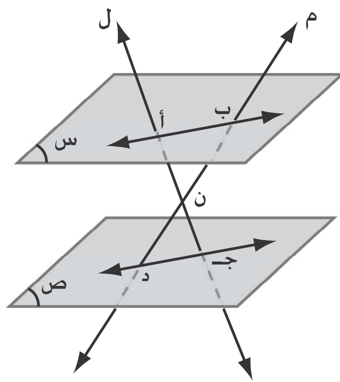
∴ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$.

مثال إذا كانت (ن) نقطة خارج المستويين المتوازيين س ، ص ، ومر بالنقطة (ن) مستقيمان قطعا المستوى س في أ، ب كما قطعا المستوى ص في جـ ، د .
برهن أن $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$.

المعطيات : س ، ص مستويان متوازيان ، ن نقطة خارجهما
$\overleftrightarrow{\text{ل}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{م}}$ يتقاطعان في (ن) ، ويقطعان المستوى س في أ، ب على الترتيب ويقطعان المستوى ص في جـ ، د على الترتيب .

المطلوب :

إثبات أن $\overleftrightarrow{أب} // \overleftrightarrow{جـ د}$.



البرهان :

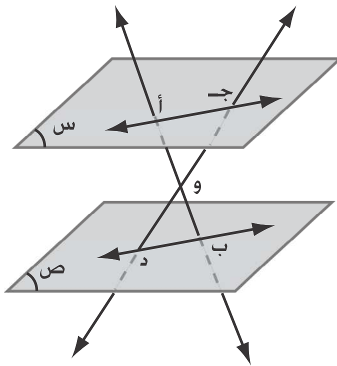
$\overleftrightarrow{ل}$ ، $\overleftrightarrow{م}$ يتقاطعان في (ن) فهما يحددان مستوى وحيدا وليكن ع .

المستوى ع يقطع المستويين المتوازيين س، ص في $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{جـ د}$ على الترتيب .

∴ $\overleftrightarrow{أب} // \overleftrightarrow{جـ د}$

مثال س، ص مستويان متوازيان ، (و) نقطة واقعة بينهما $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{جـ د}$ يقطعان المستوى س في أ ، جـ على الترتيب ويقطعان المستوى ص في ب، د على الترتيب ويتقاطعان في النقطة (و) . أثبت أن : $\frac{أو}{وب} = \frac{أجـ}{د ب}$.

المعطيات :



المستوى س // المستوى ص ،

النقطة (و) واقعة بين المستويين س، ص .

$\overleftrightarrow{أب}$ ∩ المستوى س = { أ } ،

$\overleftrightarrow{أب}$ ∩ المستوى ص = {ب} ،

$\overleftrightarrow{جـ د}$ ∩ المستوى س = {جـ} ،

$\overleftrightarrow{جـ د}$ ∩ المستوى ص = { د } ،

$\overleftrightarrow{أب}$ ∩ $\overleftrightarrow{جـ د}$ = { و } .

المطلوب :إثبات أن $\frac{أو}{وب} = \frac{أجـ}{د ب}$.

البرهان :

$\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{جـ د}$ متقاطعان فيعينان مستوى وحيدا وليكن ع .

المستوى ع يقطع المستويين المتوازيين س، ص في $\overleftrightarrow{جـ أ}$ ، $\overleftrightarrow{ب د}$ على الترتيب .

∴ $\overleftrightarrow{جـ أ} // \overleftrightarrow{ب د}$.

في المثلثين جـ و أ ، ب و د يكون : ق ∡ و جـ أ = ق ∡ و د ب (بالتبادل)

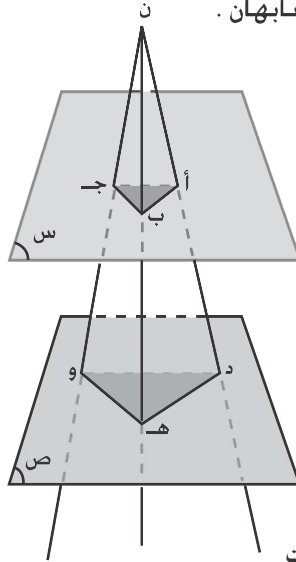
ق ∡ جـ أ و = ق ∡ و ب د (بالتبادل)

ق ∡ جـ و أ = ق ∡ ب و د (بالتقابل بالرأس)

∴ المثلثان جـ و أ ، ب و د متشابهان .

∴ $\frac{أ و}{و ب} = \frac{أ جـ}{د ب}$.

مثال إذا كانت ن نقطة خارج المستويين المتوازيين س، ص، ومر بالنقطة ن ثلاثة مستقيمات غير مستوية ،فقطعت المستوى س في أ، ب ،جـ، كما قطعت المستوى ص في د، هـ، و . برهن أن : المثلثين أ ب جـ ، د هـ و متشابهان .



المعطيات :

المستوى س // المستوى ص

ن نقطة خارج المستويين س ، ص .

$\overleftrightarrow{ن د}$ ، $\overleftrightarrow{ن هـ}$ ، $\overleftrightarrow{ن و}$ ثلاثة مستقيمات غير مستوية تقطع المستوى س في النقط أ، ب ،جـ ،وتقطع المستوى ص في النقط د، هـ، و، على الترتيب .

المطلوب :

إثبات أن المثلثين أ ب جـ ، د هـ و متشابهان .

البرهان :

كل مستقيمين مختلفين متقاطعين في ن من المستقيمات الثلاث يعينان مستوى وحيدا يقطع المستويان المتوازيان س، ص في مستقيمين متوازيين .

∴ $\overleftrightarrow{أ ب}$ // $\overleftrightarrow{د هـ}$ ، $\overleftrightarrow{ب جـ}$ // $\overleftrightarrow{هـ و}$ ، $\overleftrightarrow{أ جـ}$ // $\overleftrightarrow{د و}$.

∴ المثلثان ن أ ب، ن د هـ متشابهان ⟵ $\frac{ن أ}{ن د} = \frac{ن ب}{ن هـ} = \frac{أ ب}{د هـ}$ .... (١)

∴ المثلثان ن ب جـ ، ن هـ و متشابهان ⟵ $\frac{ن ب}{ن هـ} = \frac{ن جـ}{ن و} = \frac{ب جـ}{هـ و}$ .... (٢)

∴ المثلثان ن أ جـ، ن د و متشابهان ⟵ $\frac{ن أ}{ن د} = \frac{ن جـ}{ن و} = \frac{أ جـ}{د و}$ .... (٣)

من (١) و (٢) و (٣) ⟵ $\frac{أ ب}{د هـ} = \frac{ب جـ}{هـ و} = \frac{أ جـ}{د و}$

الأضلاع المتناظرة في المثلثين أ ب جـ، د هـ و متناسبة .

∴ المثلثان أ ب جـ ، د هـ و متشابهان .

مثال

س، ص، ع ثلاثة مستويات متوازية قُطعت بمستقيمين متخالفين ل ، م . وُصل أو فقطع المستوى ص في (ن) كما في الشكل المجاور .

أثبت أن (أ ب) / (ب جـ) = (د هـ) / (هـ و) .

المعطيات :

المستوى س // المستوى ص // المستوى ع ،

ل ، م متخالفان ،

ل يقطع المستويات س، ص، ع في النقط أ، ب ، جـ على الترتيب ،

م يقطع المستويات س، ص، ع في النقط د، هـ ، و على الترتيب ،

أو ∩ المستوى ص = { ن } .

المطلوب : إثبات أن (أ ب) / (ب جـ) = (د هـ) / (هـ و) .

البرهان :

أ جـ ، أ و متقاطعان في النقطة أ فيعينان مستوى وحيدا وليكن ق .

المستوى ق يقطع كلا من المستويين المتوازيين ص، ع في ب ن ، جـ و على الترتيب .

∴ ب ن // جـ و .

∴ المثلثان أ ب ن ، أ جـ و متشابهان .

∴ (أ ب) / (أ جـ) = (أ ن) / (أ و) ⟵ (أ ب) / (ب جـ) = (أ ن) / (ن و) .... (١)

أ و ، د و متقاطعان في النقطة و فيعينان مستوى وحيدا وليكن ك .

المستوى ك يقطع كلا من المستويين المتوازيين س، ص في د أ ، هـ ن على الترتيب .

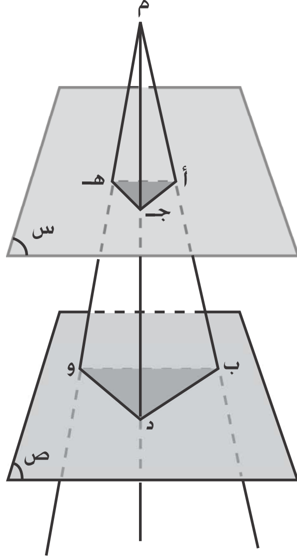
∴ هـ ن // د أ .

∴ المثلثان و ن هـ ، و أ د متشابهان .

∴ (ن و) / (أ و) = (هـ و) / (د و) ⟵ (أ ن) / (ن و) = (د هـ) / (هـ و) .... (٢)

من (١) و (٢) ∴ (أ ب) / (ب جـ) = (د هـ) / (هـ و)

مثال س، ص مستويان متوازيان، م نقطة خارجهما . م أ ب، م جـ د، م هـ و ثلاثة مستقيمات تقطع المستوى س في النقط أ، جـ، هـ، والمستوى ص في النقط ب، د، و فإذا كان م أ : أ ب = ٢ : ٣ وكان أ جـ = ٤ سم ، جـ هـ = ٣ سم، أ هـ = ٥ سم،



فجد : أ) أطوال أضلاع المثلث ب د و .

ب) مساحة المثلث ب د و .

المعطيات :

المستوى س // المستوى ص

م نقطة خارج المستويين س ، ص .

$\overleftrightarrow{\text{م ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{م د}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{م و}}$ ثلاثة مستقيمات تقطع المستوى س في النقط أ، جـ، هـ ، وتقطع المستوى ص في النقط ب، د، و على الترتيب ،

$\frac{\text{م أ}}{\text{أ ب}} = \frac{٢}{٣}$ ، أ جـ = ٤ سم ، جـ هـ = ٣ سم ،

أ هـ = ٥ سم .

المطلوب : إيجاد أ) أطوال أضلاع المثلث ب د و .

ب) مساحة المثلث ب د و .

الحل :

$\overleftrightarrow{\text{م ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{م د}}$ متقاطعان فيعينان مستوى وحيدا وليكن ع

المستوى ع يقطع كلا من المستويين المتوازيين س، ص في $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ب د}}$ على الترتيب .

∴ $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ // $\overleftrightarrow{\text{ب د}}$

وبالمثل يكون $\overleftrightarrow{\text{جـ هـ}}$ // $\overleftrightarrow{\text{د و}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أ هـ}}$ // $\overleftrightarrow{\text{ب و}}$

∴ المثلثان م أ جـ ، م ب د متشابهان

∴ $\frac{\text{م أ}}{\text{م ب}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{ب د}} = \frac{\text{م جـ}}{\text{م د}} = \frac{٢}{٥}$

$\frac{\text{م أ}}{\text{أ ب}} = \frac{٢}{٣} \leftarrow \frac{\text{م أ}}{\text{م ب}} = \frac{٢}{٥}$

$\frac{\text{أ جـ}}{\text{ب د}} = \frac{٢}{٥} \leftarrow \frac{٤}{\text{ب د}} = \frac{٢}{٥} \leftarrow$ ب د = ١٠ سم .

∴ المثلثان م جـ هـ ، م د و متشابهان

∴ $\frac{\text{م جـ}}{\text{م د}} = \frac{\text{جـ هـ}}{\text{د و}} = \frac{٢}{٥} \leftarrow \frac{٣}{\text{د و}} = \frac{٢}{٥} \leftarrow$ د و = $\frac{١٥}{٢}$ سم .

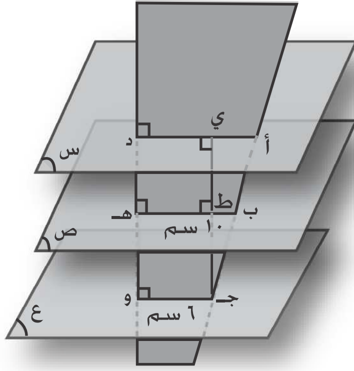
∴ المثلثان م أ هـ ، م ب و متشابهان

∴ $\frac{\text{م أ}}{\text{م ب}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{ب و}} = \frac{٢}{٥} \leftarrow \frac{٥}{\text{ب و}} = \frac{٢}{٥} \leftarrow$ ب و = $\frac{٢٥}{٢}$ سم .

المثلث ب د و قائم الزاوية في د لأن : $(\frac{٢٥}{٢})^٢ = (\frac{١٥}{٢})^٢ + (١٠)^٢$

مساحة المثلث ب د و = $\frac{١}{٢}$ (١٠) $(\frac{١٥}{٢})$ = ٣٧,٥ سم^٢ .

مثال يمثل الشكل المجاور ثلاثة مستويات متوازية س،ص،ع ،رسم القاطعان أ ب جـ، د هـ و فقطعا المستوى س في النقطتين أ،د والمستوى ص في النقطتين ب،هـ والمستوى ع في النقطتين جـ، و . فإذا كان القاطعان في مستوى واحد، $\overleftrightarrow{دهـ}$ ⊥ على المستويات الثلاثة، و هـ = ٣ سم ، و جـ = ٦ سم، هـ ب = ١٠ سم،هـ د = ٥ سم .



احسب طول كل من $\overline{أ د}$ ، $\overline{أ ب}$ ، $\overline{ب جـ}$.

الحل

$\overleftrightarrow{أ جـ}$ ، $\overleftrightarrow{د و}$ في مستوى واحد ويقطعان المستويات المتوازية س،ص،ع .

∴ $\overleftrightarrow{أ د}$ // $\overleftrightarrow{ب هـ}$ // $\overleftrightarrow{جـ و}$

نرسم $\overline{جـ ط ي}$ ⊥ على كل من $\overleftrightarrow{ب هـ}$ ، $\overleftrightarrow{أ د}$ وتقطعهما في ط،ي على الترتيب .

المثلث ب ط جـ قائم الزاوية : (ب جـ)^٢= (ب ط)^٢+ (ط جـ)^٢ = (٤)^٢ + (٣)^٢ = ٢٥

⟵ ب جـ = ٥ سم .

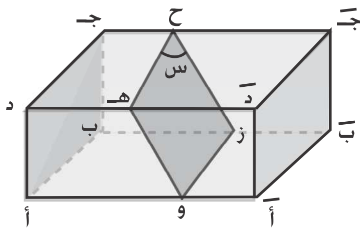
المثلثان ب ط جـ ، أ ي جـ متشابهان .

∴ $\frac{جـ ب}{ب أ} = \frac{جـ ط}{ط ي}$ ⟵ $\frac{٥}{ب أ} = \frac{٣}{٥}$ ⟵ ب أ = $\frac{٢٥}{٣}$

∴ $\frac{ب ط}{أ ي} = \frac{جـ ط}{جـ ي}$ ⟵ $\frac{٤}{أ ي} = \frac{٣}{٨}$ ⟵ أ ي = $\frac{٣٢}{٣}$

أ د = أ ي+ي د = $\frac{٣٢}{٣}$ + ٦ = $\frac{٥٠}{٣}$ سم .

مثال يمثل الشكل المجاور متوازي المستطيلات أ ب جـ د دَ جـَ بَ أَ ، إذا قطع المستوى س أحرفه $\overline{أ أَ}$ ، $\overline{ب بَ}$ ، $\overline{جـ جـَ}$ ، $\overline{د دَ}$ الجانبية في و،ز،ح،هـ على التوالي . أثبت أن الشكل هـ و ز ح متوازي أضلاع .



المعطيات :

أ ب جـ د دَ جـَ بَ أَ متوازي مستطيلات ، المستوى س قطع أحرفه الجانبية في و،ز،ح، هـ على التوالي .

المطلوب :

إثبات أن الشكل هـ و ز ح متوازي أضلاع .

البرهان :

المستويان أ أَ بَ ب ، جـ جَـ دَ د في متوازي المستطيلات متوازيان .

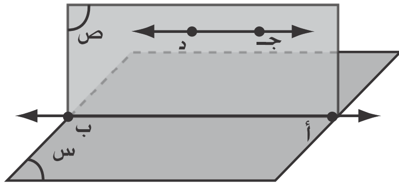
المستوى س يقطع هذين المستويين في $\overleftrightarrow{و ز}$ ، $\overleftrightarrow{هـ ح}$ على الترتيب ... فرضا

∴ $\overleftrightarrow{و ز}$ // $\overleftrightarrow{هـ ح}$ ....(١) وبالمثل $\overleftrightarrow{ح ز}$ // $\overleftrightarrow{هـ و}$ ....(٢)

من (١) و (٢) ينتج أن الشكل هـ و ز ح متوازي أضلاع ، وهو المطلوب .

نظرية (٣)

إذا تقاطع مستويان ورسم في أحدهما مستقيم يوازي المستوى الاخر، فإن هذا المستقيم يوازي خط تقاطع المستويين .



المعطيات :

المستوى س ∩ المستوى ص = $\overleftrightarrow{أ ب}$

$\overleftrightarrow{جـ د}$ // المستوى س ، $\overleftrightarrow{جـ د}$ ⊂ المستوى ص

المطلوب :

إثبات أن $\overleftrightarrow{جـ د}$ // $\overleftrightarrow{أ ب}$.

البرهان :

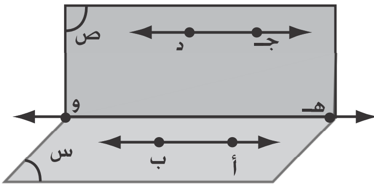
$\overleftrightarrow{جـ د}$ // المستوى س ، $\overleftrightarrow{جـ د}$ ⊂ المستوى ص ، $\overleftrightarrow{جـ د}$ ∩ المستوى س = ϕ

لكن $\overleftrightarrow{أ ب}$ ⊂ المستوى س ∴ $\overleftrightarrow{جـ د}$ ∩ $\overleftrightarrow{أ ب}$ = ϕ

لكن $\overleftrightarrow{جـ د}$ ، $\overleftrightarrow{أ ب}$ يقعان في المستوى ص .

∴ $\overleftrightarrow{أ ب}$ // $\overleftrightarrow{جـ د}$.

مثال س ،ص مستويان متقاطعان، رسم $\overleftrightarrow{أ ب}$ في المستوى س موازيا للمستوى ص، كما رسم $\overleftrightarrow{جـ د}$ في المستوى ص موازيا للمستوى س . برهن أن : $\overleftrightarrow{أ ب}$ // $\overleftrightarrow{جـ د}$.



المعطيات :

المستوى س ∩ المستوى ص = $\overleftrightarrow{هـ و}$ ،

$\overleftrightarrow{أ ب}$ ⊂ المستوى س ، $\overleftrightarrow{أ ب}$ // المستوى ص ،

$\overleftrightarrow{جـ د}$ ⊂ المستوى ص، $\overleftrightarrow{جـ د}$ // المستوى س ،

المطلوب : إثبات أن $\overleftrightarrow{أب} // \overleftrightarrow{جـد}$.

البرهان :

$\overleftrightarrow{جـد}$ ⊂ المستوى ص ، المستوى س ∩ المستوى ص = $\overleftrightarrow{هـو}$ ، $\overleftrightarrow{جـد}$ // المستوى س

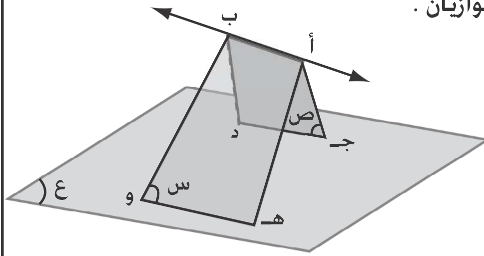
∴ $\overleftrightarrow{جـد} // \overleftrightarrow{هـو}$ . .... (١)

$\overleftrightarrow{أب}$ ⊂ المستوى س ، المستوى س ∩ المستوى ص = $\overleftrightarrow{هـو}$ ، $\overleftrightarrow{أب}$ // المستوى ص

∴ $\overleftrightarrow{أب} // \overleftrightarrow{هـو}$ . .... (٢)

من (١) و (٢) ∴ $\overleftrightarrow{أب} // \overleftrightarrow{جـد}$. « المستقيمان الموازيان لثالث في الفضاء متوازيان »

مثال إذا وازى مستقيم مستوى ، ومر بالمستقيم مستويان يقطعان المستوى المعلوم ، فبرهن أن خطي تقاطعهما معه متوازيان .



المعطيات :

$\overleftrightarrow{أب}$ // المستوى ع

المستوى س ∩ المستوى ص = $\overleftrightarrow{أب}$ ،

المستوى س ∩ المستوى ع = $\overleftrightarrow{هـو}$ ،

المستوى ص ∩ المستوى ع = $\overleftrightarrow{جـد}$ ،

المطلوب : إثبات أن $\overleftrightarrow{جـد} // \overleftrightarrow{هـو}$.

البرهان :

$\overleftrightarrow{أب}$ // المستوى ع ، $\overleftrightarrow{أب}$ ⊂ المستوى س ، المستوى س ∩ المستوى ع = $\overleftrightarrow{هـو}$

∴ $\overleftrightarrow{أب} // \overleftrightarrow{هـو}$ .... (١)

$\overleftrightarrow{أب}$ // المستوى ع ، $\overleftrightarrow{أب}$ ⊂ المستوى ص ، المستوى ص ∩ المستوى ع = $\overleftrightarrow{جـد}$

∴ $\overleftrightarrow{أب} // \overleftrightarrow{جـد}$ .... (٢)

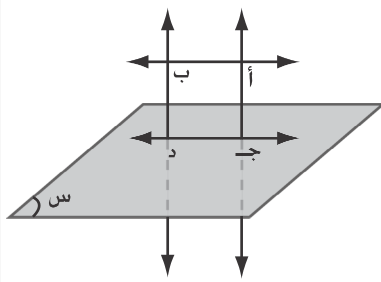
من (١) و (٢) ∴ $\overleftrightarrow{جـد} // \overleftrightarrow{هـو}$. « المستقيمان الموازيان لثالث في الفضاء متوازيان »

مثال أ، ب نقطتان تقعان على مستقيم يوازي المستوى س . مر بالنقطتين مستقيمان متوازيان قطعا المستوى س في جـ، د على الترتيب . أثبت أن : أ جـ = ب د، أ ب = جـ د .

المعطيات : $\overleftrightarrow{أب}$ // المستوى س ، $\overleftrightarrow{أجـ} // \overleftrightarrow{بد}$ ، $\overleftrightarrow{بد}$ ∩ المستوى س = { د } ، $\overleftrightarrow{أجـ}$ ∩ المستوى س = {جـ} .

المطلوب : إثبات أن أ جـ = ب د ، أ ب = جـ د .

البرهان :



أ جـ // ب د فيعينان مستوى وحيدا وليكن ص .

أ ب // المستوى س ، أ ب ⊂ المستوى ص ،

المستوى س ∩ المستوى ص = جـ د

∴ أ ب // جـ د

بما أن : أ ب // جـ د ، أ جـ // ب د ∴ أ ب جـ د متوازي أضلاع .

∴ أ جـ = ب د ، أ ب = جـ د .

مثال أ ب // جـ د ، أ ب يقع في المستوى س ، جـ د يقع في المستوى ص ، المستوى س والمستوى ص يتقاطعان في هـ و .

برهن أن : هـ و يوازي كلا من أ ب ، جـ د .

المعطيات :

أ ب // جـ د ،

المستوى س ∩ المستوى ص = هـ و ،

أ ب ⊂ المستوى س ، جـ د ⊂ المستوى ص ،

المطلوب : إثبات أن هـ و يوازي كلا من أ ب ، جـ د .

البرهان :

أ ب ⊂ المستوى س ، جـ د ⊂ المستوى ص ، أ ب // جـ د

∴ أ ب // المستوى ص ، جـ د // المستوى س .

أ ب ⊂ المستوى س ، أ ب // المستوى ص ، المستوى س ∩ المستوى ص = هـ و

∴ أ ب // هـ و . . . . . (١)

جـ د ⊂ المستوى ص ، جـ د // المستوى س ، المستوى س ∩ المستوى ص = هـ و

∴ جـ د // هـ و . . . . . (٢)

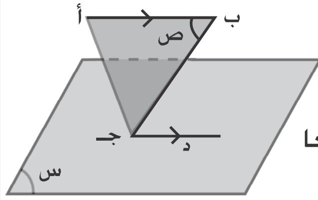
من (١) و (٢) ∴ هـ و // أ ب // جـ د « المستقيمان الموازيان لثالث في الفضاء متوازيان »

مثال أثبت أنه إذا وازى مستقيم مستوى ، فالمستقيم الذي يمر بأية نقطة من نقط المستوى موازيا للمستقيم المعلوم يقع بتمامه في المستوى .

المعطيات :

ليكن س المستوى المعلوم ، أ ب مستقيم معلوم يوازي المستوى س ، جـ نقطة معلومة في المستوى س .

المطلوب : إثبات أن المستقيم المرسوم من النقطة جـ موازيا المستقيم أ ب يقع بتمامه في المستوى س .



البرهان :

$\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ والنقطة جـ يعينان مستوى وحيدا وليكن ص .

المستويان س،ص اشتركا في نقطة (جـ) فلا بد أن يتقاطعا في مستقيم نفرضه $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$.

$\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // المستوى س (معطى)

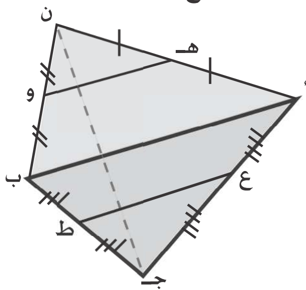
∴ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ (المستقيم جـ د هو خط تقاطع المستويين س، ص)

∴ $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ يقع بتمامه في المستوى س .

وبما أنه لا يمكن رسم مستقيم اخر من جـ ويوازي $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ فيكون $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ هو المستقيم المرسوم من جـ موازيا للمستقيم أ ب وواقعا بتمامه في المستوى س .

أمثلة متنوعة

مثال ليكن أ ب جـ مثلث، ن نقطة خارج مستواه، إذا كان $\overline{\text{هـ و}}$ يمر بمنتصفي $\overline{\text{ن أ}}$، $\overline{\text{ن ب}}$، وكان $\overline{\text{ع ط}}$ يمر بمنصفي $\overline{\text{أ جـ}}$، $\overline{\text{ب جـ}}$، أثبت أن $\overline{\text{هـ و}}$ // $\overline{\text{ع ط}}$.



المعطيات : أ ب جـ مثلث،ن نقطة خارج مستواه .

$\overline{\text{هـ و}}$ تصل بين منتصفي $\overline{\text{أ ن}}$ ، $\overline{\text{ن ب}}$ ،

$\overline{\text{ع ط}}$ تصل بين منتصفي $\overline{\text{أ جـ}}$ ، $\overline{\text{ب جـ}}$ ،

المطلوب : إثبات أن $\overline{\text{هـ و}}$ // $\overline{\text{ع ط}}$.

البرهان : في المثلث ن أ ب تكون $\overline{\text{هـ و}}$ // $\overline{\text{أ ب}}$ .... (١)

القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين في مثلث توازي الضلع الثالث وطولها يساوي نصف طول الضلع الثالث .

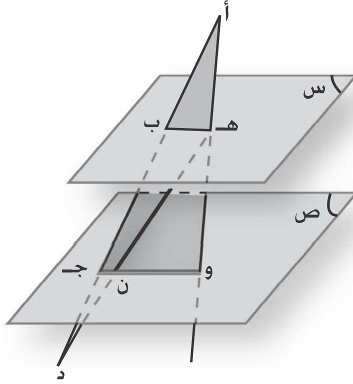
في المثلث أ جـ ب تكون $\overline{\text{ع ط}}$ // $\overline{\text{أ ب}}$ .... (٢)

من (١) و (٢) ∴ $\overline{\text{هـ و}}$ // $\overline{\text{ع ط}}$. « المستقيمان الموازيان لثالث في الفضاء متوازيان »

مثال س، ص مستويان متوازيان، أ ب جـ د، أ هـ و قاطعان يقطعان المستوى س في ب، هـ على الترتيب ويقطعان المستوى ص في جـ، و على الترتيب، وصل $\overleftrightarrow{\text{د هـ}}$ فقطع المستوى ص في (ن) . أثبت أن :

أ) النقط و، ن، جـ على استقامة واحدة ,

ب) إذا كان أ ب = ٤ سم، ب جـ = ب هـ = ٦ سم ، جـ د = ٣ سم . احسب طول $\overline{\text{و ن}}$.



المعطيات :

المستوى س // المستوى ص

$\overleftrightarrow{\text{أ د}} \cap \overleftrightarrow{\text{أ و}} = \{\text{أ}\}$ ،

$\overleftrightarrow{\text{أ د}} \cap$ المستوى س = {ب} ،

$\overleftrightarrow{\text{أ د}} \cap$ المستوى ص = {جـ} ،

$\overleftrightarrow{\text{أ و}} \cap$ المستوى س = {هـ} ،

$\overleftrightarrow{\text{أ و}} \cap$ المستوى ص = { و } ،

$\overleftrightarrow{\text{د هـ}} \cap$ المستوى ص = { ن } ، أ ب = ٤ سم، ب جـ = ب هـ = ٦ سم، جـ د = ٣ سم .

المطلوب : إثبات أن أ) النقط و، ن، جـ على استقامة واحدة .

ب) إيجاد طول $\overline{\text{و ن}}$.

البرهان للفرع (أ) :

$\overleftrightarrow{\text{أ د}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أ و}}$ متقاطعان فيعينان مستوى وحيدا وليكن ع .

المستوى ع $\cap$ المستوى ص = $\overleftrightarrow{\text{و جـ}}$

النقطتان د، هـ $\in$ المستوى ع $\longleftarrow$ $\overleftrightarrow{\text{د هـ}} \subset$ المستوى ع

لكن { ن } $\in \overleftrightarrow{\text{د هـ}}$ $\longleftarrow$ { ن } $\in$ المستوى ع

$\therefore$ النقط و، ن، جـ $\in$ المستوى ع

كذلك النقط و، ن، جـ $\in$ المستوى ص

$\therefore$ النقط و، ن، جـ $\in$ (المستوى ع $\cap$ المستوى ص) « المستويان يتقاطعان في مستقيم »

$\therefore$ النقط و، ن، جـ على استقامة واحدة .

الفرع (ب) .

المستوى ع يقطع المستويين المتوازيين س، ص في $\overleftrightarrow{\text{هـ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{و جـ}}$ على الترتيب .

$\therefore$ $\overleftrightarrow{\text{هـ ب}} \parallel \overleftrightarrow{\text{و جـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{هـ ب}} \parallel \overleftrightarrow{\text{ن جـ}}$ « النقط و، ن، جـ على استقامة واحدة .»

∴ المثلثان أ هـ ب ، أ و جـ متشابهان .

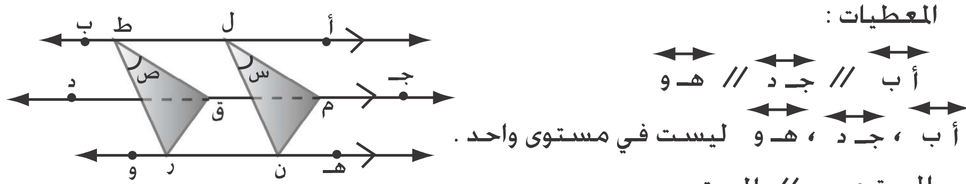
∴ أ ب / أ جـ = هـ ب / و جـ ⟵ ٤ / ١٠ = ٦ / و جـ ⟵ و جـ = ١٥ سم .

∴ المثلثان د ن جـ ، د هـ ب متشابهان .

∴ دجـ / د ب = جـ ن / ب هـ ⟵ ٣ / ٩ = جـ ن / ٦ ⟵ جـ ن = ٢ سم .

∴ و ن = ١٥ – ٢ = ١٣ سم .

مثال أ ب ، جـ د ، هـ و ثلاثة مستقيمات متوازية ليست في مستوى واحد ، قطعها المستوى س في النقط ل ، م ، ن ، وقطعها مستوى اخر مثل ص في النقط ط ، ق ، ر . فإذا كان المستوى س // المستوى ص . فأثبت أن المثلثين ل م ن ، ط ق ر يتطابقان .



المعطيات :

أ ب // جـ د // هـ و

أ ب ، جـ د ، هـ و ليست في مستوى واحد .

المستوى س // المستوى ص ،

المستوى س يقطع المستقيمات أ ب ، جـ د ، هـ و في النقط ل ، م ، ن على الترتيب ،

المستوى ص يقطع المستقيمات أ ب ، جـ د ، هـ و في النقط ط ، ق ، ر على الترتيب .

المطلوب : إثبات أن المثلثين ل م ن ، ط ق ر يتطابقان .

البرهان :

أ ب ، جـ د متوازيان فيعينان مستوى وحيدا وليكن ع .

المستوى ع يقطع المستويين المتوازيين س ، ص في ل م ، ط ق على الترتيب .

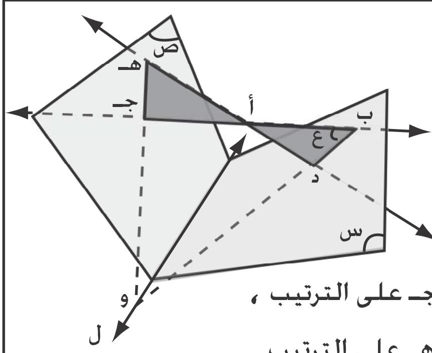
∴ ل م // ط ق ، لكن أ ب // جـ د

∴ الشكل ل ط ق م متوازي أضلاع . ∴ ل م = ط ق

وبالمثل يكون م ن = ق ر ، ل ن = ط ر .

∴ المثلثان ل م ن ، ط ق ر يتطابقان لتساوي أطوال أضلاعهما المتناظرة .

مثال المستويان س ، ص متقاطعان في ل ، النقطة (أ) خارج المستويين ، رسم المستقيمان ب أ جـ ، د أ هـ فقطعا المستوى س في النقطتين ب ، د على الترتيب وقطعا المستوى ص في النقطتين جـ ، هـ على الترتيب . إذا علمت أن ب د ، جـ هـ ليسا متوازيين . أثبت أن ب د ، جـ هـ يتقاطعان في نقطة (و) تنتمي للمستقيم ل .



المعطيات :

المستوى س ∩ المستوى ص = $\overleftrightarrow{ل}$ ،

النقطة(أ) خارج المستويين س، ص ،

$\overleftrightarrow{ب جـ}$ ∩ $\overleftrightarrow{د هـ}$ = { أ } ،

$\overleftrightarrow{ب جـ}$ يقطع المستويين س، ص في النقطتين ب، جـ على الترتيب ،

$\overleftrightarrow{د هـ}$ يقطع المستويين س، ص في النقطتين د ، هـ على الترتيب .

$\overleftrightarrow{ب د}$ ، $\overleftrightarrow{جـ هـ}$ ليسا متوازيين .

المطلوب : إثبات أن $\overleftrightarrow{ب د}$ ، $\overleftrightarrow{جـ هـ}$ يتقاطعان في نقطة (و) تنتمي للمستقيم ل .

البرهان :

$\overleftrightarrow{ب جـ}$ ، $\overleftrightarrow{د هـ}$ متقاطعان في النقطة (أ) فيعينان مستوى وحيدا وليكن ع .

∴ النقط ب، د، جـ ، هـ ∈ المستوى ع .

∴ $\overleftrightarrow{ب د}$ ⊂ المستوى ع ، $\overleftrightarrow{جـ هـ}$ ⊂ المستوى ع

$\overleftrightarrow{ب د}$ ، $\overleftrightarrow{جـ هـ}$ ليسا متوازيين ويجمعهما المستوى ع (أي ليسا متخالفين) .

∴ $\overleftrightarrow{ب د}$ ، $\overleftrightarrow{جـ هـ}$ يتقاطعان في نقطة نفرضها (و)

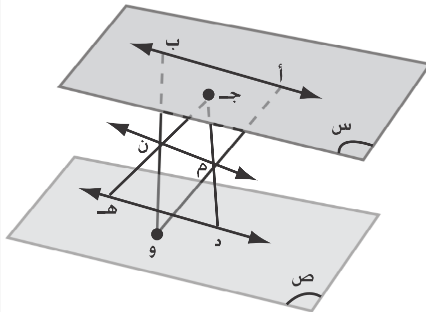
$\overleftrightarrow{ب د و}$ ⊂ المستوى س ، $\overleftrightarrow{هـ جـ و}$ ⊂ المستوى ص

∴ { و } ∈ المستوى س ، { و } ∈ المستوى ص

∴ { و } ∈ (المستوى س ∩ المستوى ص)

∴ { و } ∈ $\overleftrightarrow{ل}$ « خط تقاطع المستويين س، ص »

مثال في الشكل المجاور :



س ص مستويان متوازيان .

النقط أ، ب، جـ ∈ المستوى س ، جـ ∉ $\overleftrightarrow{أ ب}$

النقط د، هـ، و ∈ المستوى ص ، و ∉ $\overleftrightarrow{د هـ}$

$\overleftrightarrow{أ ب}$ // $\overleftrightarrow{د هـ}$.

إذا تقاطع المستويان و أ ب ، جـ د هـ في $\overleftrightarrow{م ن}$

فأثبت أن : $\overleftrightarrow{م ن}$ يوازي كلا من المستويين س، ص .

الحل :

$\overleftrightarrow{أ ب} \subset$ المستوى و أ ب ، $\overleftrightarrow{د هـ} \subset$ المستوى جـ د هـ ، $\overleftrightarrow{أ ب}$ // $\overleftrightarrow{د هـ}$

∴ $\overleftrightarrow{أ ب}$ // المستوى جـ د هـ ، $\overleftrightarrow{د هـ}$ // المستوى و أ ب

إذا وازى مستقيم خارج مستوى مستقيما في المستوى فإنه يوازي هذا المستوى .

لكن المستوى و أ ب ∩ المستوى جـ د هـ = $\overleftrightarrow{م ن}$

إذا تقاطع مستويان ورسم في احدهما مستقيم يوازي المستوى الاخر، فإن هذا المستقيم يوازي خط تقاطع المستويين .

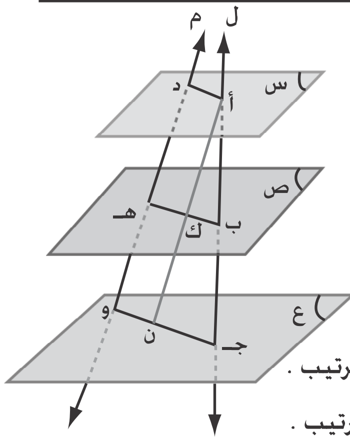
∴ $\overleftrightarrow{م ن}$ يوازي كلا من $\overleftrightarrow{أ ب}$ ، $\overleftrightarrow{د هـ}$

لكن $\overleftrightarrow{أ ب} \subset$ المستوى س ∴ $\overleftrightarrow{م ن}$ // المستوى س ... (١)

لكن $\overleftrightarrow{د هـ} \subset$ المستوى ص ∴ $\overleftrightarrow{م ن}$ // المستوى ص ... (٢)

من (١) و (٢) ∴ $\overleftrightarrow{م ن}$ يوازي كلا من المستويين س، ص .

مثال س، ص، ع ثلاثة مستويات متوازية ، المستقيم ل يقطعها في النقط أ، ب، جـ ، والمستقيم م يقطعها في النقط د، هـ، و . وكان ل، م يقعان في مستوى واحد وكان $\frac{د هـ}{هـ و} = \frac{٢}{٣}$ ، أ د = ٣سم ، جـ و = ١٣ سم . احسب طول $\overline{ب هـ}$.



المعطيات :

المستوى س // المستوى ص // المستوى ع .

$\overleftrightarrow{ل}$ يقطع المستويات س، ص، ع في النقط أ، ب، جـ على الترتيب .

$\overleftrightarrow{م}$ يقطع المستويات س، ص، ع في النقط د، هـ، و على الترتيب .

$\frac{د هـ}{هـ و} = \frac{٢}{٣}$ ، أ د = ٣سم ، جـ و = ١٣ سم .

المطلوب : احسب طول $\overline{ب هـ}$.

البرهان :

$\overleftrightarrow{ل}$ ، $\overleftrightarrow{م}$ يعينان مستوى وحيدا يقطع المستويات الثلاثة س، ص، ع في $\overleftrightarrow{أ د}$ ، $\overleftrightarrow{ب هـ}$ ، $\overleftrightarrow{جـ و}$.

∴ $\overleftrightarrow{أ د}$ // $\overleftrightarrow{ب هـ}$ // $\overleftrightarrow{جـ و}$

نرسم $\overleftrightarrow{أ ك}$ // $\overleftrightarrow{م}$ يقطع $\overline{ب هـ}$ في النقطة (ك) ، $\overline{جـ و}$ في النقطة (ن) .

∴ الشكل ك ن و هـ متوازي أضلاع وكذلك الشكل أ ك هـ د متوازي أضلاع .

∴ ك هـ = ن و = أ د = ٣ سم ، جـ ن = جـ و − ن و = ١٣ − ٣ = ١٠ سم .

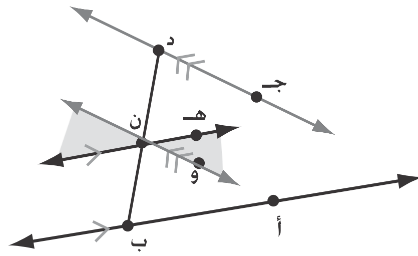
∴ المثلثان أ ب ك ، أ جـ ن متشابهان .

$\therefore \frac{\text{ب ك}}{\text{جـ ن}} = \frac{\text{أ ك}}{\text{أ ن}}$ لكن $\frac{\text{أ ك}}{\text{ك ن}} = \frac{\text{د هـ}}{\text{هـ و}} = \frac{٢}{٣} \longleftarrow \frac{\text{أ ك}}{\text{أ ن}} = \frac{٢}{٥}$

$\longleftarrow \frac{\text{ب ك}}{١٠} = \frac{٢}{٥} \longleftarrow$ ب ك = ٤ سم .

$\therefore$ ب هـ = ب ك+ك هـ = ٤+٣ = ٧ سم .

مثال $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ مستقيمان متخالفان . وصل $\overline{\text{ب د}}$ ثم فرضت عليه نقطة مثل ن ، فإذا رسم من هذه النقطة $\overleftrightarrow{\text{ن هـ}}$ // $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ن و}}$ // $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$. فأثبت أن المستوى ن هـ و يوازي كلا من $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$.



المعطيات :

$\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ متخالفان ، النقطة (ن) $\in$ $\overline{\text{ب د}}$

$\overleftrightarrow{\text{ن هـ}}$ // $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ن و}}$ // $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$.

المطلوب :

إثبات أن المستوى ن هـ و يوازي كلا من $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$.

البرهان :

$\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{ن هـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ن هـ}}$ $\subset$ المستوى ن هـ و $\therefore$ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // المستوى ن هـ و . . . (١)

$\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ // $\overleftrightarrow{\text{ن و}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ن و}}$ $\subset$ المستوى ن هـ و $\therefore$ $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ // المستوى ن هـ و . . . (٢)

من (١) و (٢) $\therefore$ المستوى ن هـ و يوازي كلا من $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$.

مثال $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ مستقيمان متخالفان يوازيان المستوى س ويقعان في جهتين مختلفتين منه ، فإذا قطعت $\overline{\text{أ جـ}}$ ، $\overline{\text{ب د}}$ المستوى س في النقطتين هـ ، و على الترتيب فأثبت أن $\frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ جـ}} = \frac{\text{ب و}}{\text{و د}}$.

المعطيات :

$\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ متخالفان ويوازيان المستوى س ، ويقعان في جهتين مختلفتين منه .

$\overline{\text{أ جـ}}$ $\cap$ المستوى س = {هـ} ، $\overline{\text{ب د}}$ $\cap$ المستوى س = { و }

المطلوب : إثبات أن $\frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ جـ}} = \frac{\text{ب و}}{\text{و د}}$.

البرهان :

نصل $\overline{\text{أ د}}$ فيقطع المستوى س في النقطة (م) ونصل $\overline{\text{م هـ}}$ ، $\overline{\text{م و}}$.

جـ د // المستوى س ،ومر به المستوى جـ د أ الذي يقطع المستوى س في هـ م .

∴ جـ د // هـ م

∴ المثلثان أ هـ م ، أ جـ د متشابهان . ∴ $\frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ جـ}} = \frac{\text{أ م}}{\text{م د}}$ .... (١)

وبالمثل أ ب // المستوى س ،ومر به المستوى أ ب د الذي يقطع المستوى س في م و .

∴ أ ب // م و

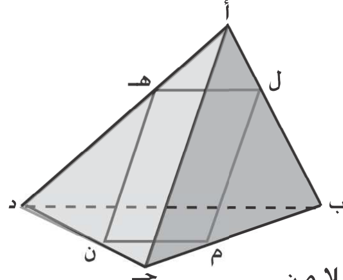
∴ المثلثان م د و ، أ د ب متشابهان ∴ $\frac{\text{ب و}}{\text{و د}} = \frac{\text{أ م}}{\text{م د}}$ .... (٢)

من (١) و (٢) ∴ $\frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ جـ}} = \frac{\text{ب و}}{\text{و د}}$.

مثال أ ب جـ د هرم ثلاثي رأسه (أ) وقاعدته المثلث ب جـ د ،رسم المستوى ل م ن هـ بحيث يوازي كلا من أ جـ ، ب د فقطع أ ب ، أ د ، جـ ب ، جـ د في النقط ل ، هـ ، م ، ن على الترتيب كما في الشكل المجاور .

أثبت أن المستوى ل م ن هـ يقسم أ ب ، أ د ، جـ ب ، جـ د إلى أجزاء متناسبة

أي أن : $\frac{\text{أ ل}}{\text{ل ب}} = \frac{\text{جـ م}}{\text{م ب}} = \frac{\text{جـ ن}}{\text{ن د}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ د}}$.



المعطيات :

أ ب جـ د هرم ثلاثي ، رسم المستوى ل م ن هـ يوازي كلا من الحرفين المتخالفين أ جـ ، ب د ويقطع الأحرف أ ب ، أ د ، جـ ب ، جـ د في النقط ل ، هـ ، م ، ن على الترتيب .

المطلوب : إثبات أن $\frac{\text{أ ل}}{\text{ل ب}} = \frac{\text{جـ م}}{\text{م ب}} = \frac{\text{جـ ن}}{\text{ن د}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ د}}$.

البرهان :

أ جـ // المستوى ل م ن هـ ، أ جـ ⊂ المستوى أ ب جـ ،

المستوى أ ب جـ ∩ المستوى ل م ن هـ = ل م

∴ أ جـ // ل م ⟵ أ جـ // ل م كذلك وبنفس الطريقة أ جـ // هـ ن

وبالمثل يكون ل هـ // ب د ، م ن // ب د

∴ المثلثان أ ب جـ ، ل ب م متشابهان : $\frac{\text{أ ل}}{\text{ل ب}} = \frac{\text{جـ م}}{\text{م ب}}$ .... (١)

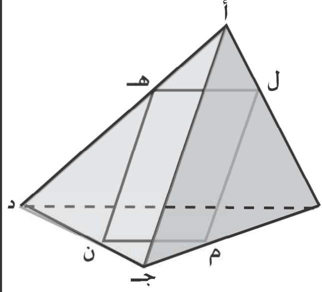
∴ المثلثان جـ م ن ، جـ ب د متشابهان : $\frac{\text{جـ م}}{\text{م ب}} = \frac{\text{جـ ن}}{\text{ن د}}$ .... (٢)

∴ المثلثان د هـ ن ، د أ جـ متشابهان : $\frac{\text{جـ ن}}{\text{ن د}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ د}}$ . . . . . (٣)

من (١) و (٢) و (٣) ∴ $\frac{\text{أ ل}}{\text{ل ب}} = \frac{\text{جـ م}}{\text{م ب}} = \frac{\text{جـ ن}}{\text{ن د}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ د}}$.

مثال أ ب جـ د هرم ثلاثي رأسه (أ) وقاعدته المثلث ب جـ د، رسم المستوى ل م ن هـ بحيث يوازي كلا من $\overline{\text{أ جـ}}$، $\overline{\text{ب د}}$ فقطع $\overline{\text{أ ب}}$، $\overline{\text{أ د}}$، $\overline{\text{جـ ب}}$، $\overline{\text{جـ د}}$ في النقط ل، هـ، م، ن على الترتيب كما في الشكل المجاور .

أثبت أن الشكل ل م ن هـ متوازي أضلاع .



المعطيات :

أ ب جـ د هرم ثلاثي ، رسم المستوى ل م ن هـ يوازي كلا من الحرفين المتخالفين $\overline{\text{أ جـ}}$ ، $\overline{\text{ب د}}$ ويقطع الأحرف $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ د}}$ $\overline{\text{جـ ب}}$، $\overline{\text{جـ د}}$ في النقط ل، هـ، م، ن على الترتيب .

المطلوب : إثبات أن الشكل ل م ن هـ متوازي أضلاع .

البرهان :

$\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ // المستوى ل م ن هـ ، $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ ⊂ المستوى أ ب جـ ،

المستوى أ ب جـ ∩ المستوى ل م ن هـ = $\overleftrightarrow{\text{ل م}}$

∴ $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ // $\overleftrightarrow{\text{ل م}}$ ⟵ $\overline{\text{أ جـ}}$ // $\overline{\text{ل م}}$ . . . (١) وبنفس الطريقة $\overline{\text{أ جـ}}$ // $\overline{\text{هـ ن}}$ . . . (٢)

من (١) و (٢) ∴ $\overline{\text{ل م}}$ // $\overline{\text{هـ ن}}$ . . . (*) « المستقيمان الموازيان لثالث في الفضاء متوازيان »

$\overleftrightarrow{\text{ب د}}$ // المستوى ل م ن هـ ، $\overleftrightarrow{\text{ب د}}$ ⊂ المستوى ب جـ د ،

المستوى ب جـ د ∩ المستوى ل م ن هـ = $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$

∴ $\overleftrightarrow{\text{ب د}}$ // $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ ⟵ $\overline{\text{ب د}}$ // $\overline{\text{م ن}}$ . . . (٣) وبنفس الطريقة $\overline{\text{ب د}}$ // $\overline{\text{ل هـ}}$ . . . (٤)

من (٣) و (٤) ∴ $\overline{\text{م ن}}$ // $\overline{\text{ل هـ}}$ . . . (**) « المستقيمان الموازيان لثالث في الفضاء متوازيان »

من (*) و (**) ∴ الشكل ل م ن هـ متوازي أضلاع .
«لأن كل ضلعين متقابلين فيه متوازيان ».

التعامد

درسنا الأوضاع المختلفة لمستقيم ومستوى في الفضاء ، وعلمت أن المستقيم قد يكون موازيا للمستوى ، أو يقع بتمامه في المستوى ، أو يكون قاطعا له في نقطة . وفي حالة ما إذا كان المستقيم قاطعا للمستوى،فإنه قد يكون عموديا عليه أو مائلا .

تعريف :

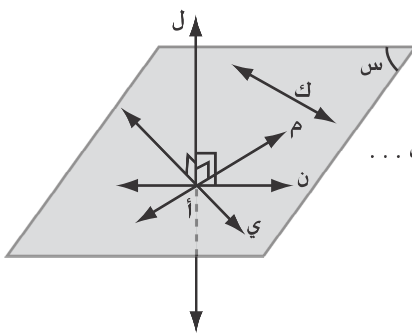
يكون المستقيم ل عموديا على المستوى س (أو المستوى س عموديا على المستقيم ل) إذا كان المستقيم ل عموديا على جميع المستقيمات الواقعة في المستوى س .

ونعبر عن ذلك بالرموز كالاتي : $\overleftrightarrow{ل} \perp$ المستوى س

ففي الشكل المجاور :

$\overleftrightarrow{ل} \cap$ المستوى س = { أ } ، $\overleftrightarrow{ل} \perp$ المستوى س

وهو بذلك عمودي على كل المستقيمات ي،م، ن،ك . . . الواقعة في المستوى س .

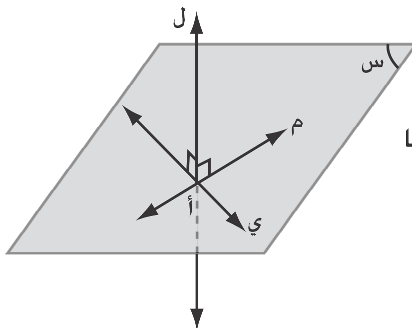


نظرية (١) (دون برهان) :

المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين في مستوى يكون عموديا على مستواهما .

ففي الشكل المجاور :

م،ي مستقيمان في المستوى س ومتقاطعان في النقطة (أ) والمستقيم ل عمودي على كل منهما من النقطة (أ) فيكون : $\overleftrightarrow{ل} \perp$ المستوى س



وبشكل عام :

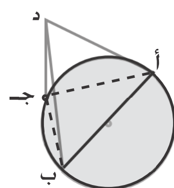
المستقيم العمودي على مستوى يكون عموديا على كل مستقيم فيه .

مثال

يمثل الشكل المجاور دائرة قطرها $\overline{أب}$ ، جـ نقطة على الدائرة

حيث $\overline{جـ د}$ تعامد مستوى الدائرة .

أثبت أن : $\overline{أجـ} \perp$ المستوى د جـ ب



المعطيات :

$\overline{\text{أ ب}}$ قطر في دائرة ، $\overline{\text{د جـ}}$ يعامد مستوى الدائرة .

المطلوب : إثبات أن $\overline{\text{أ جـ}}$ يعامد المستوى د ب جـ

البرهان :

$\overline{\text{أ ب}}$ قطر في الدائرة ، إذن المثلث أ ب جـ قائم الزاوية في جـ (الزاوية المحيطية في الدائرة والمقابلة للقطر هي قائمة) أي أن $\overline{\text{أ جـ}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$ ... (١)

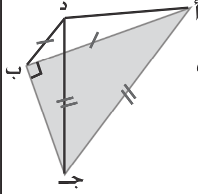
بما أن $\overline{\text{د جـ}}$ يعامد مستوى الدائرة إذن $\overline{\text{د جـ}} \perp \overline{\text{أ جـ}}$ ... (٢)

من (١) و (٢) $\overline{\text{أ جـ}}$ عمودي على كل من $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{جـ د}}$

($\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{جـ د}}$ متقاطعتان، ومحتوتان في المستوى د جـ ب)

∴ $\overline{\text{أ جـ}}$ عمودي على المستوى د جـ ب .

مثال أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب، د نقطة ليست في مستوى هذا المثلث، بحيث إن ب د = ب أ ، د جـ = جـ أ . أثبت أن $\overline{\text{جـ ب}}$ يعامد مستوى المثلث أ ب د .



المعطيات :

أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب، د نقطة ليست في مستوى هذا المثلث بحيث إن ب د = ب أ ، د جـ = جـ أ .

المطلوب :

إثبات أن $\overline{\text{جـ ب}} \perp$ مستوى المثلث أ ب د

البرهان :

بما أن المثلث أ ب جـ قائم الزاوية في ب ∴ $\overline{\text{جـ ب}} \perp \overline{\text{ب أ}}$ . . . . (١)

كذلك (ب جـ)^{2} = (جـ أ)^{2} ـ (ب أ)^{2}

= (د جـ)^{2} ـ (ب د)^{2} (لأن ب د = ب أ ، د جـ = جـ أ)

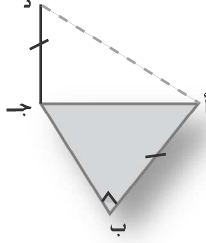
∴ (د جـ)^{2} = (ب جـ)^{2} + (ب د)^{2} ∴ ق $\measuredangle$ د ب جـ = 90° ∴ $\overline{\text{جـ ب}} \perp \overline{\text{ب د}}$ . . . . (٢)

∴ من (١) و (٢) $\overline{\text{جـ ب}}$ عمودي على كل من $\overline{\text{ب أ}}$ ، $\overline{\text{ب د}}$.

($\overline{\text{ب أ}}$ ، $\overline{\text{ب د}}$ متقاطعتان ، ومحتوتان في المستوى أ ب د)

∴ $\overline{\text{جـ ب}} \perp$ مستوى المثلث أ ب د

مثال أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب . أقيم من (جـ) عمود على مستوى المثلث وعينت النقطة (د) على هذا العمود بحيث أ ب = جـ د = ٢ ب جـ أثبت أن أ د = ٣ ب جـ .



المعطيات :

أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب، د نقطة خارج مستوى المثلث ،

$\overline{دجـ} \perp$ مستوى المثلث أ ب جـ ، أ ب = جـ د = ٢ ب جـ

المطلوب :

أثبت أن أ د = ٣ ب جـ

البرهان :

$\overline{دجـ} \perp$ مستوى المثلث أ ب جـ ، $\overline{أجـ} \subset$ المستوى أ ب جـ $\therefore$ $\overline{دجـ} \perp \overline{أجـ}$

$\therefore$ المثلث د جـ أ قائم الزاوية في جـ

$\therefore$ $(أد)^2 = (أجـ)^2 + (جـد)^2$

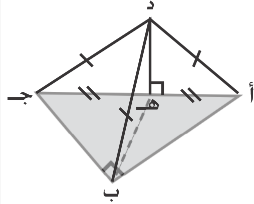
$= (أب)^2 + (بجـ)^2 + (جـد)^2$

$= (٢ بجـ)^2 + (بجـ)^2 + (٢ بجـ)^2$

$= ٩ (بجـ)^2$

$\therefore$ أ د = ٣ ب جـ

مثال أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب . والنقطة (د) مفروضة خارج مستواه وعلى أبعاد متساوية من رؤوسه ، فإذا كانت (هـ) منتصف $\overline{أجـ}$ ، فأثبت أن $\overleftrightarrow{دهـ}$ يعامد المستوى أ ب جـ .



المعطيات :

أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب . النقطة (د) خارج مستوى المثلث أ ب جـ ، د أ = د جـ = د ب ، النقطة (هـ) منتصف $\overline{أجـ}$

المطلوب :

إثبات أن $\overleftrightarrow{دهـ} \perp$ المستوى أ ب جـ

البرهان :

نصل $\overline{بهـ}$ $\therefore$ ب هـ = $\frac{1}{2}$ أ جـ = أ هـ طول القطعة المستقيمة الواصلة بين رأس القائمة ومنتصف الوتر يساوي نصف طول الوتر .

$\overline{دهـ} \perp \overline{أجـ}$ ... (١) ($\overline{دهـ}$ متوسط في المثلث المتساوي الساقين أ د جـ)

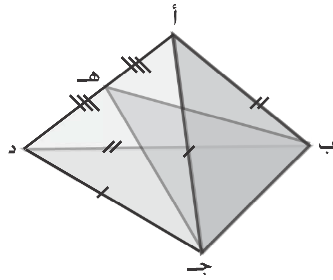
المثلثان أ هـ د ، د هـ ب فيهما : أ هـ = ب هـ ، أ د = ب د ، $\overline{دهـ}$ مشترك

$\therefore$ المثلثان أ هـ د ، د هـ ب متطابقان

$\therefore$ ق $\measuredangle$ أ هـ د = ق $\measuredangle$ د هـ ب = ٩٠° $\therefore$ $\overline{دهـ} \perp \overline{هـب}$ ... (٢)

من (١) و (٢) ∴ د هـ عمودي على كل من أ جـ ، هـ ب المتقاطعتان والمحتوتان في المستوى أ ب جـ .

∴ د هـ ⊥ المستوى أ ب جـ



مثال أ ب جـ د هرم ثلاثي فيه أ ب = ب د ، أ جـ = جـ د
هـ منتصف أ د (انظر الشكل المجاور) .

أثبت أن :

أ) أ د يعامد المستوى هـ ب جـ

ب) أ د يعامد ب جـ

المعطيات : أ ب جـ د هرم ثلاثي فيه أ ب = ب د ، أ جـ = جـ د ، هـ منصف أ د .

المطلوب إثبات أن : أ) أ د يعامد المستوى هـ ب جـ

ب) أ د يعامد ب جـ

البرهان :

في المثلث المتساوي الساقين أ جـ د تكون فيه جـ هـ قطعة مستقيمة متوسطة

∴ جـ هـ ⊥ أ د .... (١)

في المثلث المتساوي الساقين أ ب د تكون فيه ب هـ قطعة مستقيمة متوسطة

∴ ب هـ ⊥ أ د .... (٢)

من (١) و (٢) ∴ أ د عمودي على كل من ب هـ ، جـ هـ المتقاطعتان والمحتوتان في المستوى هـ ب جـ

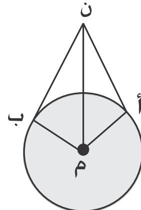
∴ أ د ⊥ المستوى هـ ب جـ (المطلوب في الفرع (أ))

برهان الفرع (ب)

أ د ⊥ المستوى هـ ب جـ ، ب جـ ⊂ المستوى هـ ب جـ

∴ أ د ⊥ ب جـ

مثال أقيم من مركز دائرة عمود على مستواها ، ثم فرضت أي نقطة عليه مثل (ن) ، إذا كانت أ ، ب نقطتين على الدائرة أثبت أن : ن أ = ن ب .



المعطيات :

ن م عمودي عل مستوى الدائرة التي مركزها النقطة (م) ،

أ ، ب نقطتان على الدائرة .

المطلوب : إثبات أن ن أ = ن ب .

البرهان :

ن م ⊥ المستوى أ م ب ، م أ ، م ب ⊂ المستوى أ م ب

∴ ن م ⊥ م أ ، ن م ⊥ م ب ∴ ق ∠ أ م ن = ق ∠ ب م ن = ٩٠°

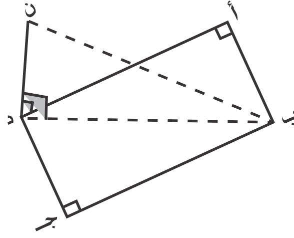
المثلثان أ م ن ، ب م ن فيهما : أ م = ب م (أنصاف أقطار) ، ن م مشترك ،

ق ∠ أ م ن = ق ∠ ب م ن = ٩٠°

∴ المثلثان أ م ن ، ب م ن متطابقان .

∴ ن أ = ن ب

مثال أ ب جـ د مستطيل أقيم على مستواه عمود من (د) ، ثم فرضت عليه نقطة مثل (ن) برهن أن (ن ب)^2 = (ن د)^2 + (د أ)^2 + (د جـ)^2



المعطيات :

أ ب جـ د مستطيل ، ن نقطة خارج مستواه ،

ن د ⊥ مستوى المستطيل أ ب جـ د

المطلوب :

برهان أن (ن ب)^2 = (ن د)^2 + (د أ)^2 + (د جـ)^2

البرهان :

ن د ⊥ مستوى المستطيل أ ب جـ د ، ب د ⊂ مستوى المستطيل

∴ ن د ⊥ ب د ∴ المثلث ن د ب قائم الزاوية في (د)

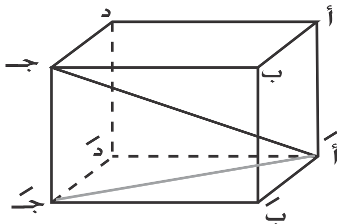
∴ (ن ب)^2 = (ب د)^2 + (ن د)^2

(ن ب)^2 = (د أ)^2 + (أ ب)^2 + (ن د)^2

المثلث ب أ د قائم الزاوية في أ
(ب د)^2 = (د أ)^2 + (أ ب)^2

(لكن أ ب = د جـ) ∴ (ن ب)^2 = (ن د)^2 + (د أ)^2 + (د جـ)^2

مثال الشكل المجاور يمثل متوازي المستطيلات أ ب جـ د أَ بَ جـَ دَ ، فيه أ أَ = ١٠ سم ، أ ب = ٦ سم ، ب جـ = ٨ سم . احسب طول قطره أَ جـ .



الحل : نصل أَ جـ

(أَ جـ)^2 = (أَ جـَ)^2 + (جـ جـَ)^2

= (أَ بَ)^2 + (بَ جـَ)^2 + (جـ جـَ)^2

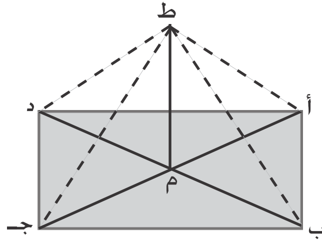
= (٦)^2 + (٨)^2 + (١٠)^2

= ٢٠٠

∴ أَ جـ = $\sqrt{٢٠٠}$ = ١٠ $\sqrt{٢}$ سم

مثال أ ب جـ د مستطيل في المستوى س يتقاطع قطراه في النقطة (م)

$\overline{م ط} \perp$ مستوى المستطيل ، أثبت أن : ط أ = ط ب = ط جـ = ط د .



المعطيات :

أ ب جـ د مستطيل يتقاطع قطراه في النقطة (م) ،

$\overline{م ط} \perp$ مستوى المستطيل

المطلوب :

إثبات أن ط أ = ط ب = ط جـ = ط د .

البرهان :

قطرا المستطيل متساويان في الطول وينصف كل منهما الاخر ∴ أ م = ب م = جـ م = د م

$\overline{م ط} \perp$ مستوى المستطيل ، $\overline{أ جـ}$ ، $\overline{ب د} \subset$ مستوى المستطيل

∴ $\overline{م ط} \perp \overline{أ جـ}$ ، $\overline{م ط} \perp \overline{ب د}$

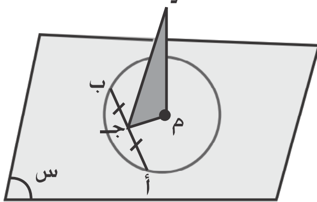
∴ ق ∢ أ م ط = ق ∢ ب م ط = ق ∢ جـ م ط = ق ∢ د م ط = °٩٠

المثلثات القائمة أ م ط، ب م ط، جـ م ط ، د م ط متطابقة (ضلعان وزاوية محصورة بينهما حيث $\overline{م ط}$ مشتركة في المثلثات جميعها)

∴ ط أ = ط ب = ط جـ = ط د .

مثال (م) مركز دائرة تقع في المستوى س، $\overline{أ ب}$ وتر في هذه الدائرة ، (جـ) منتصف $\overline{أ ب}$.

رسمت $\overline{م د} \perp$ المستوى س . أثبت أن $\overline{أ ب} \perp$ المستوى م جـ د .



المعطيات :

(م) مركز دائرة تقع في المستوى س ، $\overline{أ ب}$ وتر في هذه الدائرة ، النقطة (جـ) منتصف $\overline{أ ب}$ ،

$\overline{م د} \perp$ المستوى س

المطلوب : إثبات أن $\overline{أ ب} \perp$ المستوى م جـ د

البرهان :

$\overline{أ ب}$ وتر في هذه الدائرة ، النقطة (جـ) منتصف هذا الوتر ∴ $\overline{م جـ} \perp \overline{أ ب}$ ....(١)

« المستقيم الواصل بين مركز دائرة ومنتصف وتر فيها غير مار بالمركز ، يكون عموديا على الوتر »

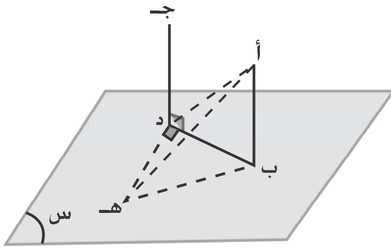
$\overline{م د} \perp$ المستوى س ، $\overline{أ ب} \subset$ المستوى س ∴ $\overline{م د} \perp \overline{أ ب}$ ....(٢)

من (١) و (٢) ∴ $\overline{أ ب}$ عمودي على كل من $\overline{م د}$ ، $\overline{م جـ}$ المتقاطعتان والمحتوتان في المستوى م جـ د

∴ $\overline{أ ب} \perp$ المستوى م جـ د

نظرية (٢) (دون برهان) :
الأعمدة المقامة من نقطة على مستقيم تقع جميعها في مستوى واحد .

نظرية (٣)
المستقيمان العموديان على مستوى واحد متوازيان .



المعطيات :

$\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ عموديان على المستوى س ويتقاطعان معه في النقطتين ب، د على الترتيب .

المطلوب :

إثبات أن : $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$

العمل :

نرسم $\overleftrightarrow{\text{د هـ}}$ في المستوى س بحيث يكون عموديا على $\overline{\text{ب د}}$.

البرهان :

نصل $\overline{\text{أ د}}$ ، $\overline{\text{أ هـ}}$ ، $\overline{\text{ب هـ}}$

(أ هـ)^2 = (أ ب)^2 + (ب هـ)^2 (الزاوية أ ب هـ قائمة)

= (أ ب)^2 + (ب د)^2 + (د هـ)^2 (الزاوية ب د هـ قائمة)

= (أ د)^2 + (د هـ)^2

إذن الزاوية أ د هـ قائمة وعليه $\overline{\text{أ د}}$ ، $\overline{\text{د جـ}}$ ، $\overline{\text{د ب}}$ تقع في مستوى واحد لكونها عمودية جميعها على $\overline{\text{د هـ}}$ من نقطة واحدة . (نظرية ٢)

$\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ واقعان في هذا المستوى وعموديان على $\overleftrightarrow{\text{د ب}}$.

(المستقيمان المستويان العموديان على مستقيم واحد متوازيان)

إذن $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ ، وهو المطلوب .

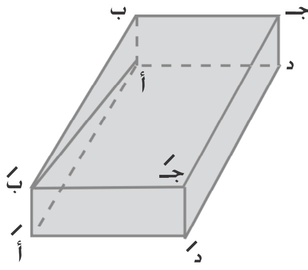
نتيجة
إذا توازى مستقيمان وكان أحدهما عموديا على مستوى،فإن المستقيم الاخر يكون عموديا على المستوى نفسه .

تذكر
المستقيمان الموازيان لمستقيم ثالث في الفضاء متوازيان .

مثال في الشكل المجاور إذا كانت أ أَ ⊥ أَ بَ ،

أَ دَ ⊥ المستوى أ أَ بَ ، د دَ ⊥ المستوى دَ أَ بَ ،

أثبت أن : أ أَ // د دَ



المعطيات : أ أَ ⊥ أَ بَ ، أَ دَ ⊥ المستوى أ أَ بَ ،

د دَ ⊥ المستوى دَ أَ بَ

المطلوب : إثبات أن أ أَ // د دَ

البرهان :

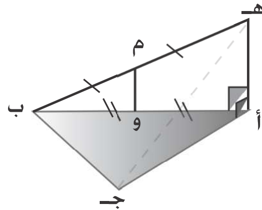
بما أن أَ دَ ⊥ المستوى أ أَ بَ ، إذن أَ دَ ⊥ أ أَ ومعطى أ أَ ⊥ أَ بَ

∴ أ أَ ⊥ المستوى دَ أَ بَ ... (١)

لكن د دَ ⊥ المستوى دَ أَ بَ (بالفرض) ... (٢)

من (١) و (٢) ∴ أ أَ // د دَ

مثال أ ب جـ مثلث، اختيرت نقطة (هـ) خارج مستوى المثلث أ ب جـ بحيث كان أ هـ عموديا عل كل من أ ب ، أ جـ ، فإذا كانت (و) منتصف أ ب ، (م) منتصف هـ ب . أثبت أن : و م تعامد المستوى أ ب جـ .



المعطيات :

أ ب جـ مثلث، النقطة (هـ) خارج مستواه ، أ هـ ⊥ أ ب ،

أ هـ ⊥ أ جـ ، و م تصل بين منتصفي أ ب ، هـ ب

حيث (و) منتصف أ ب .

المطلوب : إثبات أن و م ⊥ المستوى أ ب جـ

البرهان :

أ هـ ⊥ أ ب ، أ هـ ⊥ أ جـ ∴ أ هـ ⊥ المستوى أ ب جـ

لكن و م // أ هـ « القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين في مثلث توازي الضلع الثالث »

∴ و م ⊥ المستوى أ ب جـ «إذا توازى مستقيمان وكان أحدهما عموديا على مستوى، فإن المستقيم الاخر يكون عموديا على المستوى نفسه »

مثال إذا كان $\overleftrightarrow{\text{م}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ متوازيين والنقطة (ب) خارج مستواهما . رسم $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ يعامد $\overleftrightarrow{\text{م}}$ في نقطة (جـ) ، و رسم $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ يعامد $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ في نقطة (أ) . (انظر الشكل الاتي)

أثبت أن : $\overleftrightarrow{\text{أ ب}} \perp \overleftrightarrow{\text{ل}}$

المعطيات :

$\overleftrightarrow{\text{م}} \parallel \overleftrightarrow{\text{ل}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}} \perp \overleftrightarrow{\text{م}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}} \perp \overleftrightarrow{\text{ل}}$

المطلوب :

إثبات أن $\overleftrightarrow{\text{أ ب}} \perp \overleftrightarrow{\text{ل}}$

البرهان :

بما أن $\overleftrightarrow{\text{م}} \parallel \overleftrightarrow{\text{ل}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}} \perp \overleftrightarrow{\text{ل}}$ $\therefore$ $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}} \perp \overleftrightarrow{\text{م}}$ ... (١)

« المستقيم العمودي على أحد مستقيمين متوازيين يكون عموديا على الاخر »

لكن $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}} \perp \overleftrightarrow{\text{م}}$ بالفرض ... (٢)

من (١) و (٢) $\therefore$ $\overleftrightarrow{\text{م}}$ عمودي على كل من المستقيمين المتقاطعين $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{\text{م}} \perp$ المستوى أ ب جـ

وبما أن $\overleftrightarrow{\text{م}} \parallel \overleftrightarrow{\text{ل}}$ بالفرض $\therefore$ $\overleftrightarrow{\text{ل}} \perp$ المستوى أ ب جـ

$\therefore$ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}} \perp \overleftrightarrow{\text{ل}}$

مثال $\overline{\text{أ جـ}}$ قطر في دائرة ، (د) نقطة على الدائرة ، (هـ) نقطة خارج مستوى الدائرة رسم $\overline{\text{د هـ}}$ عموديا على $\overleftrightarrow{\text{أ د}}$ ، ثم رسم $\overleftrightarrow{\text{جـ ن}}$ موازيا لـ $\overleftrightarrow{\text{أ د}}$. أثبت أن $\overleftrightarrow{\text{جـ ن}} \perp$ المستوى هـ د جـ

المعطيات :

$\overline{\text{أ جـ}}$ قطر في دائرة ، (د) نقطة على الدائرة ،

(هـ) نقطة خارج مستوى الدائرة ، $\overline{\text{د هـ}} \perp \overleftrightarrow{\text{أ د}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{جـ ن}} \parallel \overleftrightarrow{\text{أ د}}$

المطلوب :

إثبات أن $\overleftrightarrow{\text{جـ ن}} \perp$ المستوى هـ د جـ

البرهان :

ق $\measuredangle$ أ د جـ = 90° « زاوية محيطية مرسومة على القطر »

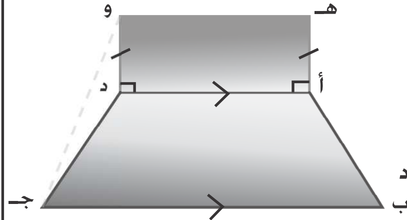
$\therefore$ $\overline{\text{أ د}} \perp \overline{\text{د جـ}}$ ... (١) ، $\overline{\text{أ د}} \perp \overline{\text{د هـ}}$ ... (٢) (بالفرض)

من (١) و (٢) $\therefore$ $\overline{\text{أ د}} \perp$ على كل من $\overline{\text{د جـ}}$ ، $\overline{\text{د هـ}}$ المتقاطعتين والمحتوتين في المستوى هـ د جـ .

$\therefore$ $\overline{\text{أ د}} \perp$ المستوى هـ د جـ

وبما أن $\overleftrightarrow{\text{جـ ن}}$ // $\overleftrightarrow{\text{أ د}}$ ∴ $\overleftrightarrow{\text{جـ ن}}$ ⊥ المستوى هـ د جـ

مثال أ ب جـ د شبه منحرف فيه $\overleftrightarrow{\text{أ د}}$ // $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ ، رسم العمودان $\overline{\text{هـ أ}}$ ، $\overline{\text{و د}}$ على مستوى شبه المنحرف بحيث كان هـ أ = و د . أثبت أن $\overline{\text{هـ و}}$ توازي مستوى شبه المنحرف أ ب جـ د .



المعطيات :

أ ب جـ د شبه منحرف فيه $\overleftrightarrow{\text{أ د}}$ // $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ ،

$\overline{\text{هـ أ}}$ ⊥ المستوى أ ب جـ د ، $\overline{\text{و د}}$ ⊥ المستوى أ ب جـ د

، هـ أ = و د

المطلوب :

إثبات أن $\overline{\text{هـ و}}$ // مستوى شبه المنحرف أ ب جـ د .

البرهان :

$\overline{\text{هـ أ}}$ ⊥ المستوى أ ب جـ د ، $\overline{\text{و د}}$ ⊥ المستوى أ ب جـ د

∴ $\overline{\text{هـ أ}}$ // $\overline{\text{و د}}$ « المستقيمان العموديان على نفس المستوى متوازيان »

كذلك هـ أ = و د ∴ الشكل أ د و هـ مستطيل .

∴ $\overline{\text{هـ و}}$ // $\overline{\text{أ د}}$ وبما أن $\overline{\text{هـ و}}$ ⊄ المستوى أ ب جـ د ، $\overline{\text{أ د}}$ ⊂ المستوى أ ب جـ د

∴ $\overline{\text{هـ و}}$ // مستوى شبه المنحرف أ ب جـ د . « إذا وازى مستقيم خارج مستوى مستقيما في المستوى فإنه يوازي هذا المستوى »

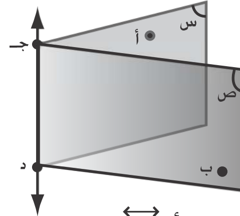
الزاوية الزوجية

تعريف

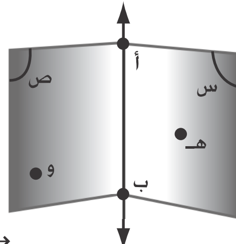
الزاوية الزوجية هي اتحاد نصفي مستويين لهما الحرف نفسه .

إن اتحاد نصفي المستويين س،ص يسمى زاوية زوجية ،ويرمز للزاوية الزوجية بأربعة أحرف ،بحيث يمثل الحرف الأول نقطة في أحد نصفي المستويين والحرف الرابع نقطة في النصف الاخر ،أما الحرفان الأوسطان فيمثلان المستقيم المشترك بين المستويين .

ويسمى كل من نصفي المستويين س،ص وجها للزاوية الزوجية ، ويسمى المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ الناتج عن تقاطع نصفي المستويين حرف الزاوية الزوجية .

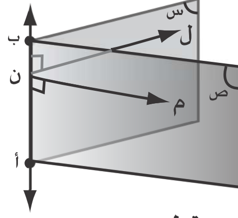


الزاوية الزوجية (أ، $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ ، ب)



الزاوية الزوجية (هـ، $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، و)

قياس الزاوية الزوجية



خذ أية نقطة على حرف الزاوية الزوجية مثل (ن) .
ارسم $\overleftrightarrow{\text{ن ل}} \perp \overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ في المستوى س ثم ارسم $\overleftrightarrow{\text{ن م}} \perp \overleftrightarrow{\text{أ ب}}$
في المستوى ص كما في الشكل المجاور .

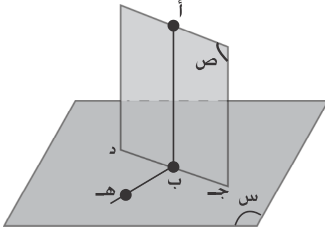
فيكون قياس الزاوية الزوجية (ل ، $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، م) هو قياس الزاوية المستوية ل ن م .

ملاحظة :

تقاس الزاوية بين مستويين بقياس الزاوية الزوجية بينهما ، وإذا كان هذا القياس 90° ، فإن المستويين متعامدان، وبالعكس إذا كان المستويان متعامدين، فإن قياس الزاوية الزوجية بينهما 90° .

نظرية (٤)

إذا كان مستقيم معلوم عموديا على مستوى معلوم ، فكل مستوى يحوي ذلك المستقيم يكون عموديا على المستوى المعلوم .



المعطيات :

$\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ عمودي على المستوى س ويلاقيه في النقطة (ب)،
المستوى ص يحوي $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ويقطع المستوى س في $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$.

المطلوب :

إثبات أن المستوى ص عمودي على المستوى س .

العمل :

ارسم في المستوى س $\overleftrightarrow{\text{ب هـ}} \perp \overleftrightarrow{\text{جـ د}}$.

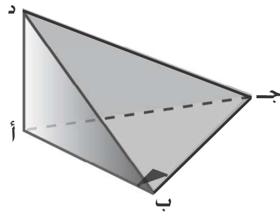
البرهان :

$\overleftrightarrow{\text{أ ب}} \perp$ المستوى س $\therefore$ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}} \perp \overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ كذلك $\overleftrightarrow{\text{ب هـ}} \perp \overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ (بالعمل)

$\therefore$ $\overleftrightarrow{\text{جـ د}} \perp$ المستوى أ ب هـ (لأن $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ عمودي على كل من $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ب هـ}}$)

إذن قياس الزاوية أ ب هـ هو قياس الزاوية الزوجية بين المستويين س ، ص .
لكن الزاوية أ ب هـ قائمة ، لأن $\overleftrightarrow{\text{أ ب}} \perp$ المستوى س، فهو عمودي على $\overleftrightarrow{\text{ب هـ}}$.
إذن المستوى ص عمودي على المستوى س لكون الزاوية الزوجية بينهما قائمة .
وهو المطلوب .

مثال أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في (ب) ،



أ د ⊥ مستوى المثلث أ ب جـ . أثبت أن المستويين أ د ب ،
ب جـ د متعامدان .

المعطيات :

أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في (ب) ، أ د ⊥ مستوى المثلث أ ب جـ .

المطلوب :

إثبات أن المستويين أ د ب ، ب جـ د متعامدان .

البرهان :

أ د ⊥ المستوى أ ب جـ ∴ أ د ⊥ ب جـ ...(١) (لأن ب جـ ⊂ المستوى أ ب جـ)

لكن أ ب ⊥ ب جـ ...(٢) (بالفرض)

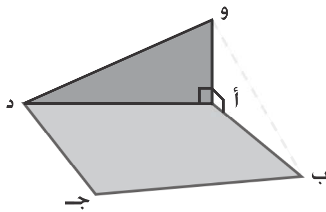
من (١) و (٢)

∴ ب جـ عمودية على كل من أ د ، أ ب المتقاطعتين والمحتوتين في المستوى أ ب د .

∴ ب جـ ⊥ المستوى أ ب د

وبما أن ب جـ ⊂ المستوى ب جـ د ∴ المستوى ب جـ د ⊥ المستوى أ د ب

مثال أ ب جـ د مستوى ، أ و ⊥ المستوى أ ب جـ د



أثبت أن : المستوى أ و د ⊥ المستوى أ ب جـ د

المعطيات :

أ ب جـ د مستوى ، أ و ⊥ المستوى أ ب جـ د

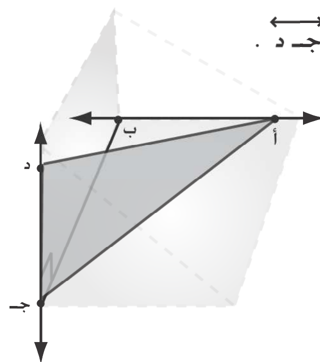
المطلوب :

إثبات أن المستوى أ و د ⊥ المستوى أ ب جـ د

البرهان :

أ و ⊥ المستوى أ ب جـ د ، أ و ⊂ المستوى أ و د ∴ المستوى أ و د ⊥ المستوى أ ب جـ د

مثال أ ب ، جـ د متخالفان ومتعامدان ، ب جـ ⊥ جـ د .



أثبت أن : المستوى د جـ أ ⊥ المستوى أ ب جـ

المعطيات :

أ ب ، جـ د متخالفان . أ ب ⊥ جـ د ، ب جـ ⊥ جـ د

المطلوب :

أثبات أن : المستوى د جـ أ ⊥ المستوى أ ب جـ

البرهان :

$\overleftrightarrow{جـ د}$ عمودي على كل من $\overleftrightarrow{أ ب}$ ، $\overleftrightarrow{ب جـ}$ (بالفرض)

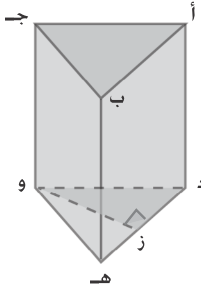
∴ $\overleftrightarrow{جـ د}$ ⊥ المستوى أ ب جـ ، لكن $\overleftrightarrow{جـ د}$ ⊂ المستوى د جـ أ

∴ المستوى د جـ أ ⊥ المستوى أ ب جـ

نظرية (٤) (دون برهان) :

إذا تعامد مستويان، فالمستقيم في أحدهما العمودي على خط تقاطعهما يكون عموديا على المستوى الاخر .

مثال يمثل الشكل المجاور المنشور الثلاثي القائم أ ب جـ د هـ و الذي قاعدته المثلث د هـ و ، وفيه $\overline{و ز}$ ⊥ $\overline{د هـ}$.
أثبت أن $\overline{و ز}$ ⊥ المستوى أ د هـ ب .



المعطيات :

أ ب جـ د هـ و منشور ثلاثي قائم فيه $\overline{و ز}$ ⊥ $\overline{د هـ}$

المطلوب :

إثبات أن $\overline{و ز}$ ⊥ المستوى أ د هـ ب

البرهان :

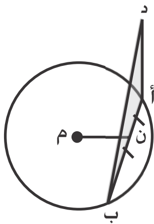
المستويان د هـ و ، أ د هـ ب متعامدان (خواص المنشور الثلاثي القائم) و $\overline{د هـ}$ خط تقاطعهما .

وبما أن $\overline{و ز}$ ⊥ $\overline{د هـ}$ بالفرض ، $\overline{و ز}$ ⊂ المستوى د هـ و

∴ $\overline{و ز}$ ⊥ المستوى أ د هـ ب

مثال $\overline{أ ب}$ وتر في دائرة مركزها (م)، المستوى د أ ب عمودي على مستوى الدائرة فإذا كانت (ن) منتصف $\overline{أ ب}$ فأثبت أن $\overline{م ن}$ ⊥ المستوى د أ ب .

المعطيات :



$\overline{أ ب}$ وتر في دائرة مركزها (م) ، المستوى د أ ب ⊥ مستوى الدائرة م أ ب،

(ن) منتصف $\overline{أ ب}$.

المطلوب : إثبات أن $\overline{م ن}$ ⊥ المستوى د أ ب

البرهان :

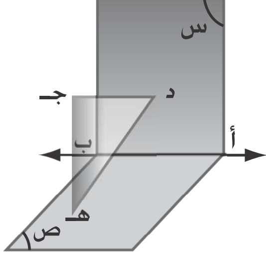
$\overline{أ ب}$ وتر في الدائرة التي مركزها (م) ، (ن) منتصف $\overline{أ ب}$ ∴ $\overline{م ن}$ ⊥ $\overline{أ ب}$

وبما أن المستوى د أ ب ⊥ مستوى الدائرة م أ ب ، $\overline{م ن}$ عمودي على خط تقاطع المستويين د أ ب، م أ ب .

∴ $\overline{م ن}$ ⊥ المستوى د أ ب

أمثلة على التعامد

مثال



إذا كان س،ص مستويين متقاطعين في $\overleftrightarrow{أب}$ ، (جـ) نقطة لا تنتمي لأي من المستويين . رسم من النقطة (جـ) العمودان $\overleftrightarrow{جـ د}$ ، $\overleftrightarrow{جـ هـ}$ على المستويين س، ص على الترتيب كما في الشكل المجاور .

أثبت أن $\overleftrightarrow{أب} \perp \overline{د هـ}$

المعطيات :

المستوى س $\cap$ المستوى ص = $\overleftrightarrow{أب}$ ، النقطة (جـ) خارج المستويين س، ص .

$\overleftrightarrow{جـ د} \perp$ المستوى س ، $\overleftrightarrow{جـ هـ} \perp$ المستوى ص

المطلوب :

إثبات أن $\overleftrightarrow{أب} \perp \overline{د هـ}$

البرهان :

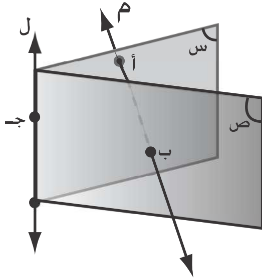
$\overleftrightarrow{جـ د} \perp$ المستوى س ، $\overleftrightarrow{أب} \subset$ المستوى س $\therefore$ $\overleftrightarrow{جـ د} \perp \overleftrightarrow{أب}$ ... (١)

$\overleftrightarrow{جـ هـ} \perp$ المستوى ص ، $\overleftrightarrow{أب} \subset$ المستوى ص $\therefore$ $\overleftrightarrow{جـ هـ} \perp \overleftrightarrow{أب}$ ... (٢)

من (١) و (٢) $\overleftrightarrow{أب}$ عمودي على كل من $\overleftrightarrow{جـ د}$ ، $\overleftrightarrow{جـ هـ}$ المتقاطعين والمحتوين في المستوى د جـ هـ $\therefore$ $\overleftrightarrow{أب} \perp$ المستوى د جـ هـ

لكن $\overline{د هـ} \subset$ المستوى د جـ هـ $\therefore$ $\overleftrightarrow{أب} \perp \overline{د هـ}$

مثال برهن أن المستويين العموديين على مستقيم واحد متوازيان .



المعطيات : المستويين س،ص عموديين على المستقيم م من النقطتين أ،ب على الترتيب .

المطلوب : إثبات أن المستوى س // المستوى ص .

البرهان :

افرض أن المستويين س،ص غير متوازيين أي أنهما يتقاطعان في مستقيم مثل ل والنقطة جـ تقع على المستقيم ل (خط تقاطع المستويين) .

$\overleftrightarrow{أجـ} \subset$ المستوى س ، $\overleftrightarrow{أب} \perp$ المستوى س ، $\overleftrightarrow{أب} \perp \overleftrightarrow{أجـ}$ . . . (١)

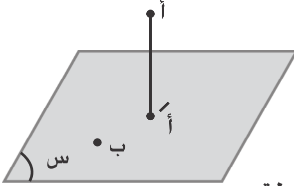
$\overleftrightarrow{ب جـ} \subset$ المستوى ص ، $\overleftrightarrow{أب} \perp$ المستوى ص ، $\overleftrightarrow{أب} \perp \overleftrightarrow{ب جـ}$ . . . (٢)

لكن لا يمكن إنزال عمودين مختلفين من نقطة (جـ) على مستقيم واحد ($\overleftrightarrow{أب}$) وهذا تناقض إذن المستوى س// المستوى ص .

الإسـقـاط الـعـمـودي

تعريف
المسـقـط الـعـمـودي لنقطة معلومة على مستوى معلوم هو موقع القطعة المستقيمة العمودية المرسومة من النقطة المعلومة على المستوى .

في الشكل المجاور :

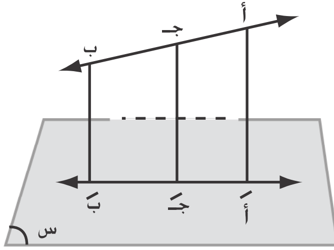


$\overline{أأَ}$ ⊥ المستوى س ، أَ ∈ المستوى س فتكون أَ هي المسقط العمودي للنقطة أ على المستوى س .

وإذا كانت ب ∈ س فإن مسقطها على المستوى هو نفس النقطة ب .

مسقط قطعة مستقيمة على مستوى :

في الشكل المجاور :



أَ المسقط العمودي لـ أ على المستوى س ، بَ المسقط العمودي لـ ب على المستوى س فتكون :

$\overline{أَبَ}$ هي المسقط العمودي لـ $\overline{أب}$ على المستوى س .

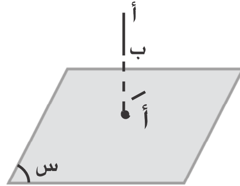
ملاحظات :

١) $\overline{أأَ}$ // $\overline{ببَ}$ (لأنهما عموديان على المستوى س)

٢) النقطة (جـ) ∈ $\overline{أب}$ فيكون مسقطها العمودي النقطة جـَ ∈ للمسقط $\overline{أَبَ}$

٣) إذا كانت $\overline{أب}$ ⊥ المستوى س فإن مسقطها العمودي في هذه الحالة يكون نقطة أَ .

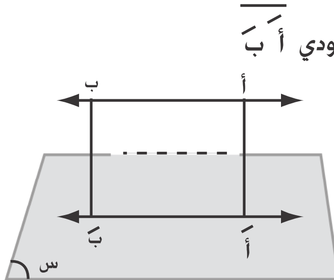
انظر الشكل المجاور



٤) في الشكل المجاور

$\overline{أب}$ // المستوى س ولذلك فإن : $\overline{أب}$ // المسقط العمودي $\overline{أَبَ}$

ويكون : أب = أَبَ



تدريب أجب عن الأسئلة الاتية :

١) هل يمكن أن يكون طول المسقط العمودي للقطعة المستقيمة أكبر من طول القطعة المستقيمة نفسها ؟

٢) متى يتساوى طولا قطعة مستقيمة ومسقطها العمودي على مستوى ؟

٣) إذا لم يتقاطع مستقيمان فهل يمكن أن يتقاطع مسقطاهما العمودي ؟

٤) إذا تساوت قطعتان مستقيمتان في الطول فهل يتساوى طولا مسقطيهما العمودي ؟

٥) هل المسقط العمودي لمنتصف قطعة مستقيمة هو منتصف المسقط العمودي للقطعة ؟

<u>الإجابة :</u>

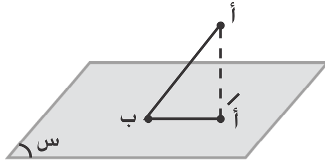
١ _ لا ٢ _ إذا وازت القطعة المستقيمة المستوى ٣ _ نعم ٤ _ ليس بالضرورة .

٥ _ نعم

تعريف

القطعة المستقيمة (أو المستقيم) الواصلة بين أي نقطة (أ) خارج مستوى وأي من نقاط المستوى (عدا مسقط أ) تسمى مائلا على المستوى .

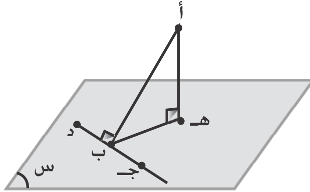
في الشكل المجاور :



$\overline{أأَ}$ ⊥ المستوى س ، $\overline{أب}$ مائل على المستوى س .

نظرية الأعمدة الثلاثة :

«إذا مد مستقيم مائل من نقطة خارج مستوى وكان المستقيم المائل عموديا على مستقيم في المستوى،فإن مسقط المستقيم المائل يكون عموديا على هذا المستقيم »



المعطيات :

$\overleftrightarrow{جـد}$ مستقيم في المستوى س ، أ نقطة خارج المستوى س

، $\overleftrightarrow{أهـ}$ ⊥ المستوى س ، $\overleftrightarrow{أب}$ ⊥ $\overleftrightarrow{جـد}$.

المطلوب :

إثبات أن $\overleftrightarrow{هـب}$ ⊥ $\overleftrightarrow{جـد}$

البرهان :

بما أن $\overleftrightarrow{أهـ}$ ⊥ المستوى س ، إذن $\overleftrightarrow{أهـ}$ عمود على كل مستقيم في المستوى س .

$\overleftrightarrow{جـد}$ ⊂ المستوى س ، إذن $\overleftrightarrow{أهـ}$ ⊥ $\overleftrightarrow{جـد}$ ، وبالفرض $\overleftrightarrow{أب}$ ⊥ $\overleftrightarrow{جـد}$

إذن $\overleftrightarrow{جـد}$ ⊥ على كل من المستقيمين المتقاطعين $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{أهـ}$

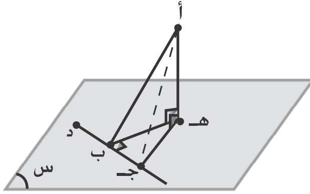
إذن $\overleftrightarrow{جـد}$ ⊥ المستوى أ هـ ب ⟵ $\overleftrightarrow{جـد}$ ⊥ كل مستقيم في المستوى أ هـ ب

لكن $\overleftrightarrow{هـ ب} \subset$ المستوى أ هـ ب

إذن $\overleftrightarrow{جـ د} \perp \overleftrightarrow{هـ ب}$ وهو المطلوب .

عكس نظرية الأعمدة الثلاثة

إذا مد مستقيم مائل من نقطة خارج مستوى ليلاقي مستقيما معلوما في المستوى، وكان مسقط المستقيم المائل عموديا على المستقيم المعلوم، فإن المستقيم المائل يكون عموديا أيضا على هذا المستقيم .



المعطيات :

$\overleftrightarrow{جـ د}$ مستقيم في المستوى س ، أ نقطة خارج المستوى س

، $\overleftrightarrow{أ هـ} \perp$ المستوى س ، $\overleftrightarrow{أ ب}$ مائل ، $\overleftrightarrow{هـ ب}$ مسقط المائل $\overleftrightarrow{أ ب}$ على المستوى س ، $\overleftrightarrow{هـ ب} \perp \overleftrightarrow{جـ د}$.

المطلوب :

إثبات أن $\overleftrightarrow{أ ب} \perp \overleftrightarrow{جـ د}$

العمل : صل $\overleftrightarrow{أ جـ}$

البرهان :

في المثلث أ هـ جـ القائم الزاوية في هـ ($\overleftrightarrow{أ هـ} \perp$ المستوى س، فهو عمود على $\overleftrightarrow{هـ جـ}$)

إذن $(أ جـ)^2 = (أ هـ)^2 + (هـ جـ)^2$ ..... (١)

لكن في المثلث أ هـ ب القائم الزاوية في هـ ، $\overleftrightarrow{أ هـ} \perp$ المستوى س ، فيكون $\overleftrightarrow{أ هـ} \perp \overleftrightarrow{هـ ب}$

إذن $(أ هـ)^2 = (أ ب)^2 - (ب هـ)^2$ ..... (٢)

من (١) و (٢) : $(أ جـ)^2 = (هـ جـ)^2 + (أ ب)^2 - (ب هـ)^2$

لكن $(هـ جـ)^2 - (ب هـ)^2 = (ب جـ)^2$ لكون المثلث هـ ب جـ قائم الزاوية في ب (بالفرض)

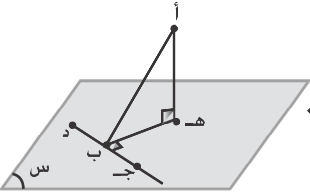
إذن $(أ جـ)^2 = (أ ب)^2 + (ب جـ)^2$

أي أن المثلث أ جـ ب قائم الزاوية في ب (عكس نظرية فيثاغورس)

إذن $\overleftrightarrow{أ ب} \perp \overleftrightarrow{جـ د}$ وهو المطلوب .

برهان اخر لـ « عكس نظرية الأعمدة الثلاثة »

المعطيات :



$\overleftrightarrow{جـ د}$ مستقيم في المستوى س ، أ نقطة خارج المستوى س

، $\overleftrightarrow{أ هـ} \perp$ المستوى س ، $\overleftrightarrow{أ ب}$ مائل ، $\overleftrightarrow{هـ ب}$ مسقط المائل $\overleftrightarrow{أ ب}$ على المستوى س ، $\overleftrightarrow{هـ ب} \perp \overleftrightarrow{جـ د}$.

المطلوب : إثبات أن $\overleftrightarrow{أ ب} \perp \overleftrightarrow{جـ د}$

البرهان :

أهـ ⊥ المستوى س ∴ أهـ عمود على كل مستقيم في المستوى س

∴ أهـ ⊥ جـ د ، هـ ب ⊥ جـ د (بالفرض)

جـ د ⊥ كل من أهـ ، هـ ب ∴ جـ د ⊥ المستوى أ هـ ب

∴ جـ د ⊥ أي مستقيم في المستوى أ هـ ب ∴ أ ب ⊥ جـ د

> ملاحظة : تسمى المستقيمات الثلاثة أ ب ، هـ ب ، جـ د « الأعمدة الثلاثة »

مثال يمثل الشكل المجاور المثلث أ ب جـ فيه

أ ب = أ جـ ، أ و ⊥ المستوى أ ب جـ ، هـ منتصف ب جـ ، أثبت أن : و هـ ⊥ ب جـ

المعطيات :

أ ب جـ مثلث فيه أ ب = أ جـ ، أ و ⊥ المستوى أ ب جـ ، هـ منتصف ب جـ

المطلوب : إثبات أن و هـ ⊥ ب جـ

البرهان :

أ و ⊥ المستوى أ ب جـ ، أ هـ ⊥ ب جـ (أ هـ متوسط في المثلث أ ب جـ المتساوي الساقين)

و هـ مائل على المستوى أ ب جـ ، بما أن مسقطه أ هـ ⊥ ب جـ إذن و هـ ⊥ ب جـ

مثال أ جـ د مثلث قائم الزاوية في أ ، أ ب ⊥ مستوى المثلث ،

إذا كان أ ب = ٢ سم ، أ جـ = ٤ √٣ ، أ د = ٤ سم

جد قياس الزاوية الزوجية (ب ، جـ د ، أ)

المعطيات :

أ جـ د مثلث قائم الزاوية في أ ، أ ب ⊥ مستوى المثلث ،

أ ب = ٢ سم ، أ جـ = ٤ √٣ ، أ د = ٤ سم

المطلوب :

إيجاد قياس الزاوية الزوجية (ب ، جـ د ، أ)

العمل :

ننزل من أ العمود أ هـ على جـ د ، نصل ب هـ .

البرهان :

أ ب ⊥ مستوى المثلث أ جـ د ، ب هـ مائل ، أ هـ مسقط المائل على مستوى المثلث

$\overleftrightarrow{أ هـ} \perp \overleftrightarrow{جـ د}$ (بالعمل)

إذن $\overleftrightarrow{ب هـ} \perp \overleftrightarrow{جـ د}$ (عكس نظرية الأعمدة الثلاثة)

أي أن قياس الزاوية الزوجية هو قياس الزاوية أ هـ ب .

ظا (أ هـ ب) = $\frac{أ ب}{أ هـ}$

في المثلث جـ د أ القائم الزاوية في أ : $(جـ د)^2 = (أ جـ)^2 + (أ د)^2 = ٤٨ + ١٦ = ٦٤$

⟵ جـ د = ٨ سم .

مساحة المثلث أ جـ د = $\frac{١}{٢}$ (جـ د) (أ هـ) = $\frac{١}{٢}$ (أ جـ) (أ د)

⟵ (جـ د) (أ هـ) = (أ جـ) (أ د)

(٨) (أ هـ) = ($٤\sqrt{٣}$) (٤) ⟵ أ هـ = $٢\sqrt{٣}$ سم .

إذن ظا (أ هـ ب) = $\frac{أ ب}{أ هـ} = \frac{٢}{٢\sqrt{٣}} = \frac{١}{\sqrt{٣}}$ ⟵ ق ∡ أ هـ ب = ٣٠°

مثال في الشكل المجاور أ ب جـ د مربع طول ضلعه ٤ سم ، تقاطع قطراه في (م) ، $\overleftrightarrow{أ هـ} \perp$ مستوى المربع .

أثبت أن :

١) $\overleftrightarrow{ب د} \perp$ المستوى أ هـ م

٢) إذا كان أ هـ = $٢\sqrt{٢}$ سم ، فبين أن قياس الزاوية الزوجية (هـ ، $\overleftrightarrow{ب د}$ ، أ) = ٤٥°

المعطيات :

أ ب جـ د مربع طول ضلعه ٤ سم ، $\overline{أ جـ}$ ، $\overline{ب د}$ قطرا المربع حيث $\overline{أ جـ} \cap \overline{ب د} = \{ م \}$

، $\overleftrightarrow{أ هـ} \perp$ مستوى المربع ، أ هـ = $٢\sqrt{٢}$ سم

المطلوب : إثبات أن ١) $\overleftrightarrow{ب د} \perp$ المستوى أ هـ م

٢) قياس الزاوية الزوجية (هـ ، $\overleftrightarrow{ب د}$ ، أ) = ٤٥°

العمل : نصل $\overline{م هـ}$

البرهان :

$\overleftrightarrow{ب د} \perp \overleftrightarrow{أ جـ}$ ....(١) (قطرا المربع متعامدان وينصف كل منهما الآخر)

$\overleftrightarrow{أ هـ} \perp$ مستوى المربع ، $\overleftrightarrow{ب د} \subset$ مستوى المربع ∴ $\overleftrightarrow{أ هـ} \perp \overleftrightarrow{ب د}$ ....(٢)

من (١) و (٢) $\overleftrightarrow{ب د} \perp$ كل من $\overleftrightarrow{أ هـ}$ ، $\overleftrightarrow{أ جـ}$ ∴ $\overleftrightarrow{ب د} \perp$ المستوى أ هـ م (المطلوب أولا)

$\overleftrightarrow{هـ م}$ مائل ، $\overleftrightarrow{أ م}$ مسقط المائل على مستوى المربع

$\overline{أ م} \perp \overleftrightarrow{ب د}$ إذن $\overline{هـ م} \perp \overleftrightarrow{ب د}$

أي أن قياس الزاوية الزوجية هو قياس الزاوية أ م هـ .

في المثلث أ ب جـ القائم الزاوية في (ب) : $(أ جـ)^٢ = (أ ب)^٢ + (ب جـ)^٢$

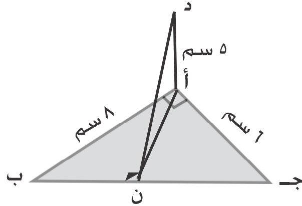
$= ١٦ + ١٦ = ٣٢$

$\longleftarrow$ أ جـ = $\sqrt{٣٢} = ٤\sqrt{٢}$ سم $\longleftarrow$ أ م = $\frac{١}{٢}$ (أ جـ) = $٢\sqrt{٢}$

إذن ظا (أ م هـ) = $\frac{أ هـ}{أ م} = \frac{٢\sqrt{٢}}{٢\sqrt{٢}} = ١$ $\longleftarrow$ ق $\measuredangle$ أ م هـ = ٤٥° (المطلوب ثانيا)

مثال أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في أ فيه ،أ ب = ٨ سم ، أ جـ = ٦ سم ،أقيم العمود $\overleftrightarrow{أ د}$ على مستوى المثلث ، بحيث كان أ د = ٥ سم، رسم $\overline{د ن} \perp \overline{ب جـ}$ ، وصل $\overline{أ ن}$.

جد طول كل من $\overline{أ ن}$ ، $\overline{د ن}$



الحل

$\overline{أ د} \perp$ المستوى أ ب جـ (بالفرض)

$\overline{د ن}$ مائل ، $\overline{أ ن}$ مسقط المائل على مستوى المثلث

وبما أن $\overline{د ن} \perp \overline{ب جـ}$ إذن $\overline{أ ن} \perp \overline{ب جـ}$

مساحة $\triangle$ أ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ (جـ ب) (أ ن) = $\frac{١}{٢}$ (أ ب) (أ جـ)

(١٠) (أ ن) = (٨) (٦)

$\therefore$ أ ن = $\frac{٢٤}{٥}$ سم

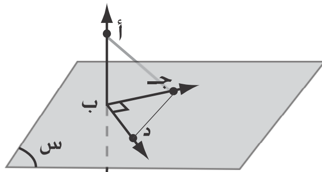
$(جـ ب)^٢ = (أ ب)^٢ + (أ جـ)^٢$
$= ٦٤ + ٣٦ = ١٠٠$
جـ ب = ١٠ سم

في المثلث د أ ن القائم الزاوية في أ : $(د ن)^٢ = (د أ)^٢ + (أ ن)^٢ = ٢٥ + \left(\frac{٢٤}{٥}\right)^٢ = \frac{١٢٠١}{٢٥}$

$\therefore$ د ن = $\frac{\sqrt{١٢٠١}}{٥}$ سم

مثال س مستوى معلوم ،أ نقطة خارجة عنه ،رسم $\overleftrightarrow{أ ب}$ عمودا على المستوى س يلاقيه في ب ، ثم رسم في المستوى س المستقيمان المتعامدان $\overleftrightarrow{ب جـ}$ ، $\overleftrightarrow{ب د}$.

أثبت أن $\overleftrightarrow{أ جـ} \perp \overleftrightarrow{ب د}$.



المعطيات :

س مستوى ،أ نقطة خارج مستواه ،

$\overleftrightarrow{أ ب} \perp$ المستوى س ويلاقيه في (ب)

$\overleftrightarrow{ب جـ} \perp \overleftrightarrow{ب د}$ ، $\overleftrightarrow{ب جـ} \subset$ المستوى س ، $\overleftrightarrow{ب د} \subset$ المستوى س

المطلوب : إثبات أن $\overleftrightarrow{أ جـ} \perp \overleftrightarrow{جـ د}$.

البرهان :

أ ب ⊥ المستوى س

أ جـ مائل ، ب جـ مسقط المائل على المستوى س

وبما أن ب جـ ⊥ ب د ∴ أ جـ ⊥ ب د

مثال

يمثل الشكل المجاور المثلث س ص ع فيه قياس الزاوية ص س ع = ٦٠°، س ص = ٤ سم ، رسم ص ن ⊥ مستوى المثلث ورسم ص م ⊥ س ع ، إذا كان ص ن = ٦ سم .

أثبت أن :

١) ن م ⊥ س ع

٢) قياس الزاوية الزوجية (ص ، س ع ، ن) = ٦٠°

المعطيات :

س ص ع مثلث، ن نقطة خارج مستواه وفيه س ص = ٤ سم وقياس الزاوية ص س ع = ٦٠°

ص ن ⊥ مستوى المثلث، ص ن = ٦ سم ، ص م ⊥ س ع .

المطلوب : إثبات أن ١) ن م ⊥ س ع

٢) قياس الزاوية الزوجية (ص ، س ع ، ن) = ٦٠°

البرهان :

ص ن ⊥ مستوى المثلث

ن م مائل ، ص م مسقط المائل على مستوى المثلث

وبما أن ص م ⊥ س ع ∴ ن م ⊥ س ع (المطلوب أولا)

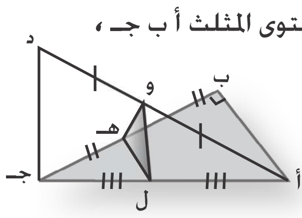
قياس الزاوية الزوجية (ص ، س ع ، ن) = قياس الزاوية ص م ن

في المثلث القائم الزاوية ص م س :

جا ٦٠° = $\frac{\text{ص م}}{٤}$ ← ص م = ٤ $\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)$ = ٢ $\sqrt{٣}$ سم

ظا (ص م ن) = $\frac{٦}{٢\sqrt{٣}}$ = $\sqrt{٣}$ ← ق ∡ ص م ن = ٦٠° (المطلوب ثانيا)

مثال أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب ، رسم $\overleftrightarrow{جـ د}$ ⊥ مستوى المثلث أ ب جـ ، ثم وصل $\overline{أ د}$ ، نصفت $\overline{ب جـ}$ في هـ ، كذلك نصفت $\overline{أ د}$ في و .



أثبت أن : $\overline{و هـ}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$

العمل : ننصف $\overline{أ جـ}$ في ل ، ثم نصل $\overline{ل هـ}$ ، $\overline{ل و}$

البرهان :

في المثلث أ ب جـ : $\overline{ل هـ}$ // $\overline{أ ب}$ « القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين في مثلث توازي الضلع الثالث »

∴ ق ∢ ل هـ جـ = ق ∢ أ ب جـ = ٩٠°

في المثلث أ د جـ : $\overline{و ل}$ // $\overline{جـ د}$ « القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين في مثلث توازي الضلع الثالث »

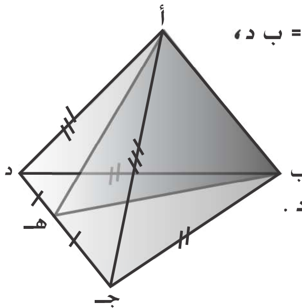
وبما أن $\overleftrightarrow{جـ د}$ ⊥ مستوى المثلث أ ب جـ ∴ $\overline{و ل}$ ⊥ مستوى المثلث أ ب جـ

كذلك $\overline{ل هـ}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$

$\overline{و هـ}$ مائل على المستوى أ ب جـ ، $\overline{ل هـ}$ مسقط المائل على المستوى أ ب جـ

∴ $\overline{و هـ}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$ (لأن $\overline{ل هـ}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$)

مثال يمثل الشكل المجاور الهرم الثلاثي أ ب جـ د فيه ب جـ = ب د ، أ جـ = أ د ، نصفت $\overline{جـ د}$ في هـ .



أ) أثبت أن $\overleftrightarrow{جـ د}$ ⊥ المستوى أ ب هـ .

ب) إذا رسم $\overleftrightarrow{أ و}$ ⊥ $\overleftrightarrow{ب هـ}$ ، فأثبت أن $\overleftrightarrow{أ و}$ ⊥ المستوى ب جـ د .

جـ) إذا كان جـ د = ١٨ سم ، أ جـ = ١٥ سم ، أ و = ٦ $\sqrt{٣}$ سم جد قياس الزاوية الزوجية (ب ، $\overleftrightarrow{جـ د}$ ، أ) .

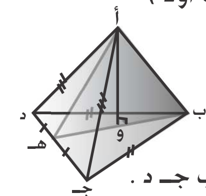
الحل

$\overline{أ هـ}$ متوسط في المثلث المتساوي الساقين أ جـ د ∴ $\overline{أ هـ}$ ⊥ $\overline{جـ د}$

$\overline{ب هـ}$ متوسط في المثلث المتساوي الساقين ب جـ د ∴ $\overline{ب هـ}$ ⊥ $\overline{جـ د}$

∴ $\overline{جـ د}$ ⊥ كل من $\overline{أ هـ}$ ، $\overline{ب هـ}$ المتقاطعتين والمحتوتين في المستوى أ ب هـ

∴ $\overline{جـ د}$ ⊥ المستوى أ ب هـ ∴ $\overleftrightarrow{جـ د}$ ⊥ المستوى أ ب هـ (المطلوب أولا)



$\overline{جـ د}$ ⊥ المستوى أ ب هـ ، $\overline{أ و}$ ⊂ المستوى أ ب هـ

∴ $\overline{أ و}$ ⊥ $\overline{جـ د}$ ، كذلك $\overline{أ و}$ ⊥ $\overline{ب هـ}$ (بالفرض)

∴ $\overline{أ و}$ ⊥ كل من $\overline{جـ د}$ ، $\overline{ب هـ}$ المتقاطعتين والمحتوتين في المستوى ب جـ د .

∴ $\overline{أو}$ ⊥ المستوى ب جـ د ∴ $\overleftrightarrow{أو}$ ⊥ المستوى ب جـ د (المطلوب ثانيا)

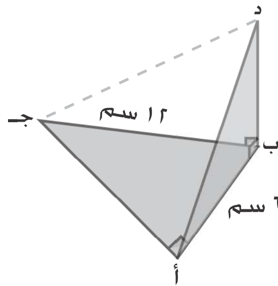
قياس الزاوية الزوجية (ب ، $\overleftrightarrow{جـ د}$ ، أ) = ق∢ أ هـ و

في المثلث أ هـ جـ القائم الزاوية في هـ :

$(أهـ)^2 = (أجـ)^2 - (جـهـ)^2 = (١٥)^2 - (٩)^2 = ١٤٤$ ⟵ أ هـ = ١٢ سم .

جا (أ هـ و) = $\frac{أو}{أهـ} = \frac{٦\sqrt{٣}}{١٢} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ∴ ق∢ أ هـ و = ٦٠°

مثال في الشكل المجاور :



أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في أ ، $\overline{دب}$ ⊥ مستوى المثلث

أ) أثبت أن المستويين د أ ب ، د أ جـ متعامدان .

ب) إذا كان أ ب = ٦ سم ، ب جـ = ١٢ سم ، فجد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين أ ب د، جـ ب د .

أي الزاوية : (أ ، $\overleftrightarrow{ب د}$ ، جـ)

المعطيات :

أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في أ ، $\overline{دب}$ ⊥ مستوى المثلث

المطلوب : أ) أثبت أن المستويين د أ ب ، د أ جـ متعامدان .

ب) إذا كان أ ب = ٦ سم ، ب جـ = ١٢ سم ، فجد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين أ ب د، جـ ب د .

البرهان :

$\overline{أب}$ ⊥ $\overline{أجـ}$ بالفرض ... (١)

$\overline{دب}$ ⊥ المستوى أ ب جـ ، $\overline{أجـ}$ ⊂ المستوى أ ب جـ ∴ $\overline{دب}$ ⊥ $\overline{أجـ}$ ... (٢)

من (١) و (٢) ∴ $\overline{أجـ}$ ⊥ كل من $\overline{أب}$ ، $\overline{دب}$ المتقاطعتين والمحتوتين في المستوى د أ ب

∴ $\overline{أجـ}$ ⊥ المستوى د أ ب

لكن $\overline{أجـ}$ ⊂ المستوى د أ جـ ∴ المستوى د أ ب ⊥ المستوى د أ جـ (المطلوب أولا)

قياس الزاوية الزوجية (أ ، $\overleftrightarrow{ب د}$ ، جـ) = ق∢ أ ب جـ

في المثلث أ ب جـ القائم الزاوية في أ :

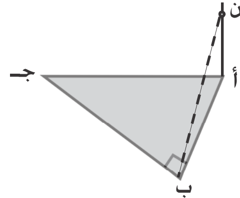
جتا (أ ب جـ) = $\frac{٦}{١٢} = \frac{١}{٢}$

ق∢ أ ب جـ = ٦٠°

مثال أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب . أقيم من (أ) عمود على مستوى المثلث ثم فرضت أي نقطة مثل (ن) على هذا العمود برهن أن الزاوية ن ب جـ قائمة .

المعطيات :

أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب، (ن) نقطة خارج مستواه ، $\overline{\text{أ ن}}$ $\perp$ المستوى أ ب جـ



المطلوب :

إثبات أن الزاوية ن ب جـ قائمة .

البرهان :

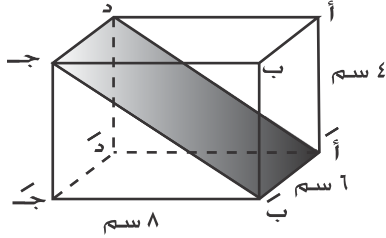
$\overline{\text{أ ب}}$ $\perp$ $\overline{\text{ب جـ}}$ (بالفرض)

وبما أن $\overline{\text{أ ن}}$ $\perp$ المستوى أ ب جـ ، $\overline{\text{ن ب}}$ مائل على المستوى أ ب جـ

$\therefore$ $\overline{\text{أ ب}}$ مسقط المائل على المستوى أ ب جـ

$\therefore$ $\overline{\text{ن ب}}$ $\perp$ $\overline{\text{ب جـ}}$ لأن $\overline{\text{أ ب}}$ $\perp$ $\overline{\text{ب جـ}}$ أي أن الزاوية ن ب جـ قائمة .

مثال الشكل المجاور يمثل متوازي المستطيلات أ ب جـ د أ′ ب′ جـ′ د′ ، فيه أ أ′ = ٤ سم ، أ′ ب′ = ٦ سم ، ب′ جـ′ = ٨ سم . جد ظل الزاوية الزوجية بين المستويين أ′ ب′ جـ′ د′ ، أ′ ب′ جـ د



الحل :

$\overleftrightarrow{\text{أ′ ب′}}$ هو حرف الزاوية الزوجية المطلوبة .

بما أن $\overline{\text{جـ جـ′}}$ $\perp$ المستوى أ′ ب′ جـ′ د′

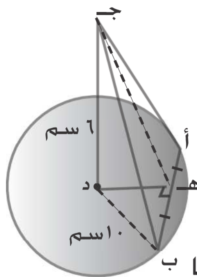
$\overline{\text{جـ ب′}}$ مائل على المستوى أ′ ب′ جـ′ د′ ، $\overline{\text{جـ′ ب′}}$ مسقط المائل

وبما أن $\overline{\text{جـ′ ب′}}$ $\perp$ $\overline{\text{أ′ ب′}}$ $\therefore$ جـ ب′ $\perp$ أ′ ب′

قياس الزاوية الزوجية المطلوبة = قياس الزاوية جـ ب′ جـ′

ظا (جـ ب′ جـ′) = $\frac{٤}{٨}$ = $\frac{١}{٢}$

مثال يمثل الشكل المجاور دائرة مركزها النقطة (د) ونصف قطرها = ١٠ سم ، $\overline{\text{أ ب}}$ وتر في الدائرة طوله ١٢ سم ، $\overline{\text{د جـ}}$ $\perp$ مستوى الدائرة حيث د جـ = ٦ سم . احسب ظل قياس الزاوية الزوجية بين المستويين أ ب جـ ، ومستوى الدائرة .



المعطيات :

(د) مركز دائرة نصف قطرها = ١٠ سم والنقطة (جـ) خارج مستواها

$\overline{\text{أ ب}}$ وتر في الدائرة طوله ١٢ سم ، $\overline{\text{د جـ}}$ ⊥ مستوى الدائرة حيث د جـ = ٦ سم .

المطلوب :

حساب ظل قياس الزاوية الزوجية بين المستويين أ ب جـ ، ومستوى الدائرة .

الحل :

ننزل العمود د هـ على الوتر أ ب فينصفه في (هـ) ثم نصل $\overline{\text{جـ هـ}}$

$\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ هو حرف الزاوية الزوجية المطلوبة

بما أن $\overline{\text{د جـ}}$ ⊥ مستوى الدائرة ، $\overline{\text{جـ هـ}}$ مائل ، $\overline{\text{د هـ}}$ مسقطه على مستوى الدائرة

، $\overline{\text{د هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$ ∴ $\overline{\text{جـ هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$

قياس الزاوية الزوجية المطلوبة = قياس الزاوية جـ هـ د

في المثلث ب هـ د القائم الزاوية في هـ :

(هـ د)^{٢} = (ب د)^{٢} − (هـ ب)^{٢}

= (١٠)^{٢} − (٦)^{٢} = ٦٤

هـ د = ٨ سم .

ظا (جـ هـ د) = $\frac{٦}{٨}$ = $\frac{٣}{٤}$

المصادر والمراجع :

المراجع العربية :

1 _ كتاب الحسبان الشامل في التفاضل والتكامل والهندسة التحليلية / الجزء الأول , تأليف : د . عبد المجيد نصير و د. بسام الناشف .
2 _كتاب الرياضيات للمرحلة الثانوية - الفرع العلمي / المملكة الاردنية الهاشمية .
3_ كتاب الجبر والهندسة الفراغية للمرحلة الثانية للثانوية العامة / جمهورية مصر العربية .
4 _ كتاب التكامل للمرحلة الثانية للثانوية العامة / جمهورية مصر العربية .
5 _ الرياضيات لـ كامل الناصري .

المراجع الأجنبية :

1- Calculus with analytic geometry , Richard A . Silverman.
2-Calculus , Anton ,Davis,seventh edition .
3- One and severable variables CALCULUS , SALAS .
4-3000 solved problems in calculus -Schaum by Mendelson .
5- Engineering mechanics (DYNAMICS),R.C.HIBBLER .

محتويات الكتاب :

تم إعادة الرفع بواسطة

مكتبة عسكر

ask2pdf.blogspot.com

نحن لا نقوم بتصوير أو نسخ الكتب
ننشر الكتب الموجودة بالفعل علي الإنترنت
نحترم حقوق الملكية
ولا نمانع حذف رابط أي كتاب
إذا طالب مؤلف أو دار نشره بحذفه